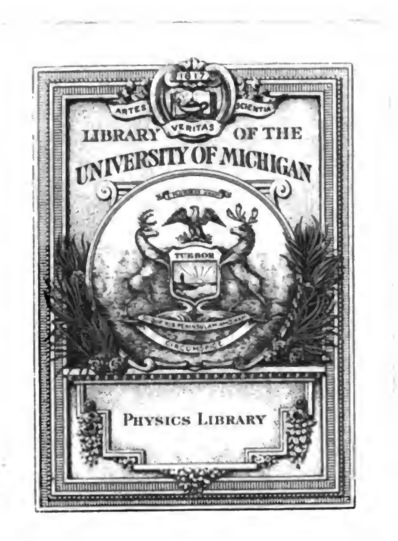
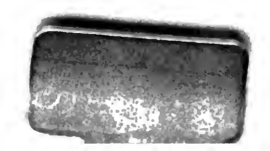
Lehrbuch der Optik

Paul Drude




1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
PHYSICS LIBRARY



Lehrbuch der Optik

von

Dr. **Paul Drude,**
weiland Professor der Physik an der Universität Berlin.

Dritte erweiterte Auflage

herausgegeben

von Dr. **E. Gehrcke,**
Kaiserlicher Professor und Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt,
Privatdozent an der Universität Berlin.

Mit 112 Abbildungen.



Leipzig
Verlag von S. Hirzel
1912.



Druck von August Pries in Leipzig.

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Buch soll den mit den Grundbegriffen der Differential- und Integral-Rechnung vertrauten Leser in das Gebiet der Optik derart einführen, daß er auch die Ziele und Resultate der neuesten Forschung verstehen und an der Hand der Originalarbeiten ins einzelne verfolgen kann.

Dieses Buch ist entstanden auf Wunsch des Verlegers, dem ich aber gern entsprochen habe, weil auch ich seine Ansicht teilte, daß ein das ganze Gebiet umfassendes modernes Lehrbuch fehlte, und weil ich für mich selbst durch die Vertiefung des Überblicks, zu dem das Niederschreiben eines Buches nötigt, Anregung zu eigenen neuen Ideen erhoffte. Einige derselben habe ich im II. und III. Abschnitt der physikalischen Optik verwendet, im übrigen habe ich lediglich schon publizierte Resultate möglichst einfach darzustellen gesucht. Da ich die Form eines Lehrbuches, nicht eines Handbuches im Auge hatte, so ist eine Anhäufung von Literaturzitaten, aus denen man die historische Entwickelung des betreffenden Arbeitsfeldes ersehen könnte, vermieden worden. Die wenigen Zitate, die ich aufgenommen habe, sollen wesentlich dem Leser zur näheren Information an denjenigen Stellen dienen, welche im Texte nur kurze Darstellung finden konnten, besonders bei den neueren Untersuchungen, welche noch nicht Eingang in die Handbücher gefunden haben.

Um den Kontakt mit dem Experiment zu wahren und zum Zwecke der möglichst einfachen Darstellung des Gebietes habe ich einen synthetischen Gang gewählt. Die einfachsten Experimente führen zur geometrischen Optik, in ihr macht man die wenigsten Voraussetzungen über die Natur des Lichtes. So habe ich mit der Darstellung der geometrischen Optik begonnen, wobei ich mich stark angelehnt habe an die vortrefflichen Zusammenstellungen von Czapski in Winkelmanns Handbuch der Physik und von Lummer in der 6. Auflage des Müller-Pouilletschen Lehrbuches.

Der darauf folgende I. Abschnitt der physikalischen Optik behandelt nur die allgemeinen Eigenschaften des Lichtes, denen zufolge man im Licht auf eine periodische Zustandsänderung schließt,

welche sich in Transversal-Wellen mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. In diesem Abschnitt habe ich als wichtige Fortschritte, die in den bisherigen Büchern meist fehlen, aufgenommen die Sommerfeldsche strenge Lösung des einfachsten Falles der Beugung, die geometrische Darstellung der Fresnelschen Integrale durch Cornu und, als experimentell bedeutenden Fortschritt, die Michelsonschen Glasplattenstaffeln.

Erst im II. Abschnitt wird zur Darstellung der optischen Eigenschaften der verschiedenen Körper eine weitere Vertiefung der Hypothese über die Natur des Lichtes notwendig. Dem Zwecke des Buches entsprechend habe ich die mechanischen Lichttheorien nur wenig erwähnt, dagegen die elektro-magnetische Lichttheorie, welche die einfachste und konsequenteste Darstellung der optischen Eigenschaften ermöglicht, in folgender Form durchgeführt:

Bezeichnet man mit X, Y, Z, bzw. α, β, γ, die Komponenten der elektrischen bzw. magnetischen Kraft (erstere elektrostatisch gemessen), ferner mit j_x, j_y, j_z bzw. s_x, s_y, s_z die Komponenten der elektrischen bzw. magnetischen Stromdichte, d. h. der Anzahl von elektrischen bzw. magnetischen Kraftlinien, welche durch eine relativ zum Äther ruhende Flächeneinheit in der Zeiteinheit hindurchtreten, dividiert durch 4π, so gelten stets, falls c das Verhältnis des elektrostatischen zum elektromagnetischen Maßsystem bezeichnet, die Grundgleichungen:

$$\frac{4\pi j_x}{c} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \text{ usw.} \quad \frac{4\pi s_x}{c} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \text{ usw.}$$

Die Anzahl der Kraftlinien wird in der üblichen Weise definiert. — Die besonderen optischen Eigenschaften der Körper machen sich nun erst geltend in den Gleichungen, welche die elektrische bzw. magnetische Stromdichte mit der elektrischen und magnetischen Kraft verbinden. Wir wollen diese Gleichungen als „Körper-Gleichungen" von den hingeschriebenen „Grundgleichungen" unterscheiden. Da die „Körper-Gleichungen" auch für inhomogene Körper aufgestellt werden, d. h. für solche, deren Eigenschaften Funktionen des Ortes sind, und da die „Grundgleichungen" in jedem Falle gelten, so gewinnt man außer den Differentialgleichungen für die elektrische bzw. magnetische Kraft auch sofort die an den Körperoberflächen zu erfüllenden Grenzbedingungen.

Bei der Aufstellung der „Grund- und Körper-Gleichungen" bin ich wiederum synthetisch vorgegangen, indem ich sie aus den einfachsten elektrischen bzw. magnetischen Experimenten ableitete.

Der Gang konnte hier, da das Buch vorwiegend Optik behandeln soll, nur flüchtig skizziert werden, betreffs ausführlicherer Ableitung verweise ich auf mein Buch „Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage“ (Enke, 1894). — Auf diesem Wege gelangt man zunächst zu keiner Erklärung der Dispersionserscheinungen, da die rein elektrisch-magnetischen Experimente nur auf, ich möchte sagen, makro-physische Körpereigenschaften schließen lassen. Zur Erklärung der optischen Dispersion ist eine Hypothese über die mikro-physischen Eigenschaften der Körper zu machen. Als solche habe ich die von Helmholtz eingeführte Ionen-Hypothese benutzt, weil sie mir der einfachste, anschaulichste und konsequenteste Weg zu sein scheint, um außer der Dispersion, Absorption und natürlichen Zirkularpolarisation auch die magneto-optischen Eigenschaften und die optischen Eigenschaften bewegter Körper darzustellen. Gerade diese beiden zuletzt genannten Kapitel glaubte ich mit aufnehmen zu müssen, da das erste durch die wichtige Entdeckung Zeemans neues Interesse gewonnen hat und das zweite durch H. A. Lorentz zu einem ebenso übersichtlichen wie eleganten Abschluß geführt worden ist. Ich habe diese Theorie von Lorentz durch Elimination aller für die Optik entbehrlichen Größen zu vereinfachen gesucht. Hinsichtlich der magneto-optischen Eigenschaften habe ich darauf hingewiesen, daß man sie im allgemeinen nicht allein dadurch erklären kann, daß die bewegten Ionen im Magnetfeld seitlich ablenkende Kräfte erfahren, sondern daß in den stark magnetisierbaren Metallen die Ionen auch in einer beständigen Bewegung sein müssen, welche die Wirkung von Ampèreschen Molekularströmen besitzt. Damit wird zugleich auch die bisher unvollständig beantwortete Frage erledigt, weshalb die Magnetisierungs-Konstante des Eisens und überhaupt aller Körper für Lichtschwingungen gleich der des freien Äthers anzunehmen ist.

Die Anwendung der Ionen-Hypothese führt ferner zu einigen neuen Dispersionsformeln für die natürliche und magnetische Drehung der Polarisationsebene, die experimentell bestätigt werden; ferner führt die Ionen-Hypothese bei den Metallen zu Dispersionsformeln, die die Kontinuität der optischen und der elektrischen Eigenschaften der Metalle wesentlich durch die Trägheit der Ionen darlegen und ebenfalls in dem bisher allerdings noch sehr beschränkten Beobachtungsintervall bestätigt werden.

Der II. Abschnitt des Buches beschäftigt sich mit der Verknüpfung der Optik mit der Thermodynamik und (im 3. Kapitel)

mit der kinetischen Gastheorie. Theoretisch wurde hier durch Kirchhoff, Clausius, Boltzmann und W. Wien Bahn gebrochen, und die vielen fruchtbaren experimentellen Untersuchungen über die Strahlung der Körper, welche in neuerer Zeit unternommen wurden, zeigen deutlich, daß Theorie und Experiment durch gegenseitige Anregung zur besten Blüte sich entfalten.

Von dieser Überzeugung durchdrungen, habe ich auch dies Buch geschrieben, indem es die Theorie weiteren Kreisen zugänglich zu machen sucht, die sich nicht mit dem zum Teil zeitraubenden Studium der Originalarbeiten befassen wollen. Auf Vollständigkeit, wie sie das ausgezeichnete Lehrbuch von Mascart oder Winkelmanns Handbuch erstreben, kann ich dabei keinen Anspruch machen; ich habe manche interessante und wichtige Gebiete optischer Forschung der Kürze halber nicht behandelt. Meine Absicht ist hier erreicht, wenn diese Blätter den Leser in der Ansicht bestärken, daß die Optik nicht ein altes, abgearbeitetes Gebiet der Physik ist, sondern daß auch hier frisches Leben pulsiert, zu dessen weiterer Ernährung beizutragen für jeden einzelnen lockend sein muß.

Herr stud. F. Kiebitz hat mich beim Lesen der Korrekturen wirksam unterstützt.

Leipzig, Januar 1900.

Vorwort zur zweiten Auflage.

In den sechs Sahren, welche seit Erscheinen der ersten Auflage dieses Buches verstrichen sind, hat sich in der ganzen Physik durch die experimentelle und theoretische Ausbildung der Elektronenlehre eine rapide Entwickelung vollzogen, wie sie wohl bisher einzig dasteht. Auch in der Optik ist naturgemäß dieser Fortschritt bemerklich in den Kapiteln, welche, wie die Dispersion der Körper, und die magnetische Aktivität, auf der Ionen-Hypothese aufgebaut sind. Der Fortschritt liegt dabei wesentlich im Ersatz der Ionen-Hypothese durch die Elektronen-Hypothese, das heißt durch die Erkenntnis, daß aus gewissen optischen Erscheinungen dieselben universellen charakteristischen Konstanten abgeleitet werden können, die auch bei Kathodenstrahlen und überhaupt freien Elektronen

auftreten. Diesen Fortschritt habe ich in den betreffenden Kapiteln in dieser neuen Auflage kurz zur Darstellung zu bringen gesucht. — Im Kapitel über natürliche Aktivität ist die Aufstellung der Grundgleichungen auch verbessert, entsprechend den hier gemachten Fortschritten. — Der größte Fortschritt ist aber wohl zweifellos im Gebiete der Strahlung zu verzeichnen, wo es Planck gelungen ist, nicht nur ein experimentell gut bestätigtes Strahlungsgesetz für schwarze Körper zu gewinnen, sondern auch eine zahlenmäßige Berechnung des elektrischen Elementarquantums und der absoluten Masse der Gasmoleküle aus den Strahlungskonstanten. Wenn ich auch darauf verzichten mußte, eine Ableitung dieser Planckschen Formel zu geben, zumal diese Aufgabe auch seit Erscheinen der Planckschen Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung völlig unnötig ist, so habe ich doch kurz außer den Resultaten auch den Gedankengang zu skizzieren gesucht, weil er mir von allgemeinem Interesse zu sein scheint auch für einen Leser, der in das mathematische Detail nicht eindringen will. — In den übrigen Kapiteln, besonders der physikalischen Optik, habe ich an einigen Stellen Fortschritte und Zitate neuerer Literatur aufgenommen, aber diese machen auf Vollständigkeit keinen Anspruch, da der Charakter des Buches der eines kurz gefaßten Lehrbuches bleiben sollte, das zum weiteren Studium der ausführlichen Handbücher und der Original-Literatur vorbereiten und anregen soll.

Dem bei einer Besprechung der 1. Auflage geäußerten Wunsche folgend, habe ich dieser 2. Auflage ein kurzes Sachregister zugefügt.

Den Herren Dr. Kiebitz und Dr. Bode bin ich zu großem Danke verpflichtet für die Hilfe bei den Korrekturen und dem Register.

Berlin, den 27. Juni 1906.

Nachwort.

Die vorliegende zweite Auflage von Paul Drudes Lehrbuch der Optik lag im Manuskript fertig vor, als am 5. Juli 1906 ein verborgenes seelisches Leiden, hervorgerufen durch seine aufreibende Tätigkeit, den groß denkenden, warm empfindenden und edel handelnden Gelehrten an sich selbst verzweifeln und seinem blühenden Leben ein erschütterndes Ende setzen ließ. Das Buch

war damals zur Hälfte gedruckt; es war den Assistenten des Verfassers eine Pflicht des Dankes und der Verehrung, für die wortgetreue Beendigung der Drucklegung einzustehen.

Möge diesem Buche außer seinem wissenschaftlichen Inhalt auch Drudes glückliche Art, wissenschaftliche Probleme aufzufassen und zu behandeln, bleibenden Wert verleihen, und möge es jeden Leser etwas von dem Geiste empfinden lassen, der ihn zu seiner Lehrtätigkeit begeistert hat, der ihn den Gipfel wissenschaftlichen Forschens und Erkennens in der Veredelung der Lebensauffassung und Lebensführung erblicken ließ.

Franz Kiebitz.

Vorwort zur dritten Auflage.

In der dritten Auflage des bewährten Drudeschen Werkes wurde der Aufbau des Ganzen unverändert gelassen. Bei der Auswahl aus dem reichen, wissenschaftlichen Material wurde versucht, in engster Fühlung mit den von Drude eingehaltenen Gesichtspunkten zu bleiben. Dadurch ist, wie ich hoffe, der große Vorzug des Buches, dem Studierenden in Kürze und in konsequentem Festhalten an der elektromagnetischen Lichttheorie eine Übersicht über die wichtigsten, der Rechnung zugänglichen optischen Erscheinungen zu geben, gewahrt geblieben. Die spekulativen Elemente, welche dieser Darstellung der Optik zuweilen das Aussehen einer Naturphilosophie in mathematischem Gewande geben, habe ich nicht zurücksetzen zu sollen gemeint, da sie wohl in der augenblicklichen Entwicklung der gesamten theoretischen Physik begründet sind.

An Zusätzen seien hier genannt der Abriß der Stokesschen Theorie der Aberration in dem heute so strittigen Kapitel der Optik bewegter Körper und der Abschnitt über die photochemischen Vorgänge in Gasen. Auf die Darstellung von Erscheinungen, die entweder hauptsächlich vom experimentellen Standpunkte interessieren oder in das elektrisch-optische Grenzgebiet fallen, habe ich verzichten zu sollen geglaubt, um den alten Umfang des Werkes im wesentlichen beibehalten zu können. Dagegen habe ich etwas ausgiebiger, als dies bisher geschah, auf Spezialdarstellungen einzelner Teilgebiete verwiesen.

E. Gehrcke.

Inhaltsverzeichnis.

Geometrische Optik.

Kapitel I.
Die Fundamentalgesetze.

Kapitel II.
Geometrische Theorie der optischen Abbildung.

Kapitel III.
Physikalische Herstellung der optischen Abbildung.

Kapitel IV.
Über Strahlenbegrenzung und die von ihr abhängige Lichtwirkung.

Kapitel V.

Optische Instrumente.

Physikalische Optik.

I. Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften des Lichtes.

Kapitel I.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Kapitel II.

Interferenz des Lichtes.

Kapitel III.

Das Huygenssche Prinzip.

Kapitel IV.

Beugung des Lichtes.

Kapitel V.

Polarisation.

II. Abschnitt.

Optische Eigenschaften der Körper.

Kapitel I.

Theorie des Lichtes.

Kapitel II.

Durchsichtige isotrope Körper.

Kapitel III.

Optische Eigenschaften durchsichtiger Kristalle.

Kapitel IV.

Absorbierende Körper.

Kapitel V.

Die Dispersion der Körper.

Kapitel VI.

Natürlich-aktive Körper.

Kapitel VII.

Magnetisch-aktive Körper.

A. Hypothese der Molekularströme.

B. Hypothese des Halleffektes.

Kapitel VIII.

Bewegte Körper.

III. Abschnitt.

Die Strahlung der Körper.

Kapitel I.

Die Strahlung in energetischer Deutung.

Kapitel II.

Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik auf reine Temperaturstrahlung.

Kapitel III.

Das Leuchten der Gase und Dämpfe.

GEOMETRISCHE OPTIK.

Es gibt ein großes Gebiet von Lichterscheinungen — und darunter befinden sich gerade diejenigen, welche die weitgehendste praktische Anwendung gefunden haben —, die auf vier Fundamentalgesetzen des Lichtes beruhen. Diese sind:

1. die geradlinige Ausbreitung des Lichtes,
2. die Unabhängigkeit der Teile eines Lichtbündels voneinander,
3. das Reflexionsgesetz,
4. das Brechungsgesetz.

Diese vier Gesetze bieten sich als Erfahrungstatsachen der Beobachtung leicht dar.

Wenn man sie zum Ausgangspunkt der Betrachtung macht, ohne andere Eigenschaften des Lichtes in Rücksicht zu ziehen, so erhält man Aufschluß über gewisse geometrische Beziehungen bei den Lichterscheinungen, da jene vier Fundamentalgesetze sich ebenfalls nur auf geometrische Bestimmungen der Lichtausbreitung beziehen. Jene Fundamentalgesetze bilden die ausreichende Grundlage für die sogenannte geometrische Optik, und man braucht zum folgerichtigen Aufbau derselben keine besonderen Hypothesen heranzuziehen, welche näher auf die Natur des Lichtes eingehen.

Im Gegensatz zur geometrischen Optik steht die physikalische Optik, welche andere als rein geometrische Eigenschaften des Lichtes behandelt, und welche näher auf das physikalische Verhalten der verschiedenen Körper gegenüber den Lichterscheinungen eingeht. Zur bequemen Zusammenfassung der großen Mannigfaltigkeit dieser Erscheinungen hat man mit bestem Erfolge besondere Hypothesen über die Natur des Lichtes ersonnen.

Vom Standpunkte der physikalischen Optik aus erscheinen die vier angeführten Fundamentalgesetze der geometrischen Optik nur als allerdings meist sehr weitgehende Annäherungsgesetze. Es läßt sich aber wohl angeben, welches der Gültigkeitsbereich der geometrischen Optik ist, d. h. unter welchen Umständen ihre

Folgerungen von der Wirklichkeit eine merkbare Abweichung besitzen.

An diesem Umstande muß man stets festhalten, wenn man in der geometrischen Optik sich nicht auf einem Übungsfelde der reinen Mathematik, sondern in einer wirklich physikalischen Disziplin bewegen will. Die vollständige Theorie der optischen Instrumente läßt sich nur vom Standpunkt der physikalischen Optik aus entwickeln.

Da aber, wie schon vorhin bemerkt wurde, die Gesetze der geometrischen Optik in den meisten Fällen eine sehr große Annäherung an die Wirklichkeit besitzen, so erscheint es gerechtfertigt, zunächst diese geometrisch-optischen Gesetze bis zu ihren Konsequenzen in komplizierteren Fällen, wie sie z. B. in den optischen Instrumenten vorhanden sind, zu entwickeln.

Kapitel I.

Die Fundamentalgesetze.

1. Direkte Erfahrungen. Unter den direkten Erfahrungen sollen die vier eben angeführten Grundgesetze verstanden werden.

Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes wird bewiesen durch den Schatten, den eine kleine (punktförmige) Lichtquelle P von einem undurchsichtigen Gegenstande auf einem Schirme S entwirft. Hat der undurchsichtige Gegenstand ein Loch L, so findet man die Schattengrenze auf dem Schirme S als Durchschnitt von S mit einem Kegel, dessen Spitze in der Lichtquelle P liegt, und dessen Mantel durch die Umgrenzung des Loches L geht.

Wenn man das Loch L kleiner macht, so zieht sich die Schattengrenze auf dem Schirme S zusammen. Sie wird aber unscharf, wenn das Loch L sehr klein (unter 1 mm etwa) wird; nach Punkten des Schirmes S, welche innerhalb des geometrischen Schattens liegen, gelangt noch Licht von der Quelle P. Es ist zwar zu berücksichtigen, daß eine streng punktförmige Lichtquelle P nie

herzustellen ist, und daß schon wegen der Ausdehnung der Quelle P die Schattengrenze keine absolut scharfe sein kann, auch wenn sich das Licht geradlinig ausbreitet (Kernschatten und Halbschatten). Indes ist bei einem sehr kleinen Loche L (von etwa $^1/_{10}$ mm Größe) die Lichtausbreitung hinter L auf dem Schirme S so weit, daß sicher in diesem Falle keine geradlinige Ausbreitung des Lichtes vorliegt.

Dieselben Resultate erhält man, wenn man die Lichtausbreitung anstatt mit Hilfe eines Loches L in einem undurchsichtigen Gegenstande durch den Schatten studiert, den ein undurchsichtiger Gegenstand S' auf dem Schirme S entwirft. Ist S' genügend klein, so findet keine geradlinige Ausbreitung des Lichtes von P aus statt. Man muß also daran festhalten, daß das Gesetz von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes nur dann gilt, wenn die freien Öffnungen, durch welche das Licht hindurchtritt, oder die Schirme, welche den Durchtritt des Lichtes verhindern, nicht zu klein sind.

Um die Ausbreitung des Lichtes von einer Quelle P aus nach einem Schirme S hin anschaulich zu bezeichnen, pflegt man zu sagen, daß P Lichtstrahlen nach S entsende. Der Weg eines Lichtstrahles wird dadurch definiert, daß seine Wirkung auf S nur durch ein Hindernis abgeschnitten wird, welches auf der Bahn des Lichtstrahls selbst liegt. Bei geradliniger Ausbreitung des Lichtes sind also auch die Lichtstrahlen gerade, z. B. wenn das Licht sich von P aus durch ein nicht zu kleines Loch L eines undurchsichtigen Gegenstandes ausbreitet. In diesem Falle pflegt man zu sagen, daß P ein Bündel gerader Lichtstrahlen durch L hindurchsende.

Da bei Verkleinerung von L die Lichtwirkung auf einem Schirme S sich so darstellt, als ob für gewisse, von P ausgesandte Lichtstrahlen die Wirkung auf S einfach aufgehoben ist, während sie für die anderen Lichtstrahlen unverändert geblieben ist, so sind die Teile eines Lichtbündels unabhängig voneinander.

Auch dieses Gesetz besteht nicht mehr, wenn die Verkleinerung des Loches L zu weit geht. Dann hört aber überhaupt der Begriff der geraden, von P fortgepflanzten Lichtstrahlen auf.

Die Lichtstrahlen sind also ein zweckmäßig eingeführter Begriff, der stets eine unendliche Mannigfaltigkeit benachbarter Lichtstrahlen zur Voraussetzung hat. Man kann einen einzelnen

Lichtstrahl nicht isolieren und seine physikalische Existenz nachweisen. Denn je mehr man durch Verengerung eines Lichtstrahlenbündels diesem Ziele zustrebt, um so weniger breitet sich das Licht geradlinig aus, und um so mehr verliert der Begriff der Lichtstrahlen seine physikalische Bedeutung.

Wenn die Homogenität des Raumes, in welchem sich die Lichtstrahlen befinden, gestört wird durch einen eingelagerten Körper, so erfahren die Lichtstrahlen an seiner Oberfläche plötzliche Richtungsänderungen: der Lichtstrahl spaltet sich in zwei, einen reflektierten und einen gebrochenen Strahl. — Ist die Oberfläche des Körpers, welche von dem Lichtstrahl getroffen wird, eine Ebene, so nennt man die durch die Normale N dieser Ebene und den Lichtstrahl gelegte Ebene die Einfallsebene, den Winkel zwischen jenen beiden Richtungen den Einfallswinkel (φ).

Es bestehen die Gesetze: Der reflektierte und der gebrochene Strahl liegen ebenfalls in der Einfallsebene, der Reflexionswinkel (Winkel zwischen N und reflektiertem Strahl) ist gleich dem Einfallswinkel, der Brechungswinkel φ' (Winkel zwischen N und gebrochenem Strahl) steht mit dem Einfallswinkel φ in der Beziehung:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = n, \tag{1}$$

wobei n für eine bestimmte Farbe des Lichtes eine Konstante ist, und der Brechungsexponent (oder Brechungsindex) des Körpers gegen seine Umgebung genannt wird. — Wenn nichts anderes bemerkt ist, wollen wir unter n den Brechungsexponenten gegen Luft verstehen. — Für alle gut durchsichtigen, flüssigen und festen Körper ist derselbe größer als 1.

Ist ein Körper A durch eine dünne, planparallele Platte eines anderen Körpers B von der Luft getrennt, so wird das Licht an beiden Grenzflächen der Platte gebrochen entsprechend der Formel (1) nach den Gesetzen:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = n_b, \qquad \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi''} = n_{ab},$$

wobei φ den Einfallswinkel des Lichtes in Luft, φ' den Brechungswinkel im Körper B, φ'' den Brechungswinkel im Körper A, n_b den Brechungsexponenten von B gegen Luft, n_{ab} den Brechungsindex von A gegen B bedeutet. Es ist daher

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi''} = n_b \cdot n_{ab}.$$

Wenn die Platte des Körpers B unendlich dünn wird, so bleibt diese Formel bestehen; der Fall unterscheidet sich dann aber nicht mehr von dem zuerst betrachteten, daß eine einfache Brechung des Lichtes von Luft gegen den Körper A stattfindet. Die letzte Formel liefert also durch Vergleichung mit (1), wenn wir den Brechungsindex von A gegen Luft mit n_a bezeichnen:

$$n_a = n_b \cdot n_{ab},$$

oder (2)

$$n_{ab} = n_a : n_b,$$

d. h. der Brechungsexponent von A gegen B ist gleich dem Verhältnis der Brechungsexponenten von A und B gegen Luft.

Wenn wir den Fall betrachtet hätten, daß eine unendlich dünne Platte A auf dem Körper B läge, so würden wir durch dieselbe Schlußweise erhalten:

$$n_{ba} = n_b : n_a.$$

Es ist also

$$n_{ab} = 1 : n_{ba},$$

d. h. der Brechungsindex von A gegen B ist gleich dem reziproken Werte des Brechungsindex von B gegen A.

Das Brechungsgesetz (1) erlaubt daher nun den Schluß, daß man auch φ' als Einfallswinkel im Körper, φ als Brechungswinkel in seiner Umgebung (Luft) betrachten kann, d. h. daß der Sinn der Lichtausbreitung auch ohne Änderung der Lage der Strahlen umgekehrt werden kann. Bei dem Reflexionsgesetz ist dies Prinzip der Umkehrbarkeit der Lichtwege ebenfalls gültig, wie hier ohne weiteres ersichtlich ist.

Man erhält daher das Brechungsgesetz (1) beim Übergang des Lichtes von einem Körper A zu einem Körper B oder umgekehrt in der symmetrischen Form:

$$n_a \cdot \sin \varphi_a = n_b \cdot \sin \varphi_b, \tag{3}$$

wobei φ_a und φ_b die Winkel des Lichtstrahls im Körper A bezw. B gegen die Normale N der Trennungsfläche bedeuten, und n_a bezw. n_b die Brechungsexponenten der beiden Körper gegen irgendeinen dritten Vergleichskörper, z. B. Luft, oder auch gegen den luftleeren Raum, das Vacuum.

Was letzteren anbelangt, so unterscheidet sich der Brechungsexponent n eines Körpers gegen Luft nur sehr wenig von dem Brechungsexponenten n_0 gegen das Vacuum. Nach (2) muß sein:

$$n_0 = n : n', \tag{4}$$

wobei n' den Brechungsindex des Vacuums gegen Luft bedeutet. Derselbe hat bei Atomsphärendruck und 0 Grad Temperatur den Wert

$$n' = 1 : 1{,}00029. \tag{5}$$

Nach dem Brechungsgesetz (3) gibt es zu jedem einfallenden Lichtstrahl (φ_a) nur dann einen gebrochenen Strahl (φ_b), falls $n_a < n_b$ ist. Ist das Umgekehrte der Fall ($n_a > n_b$), so wird für

$$\sin \varphi_a > \frac{n_b}{n_a} \tag{6}$$

$\sin \varphi_b > 1$, d. h. es gibt keinen reellen Brechungswinkel φ_b. Dann tritt an der Grenzfläche keine Brechung, sondern nur Reflexion ein. Im reflektierten Strahl muß jetzt die ganze Wirkung des einfallenden Strahles enthalten sein; daher bezeichnet man diesen Fall als Totalreflexion.

In welcher Weise sich in den anderen Fällen (partielle Reflexion) die Wirkung des einfallenden Strahles auf den reflektierten und gebrochenen Strahl verteilt, wird in der physikalischen Optik (im II. Abschnitt, Kapitel II) näher betrachtet werden. Hier mag die Bemerkung genügen, daß im allgemeinen bei durchsichtigen Körpern der gebrochene Strahl weit mehr Lichtwirkung enthält als der reflektierte. Nur bei den Metallen findet sich in letzterem fast die volle Wirkung des einfallenden Strahles. Es ist übrigens zu bemerken, daß bei so stark undurchsichtigen Körpern, wie den Metallen, das Reflexionsgesetz wohl bestehen bleibt, das Brechungsgesetz aber in der Form (1) oder (3) nicht mehr gültig ist. Auch dieses soll später näher betrachtet werden (im II. Abschnitt, Kapitel IV).

Im Licht empfinden wir verschiedene Qualitäten: die Farben. Der Brechungsindex hängt von der Farbe ab, er wird (gegen Luft gemessen) bei allen gut durchsichtigen Körpern größer von rot über gelb zu blau. Die Ausbreitung weißen Lichtes beim Durchgang durch ein Prisma in ein Spektrum beruht auf der Änderung des Brechungsindex mit der Farbe. Man nennt diese Eigenschaft des Körpers seine Dispersion.

Ist die Oberfläche eines Körpers, der von Lichtstrahlen getroffen wird, nicht eben, sondern gekrümmt, so kann man die Oberfläche als aus sehr kleinen Stücken von Ebenen (den Tangentialebenen) zusammengesetzt denken und den Gang der Lichtstrahlen nach den obigen Gesetzen konstruieren. Dieses Verfahren ist aber nur statthaft, wenn die Krümmung der Oberfläche einen gewissen Betrag nicht übersteigt, so daß wir die Fläche noch als eine glatte bezeichnen können.

Rauhe Oberflächen zeigen unregelmäßige (diffuse) Reflexion und Brechung, sie wirken ähnlich so, als ob sie selbst Licht ausstrahlen.

Die Grenzfläche eines Körpers ist überhaupt nur bei diffuser Reflexion oder Brechung sichtbar; dagegen ist die Oberfläche eines vollkommenen Spiegels nicht sichtbar, man sieht nur die an ihr reflektierten Strahlen, die von außerhalb des Spiegels liegenden Lichtquellen herrühren, d. h. man sieht nur die letzteren.

2. Satz vom ausgezeichneten Lichtweg. Die vorhin angeführten direkten Erfahrungstatsachen über die Richtung der Lichtstrahlen lassen sich gemeinsam zusammenfassen in den Satz vom ausgezeichneten Lichtweg. Wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von Reflexionen und Brechungen von einem Punkte P nach einem Punkte P' gelangt, so ist die Summe der Produkte aus Brechungsexponent je eines Mediums und der in ihm durchlaufenen Strecke $\Sigma n l$, ein Extremwert, d. h. sie weicht von der gleichen Summe für alle, dem tatsächlichen Wege unendlich benachbarten höchstens um Glieder zweiter Ordnung ab. Es ist also, wenn wir die Änderung erster Ordnung durch ein vorgesetztes δ bezeichnen;

$$\delta \Sigma n l = 0. \qquad (7)$$

Das Produkt: Brechungsexponent mal durchlaufener Weg wird „Lichtweg“ oder „optische Länge“ des Strahles genannt.

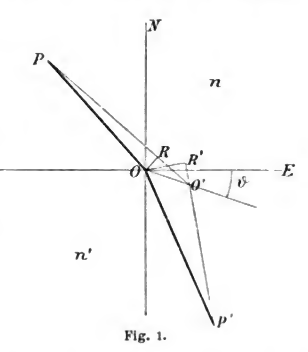


Fig. 1.

Um den Satz für eine einzelne Brechung zu beweisen, sei POP' der tatsächliche Gang des Lichtes (Figur 1). OE sei der Durchschnitt der Einfallsebene PON mit der Grenzfläche (Tangentialebene) des brechenden Körpers. O' sei ein dem Punkte O unendlich benachbarter Punkt in der Grenzfläche des brechenden Körpers, und zwar möge OO', in Fig. 1 etwa nach vorn vortretend, einen beliebigen Winkel ϑ mit der Einfallsebene, d. h. der Linie OE, einschließen. Nun ist zu beweisen, daß bis auf Größen der zweiten oder höheren Ordnung

$$n \cdot PO + n' \cdot OP' = n \cdot PO' + n' \cdot O'P' \qquad (8)$$

ist, wenn n und n' die Brechungsexponenten der aneinander grenzenden Medien bedeuten.

Fällt man von O ein Lot OR auf PO' und ein Lot OR' auf $P'O'$, so ist bis auf Größen zweiter Ordnung:

$$PO' = PO + RO', \quad O'P' = OP' - O'R'. \tag{9}$$

Ferner ist mit derselben Annäherung:

$$RO' = OO' \cdot \cos POO', \quad O'R' = OO' \cdot \cos P'OO'. \tag{10}$$

Um $\cos POO'$ zu berechnen, wollen wir die Richtungskosinus der Strecken PO und OO' in bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz hinschreiben, als das wir die Richtungen ON, OE und OD wählen, wobei OD senkrecht zu ON und OE gedacht ist. Bezeichnet φ den Einfallswinkel PON, so sind die Richtungskosinus von PO (die Vorzeichen lassen wir unberücksichtigt):

$$PO: \quad \cos\varphi, \ \sin\varphi, \ o,$$

die Richtungskosinus von OO':

$$OO': \quad o, \ \cos\vartheta, \ \sin\vartheta.$$

Nach einem Satze der analytischen Geometrie, nach dem der Kosinus des Winkels zwischen zwei beliebigen Strecken gleich der Summe der Produkte entsprechender Richtungskosinus der Strecken gegen ein rechtwinkliges Achsenkreuz ist, folgt:

$$\cos POO' = \sin\varphi \cdot \cos\vartheta,$$

und analog:

$$\cos P'OO' = \sin\varphi' \cdot \cos\vartheta,$$

falls φ' den Brechungswinkel bedeutet.

Fig. 2.

Es ist daher nach (9) und (10):

$$n \cdot PO' + n' \cdot O'P' = n \cdot PO + n \cdot OO' \cdot \sin\varphi \cdot \cos\vartheta + n' \cdot OP' - n' \cdot OO' \cdot \sin\varphi' \cdot \cos\vartheta.$$

Da nun aber nach dem Brechungsgesetz (3) die Relation besteht:

$$n \cdot \sin\varphi = n' \cdot \sin\varphi',$$

so ist in der Tat die Relation (8) erfüllt für eine beliebige Lage des Punktes O', falls er nur unendlich nahe benachbart ist an O.

Für eine einzelne Reflexion läßt sich der Satz (7) einfacher beweisen. Derselbe nimmt hier die Form an:

$$\delta\,(PO + OP') = 0, \tag{11}$$

falls, wie in Figur 2 gezeichnet ist, PO und OP' den tatsächlichen Strahlengang bezeichnet. Denken wir uns denjenigen Punkt P_1 konstruiert, welcher zu P symmetrisch liegt in bezug auf die Tangentialebene OE des brechenden Körpers, so ist für jeden beliebigen Punkt O' in der Tangentialebene $PO' = P_1O'$. Der Lichtweg von P nach P' bei einer einmaligen Reflexion an der Tangentialebene OE ist also bei jeder beliebigen Lage des Treffpunktes O' gleich der Länge $P_1O' + O'P'$. Diese Länge ist nun ein Minimum, wenn P_1, O' und P' in gerader Linie liegen. Dann fällt aber der Punkt O' in der Tat mit dem aus dem Reflexionsgesetz folgenden Punkte O zusammen. Da nun die Eigenschaft eines Minimums (ebenso wie eines Maximums) durch Verschwinden der ersten Variation, d. h. durch die Gleichung (11), sich ausdrückt, so ist unser Satz (7) für eine einmalige Reflexion bewiesen.

Es ist zu bemerken, daß das Verschwinden der ersten Variation sowohl der Ausdruck eines Minimums wie eines Maximums sein kann. In dem Falle, wo der brechende Körper tatsächlich von einer Ebene begrenzt ist, folgt aus der angegebenen Konstruktion ohne weiteres, daß bei der Reflexion der Lichtweg ein Minimum ist. Ebenso läßt sich beweisen, wie weiter unten näher ausgeführt werden wird, daß bei der Brechung der tatsächliche Lichtweg ein Minimum ist, falls der brechende Körper von einer Ebene begrenzt wird. Daher ist unser Prinzip auch oft das vom kürzesten Lichtweg genannt worden.

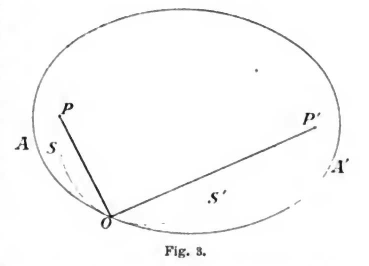


Fig. 3.

Wenn indes die Oberfläche des brechenden oder reflektierenden Körpers gekrümmt ist, so kommt es ganz auf die Art dieser Krümmung an, ob der Lichtweg ein Minimum oder ein Maximum ist. Allen Fällen gemeinsam ist nur das Verschwinden der ersten Variation, und dies genügt auch vollkommen zur Bestimmung des Strahlenganges.

Um die Verhältnisse klar zu übersehen, empfiehlt sich die Einführung der sogenannten aplanatischen Fläche, das ist diejenige Fläche, für deren sämtliche Punkte A die Summe der Lichtwege

nach den zwei Punkten P und P' konstant ist. Für diese Fläche verschwindet also für die Summe der Lichtwege nicht nur die Variation der ersten Ordnung, sondern alle Variationen beliebig hoher Ordnung.

Bei der Reflexion ist die aplanatische Fläche

$$PA + P'A = \text{Konstante } C \tag{12}$$

ein Rotationsellipsoid mit den Punkten P und P' als Brennpunkten.

Wenn SOS' das Stück eines reflektierenden Spiegels ist (vgl. Figur 3), und O ein Punkt auf demselben, für den die Richtungen PO und $P'O$ dem Reflexionsgesetz genügen, so muß die zu den Punkten P und P' zugehörige aplanatische Fläche AOA', welche durch den Punkt O geht, offenbar den Spiegel SOS' in O berühren, da für beide Flächen die erste Variation der Lichtwege verschwindet. Ist nun der Spiegel SOS', wie in der Figur, stärker konkav gekrümmt als die aplanatische Fläche, so ist der Lichtweg $PO + OP'$ ein Maximum, sonst ein Minimum. Der Beweis hierfür ergibt sich direkt aus dem Anschauen der Figur, da für alle Punkte O' im Innern des Rotationsellipsoids AOA', dessen Gleichung durch (12) gegeben ist, die Summe $PO' + O'P'$ kleiner ist als die Konstante C, während für alle äußeren Punkte O' die Summe $PO' + O'P'$ größer ist als C, und für den tatsächlichen Reflexionspunkt O die Summe $PO + OP'$ gleich ist C.

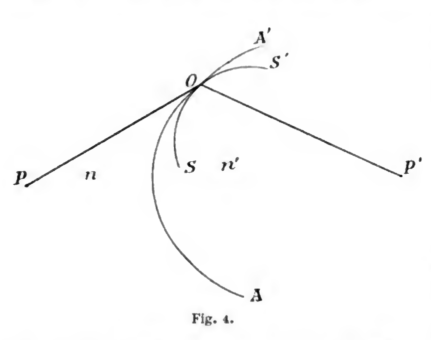


Fig. 4.

Bei der Brechung ist die aplanatische Fläche

$$n \cdot PA + n' \cdot P'A = \text{Konstante } C$$

eine sogenannte Kartesische Ovale, welche nach dem schwächer brechenden Medium zu (es sei in der Figur 4 $n < n'$) konvex sein muß, und zwar stärker als irgendeine um P' als Zentrum beschriebene Kugel.

Diese aplanatische Fläche scheidet wiederum die Gebiete, für deren Punkte O' die Summe der Lichtwege $n \cdot PO' + n' \cdot P'O' > C$ ist, von denen, in welchen jene Summe $< C$ ist. Erstere Gebiete liegen von der aplanatischen Fläche aus nach dem schwächer brechenden Medium (links in der Figur), letztere nach dem stärker brechenden Medium (rechts in der Figur).

Wenn nun SOS' ein Stück der Grenzfläche zwischen beiden Medien ist, und PO, $P'O$ den tatsächlichen Strahlenverlauf, wie er nach dem Brechungsgesetz stattfindet, bezeichnet, so ist der Lichtweg über O ein Maximum oder Minimum, je nachdem SOS' stärker oder schwächer konvex ist nach dem schwächer brechenden Medium zu, als die aplanatische Fläche AOA'. Der Beweis ergibt sich direkt aus der Figur.

Falls also z. B. SOS' eine Ebene ist, so ist der Lichtweg ein Minimum. In der Figur ist der Fall gezeichnet, daß der Lichtweg über O ein Maximum ist.

Da wir später sehen werden, daß der Brechungsexponent umgekehrt proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist, so ist der optische Weg nl proportional der Zeit, welche das Licht zum Durchlaufen der Strecke l gebraucht hat. Das Prinzip des kürzesten Lichtweges deckt sich also mit Fermats Prinzip der schnellsten Ankunft des Lichtes, man erkennt aber aus dem Vorigen, daß unter Umständen die Ankunft des Lichtes auch die langsamste sein kann; Fermats Prinzip hat keine allgemeine Gültigkeit.

Nach dem Prinzip der Superposition von Variationen können wir von der Gleichung $\delta \Sigma nl = 0$ für eine einzelne Reflexion oder Brechung sofort Anwendung machen auf den Fall beliebig vieler.

3. Der Satz von Malus. Es gibt zwei verschiedene Arten von geometrischen Strahlensystemen: solche, welche sich rechtwinklig von einer geeignet konstruierten Fläche F schneiden lassen (orthotomisches System), und solche, für welche eine derartige Fläche F nicht gefunden werden kann (anorthotomisches System). Unter Benutzung des vorigen Satzes läßt sich nun der Satz von Malus beweisen. Derselbe lautet: Ein orthotomisches System von Strahlen bleibt auch nach beliebig vielen Reflexionen und Brechungen ein orthotomisches. Nach der Wellentheorie des Lichtes, nach der die Strahlen die Normalen der Wellenfläche sind, ist der Satz selbstverständlich. Man kann ihn aber

auch allein aus den bisher benutzten geometrischen Fundamentalgesetzen herleiten.

Seien (vgl. Figur 5) $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ zwei unendlich nahe benachbarte Strahlengänge, und zwar mögen sie senkrecht von einer Fläche F ausgehen. Ist die gesamte optische Länge von A bis E mit L bezeichnet, so läßt sich beweisen, daß alle Strahlen senkrecht auf einer Fläche F' stehen, die von den Endpunkten E, E' usw. aller Strahlengänge gebildet werden, für die die gesamten optischen Längen, von ihren Anfangspunkten A, A' aus gerechnet, denselben konstanten Wert L besitzen. — Zum Beweise wollen wir uns $A'B$ und $E'D$ gezogen denken.

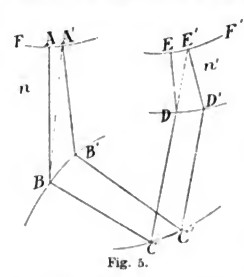


Fig. 5.

Nach dem vorigen Satze vom ausgezeichneten Lichtweg muß der gesamte Lichtweg $A'B'C'D'E'$ gleich sein dem nur unendlich wenig variierten $A'BCDE'$, d. h. gleich L, welches auch der Wert für den Lichtweg $ABCDE$ ist. Subtrahiert man nun von beiden Lichtwegen $A'BCDE'$ und $ABCDE$ die gemeinsamen Strecken, so folgt, daß sein muß:

$$n \cdot AB + n' \cdot DE = n \cdot A'B + n' \cdot DE',$$

falls mit n der Brechungsindex vor der Fläche F, mit n' der Brechungsindex vor F' bezeichnet wird. Da nun aber $AB = A'B$ ist, weil AB senkrecht gegen F gerichtet sein soll, so folgt auch

$$DE = DE',$$

d. h. DE steht senkrecht zur Fläche F'. Ebenso läßt sich für jeden anderen Strahl $D'E'$ beweisen, daß er senkrecht auf F' steht.

Strahlen, die von einem leuchtenden Punkt ausgehen, stehen senkrecht auf einer Fläche F, nämlich auf irgendeiner um den leuchtenden Punkt als Zentrum beschriebenen Kugel. Da jede Lichtquelle als ein Komplex leuchtender Punkte angesehen werden kann, so bilden also stets die Lichtstrahlen ein orthotomisches System.

Kapitel II.

Geometrische Theorie der optischen Abbildung.

1. Begriff des optischen Bildes. Wenn wir einen leuchtenden Punkt P haben, in dessen Umgebung brechende und reflektierende Körper beliebig angeordnet sind, so geht im allgemeinen durch einen beliebigen Punkt P' des Raumes nur ein einziger Lichtstrahl, d. h. die Richtung, in welcher das Licht von P nach P' gelangt, ist eine eindeutig bestimmte. Es können aber auch Punkte P' gefunden werden, in denen sich mehrere Lichtstrahlen schneiden, z. B. zwei Lichtstrahlen, wenn P' der Durchschnittspunkt zweier von P ausgehender Lichtstrahlen ist. — Wenn ein Bündel von Lichtstrahlen, die von P ausgehen, sich in einem Punkte P' schneiden, so heißt P' das optische Bild von P. In P' wird offenbar ein Maximum von Lichtwirkung stattfinden. Das Bild P' wird reell genannt, wenn die Lichtstrahlen dort wirklich zum Schnitt kommen, dagegen virtuell, falls erst die rückwärtigen Verlängerungen der Lichtstrahlen sich in P' schneiden. Das einfachste Beispiel eines virtuellen Bildes bietet die Spiegelung einer Lichtquelle P in einem ebenen Spiegel. Das Bild P' ist der symmetrisch zu P in bezug auf den Spiegel gelegene Punkt. Reelle Bilder kennzeichnen sich durch direkte Erleuchtung einer geeignet gehaltenen rauhen Fläche, z. B. Tafel weißen Papiers, virtuelle Bilder nicht. Bei der Spiegelung dringt z. B. gar kein Licht zum Bildpunkte P'. Virtuelle Bilder können aber durch optische Vorrichtungen in reelle Bilder umgewandelt werden, z. B. sehen wir ein virtuelles Bild, indem dasselbe mit Hilfe des Auges in ein reelles Bild umgewandelt wird, welches eine bestimmte Stelle der Netzhaut erleuchtet.

Das im Bilde zur Vereinigung gebrachte Strahlenbündel kann ein endliches, oder auch ein unendlich dünnes räumliches oder eventuell sogar nur ebenes (Elementar-)Bündel sein. Denken wir uns z. B. den Fall einer einzigen Brechung. Wenn die Grenzfläche des brechenden Körpers die aplanatische Fläche für die beiden Punkte P und P' ist, so wird ein endliches Strahlenbündel, welches von P ausgeht, in P' zur Vereinigung gebracht; denn alle Strahlen, die von P ausgehen und die aplanatische Fläche treffen, müssen sich in P' schneiden, da für sie alle die gesamte optische Länge denselben Wert hat.

Wenn die Grenzfläche des brechenden Körpers nicht die Gestalt der aplanatischen Fläche besitzt, so kommen um so weniger Strahlen in P' zur Vereinigung, je stärker die Abweichung in der Gestalt beider Flächen (die sich notwendig berühren müssen, cf. oben S. 12) ist. Damit ein ebenes Elementarbüschel sich in P' schneide, muß wenigstens in einer Ebene die Krümmung beider Flächen in ihrem Berührungspunkte O übereinstimmen. Stimmt die Krümmung beider Flächen in O für zwei Ebenen und damit überhaupt überein, so kommt in P' ein räumliches Elementarbündel zum Schnitt, und wenn schließlich ein endliches Stück der Grenzfläche des brechenden Körpers zusammenfällt mit der aplanatischen Fläche, so gelangt ein endliches Strahlenbündel in P' zum Schnitt.

Vermöge der Umkehrbarkeit der Lichtwege können Lichtquelle P und Bild P' ihre Funktion vertauschen, d. h. P' als Lichtquelle hat sein Bild in P. Wegen dieser Umkehrbarkeit der Beziehung nennt man auch P und P' konjugierte Punkte.

2. Allgemeine Abbildungsformeln. Wir wollen annehmen, daß es durch irgendwelche Mittel (Reflexionen und Brechungen) gelungen wäre, ein räumliches Continuum von Punkten P abzubilden in ein räumliches Continuum von Punkten P'. Ersteres Continuum heißt der Objektraum, letzteres der Bildraum. Nach der Definition, nach der das optische Bild definiert ist, folgt, daß es zu jedem[1]) durch P gehenden Strahl einen durch P' gehenden konjugierten Strahl gibt. Zwei in P sich schneidenden Strahlen des Objektraumes müssen zwei konjugierte Strahlen im Bildraum entsprechen, welche sich ebenfalls schneiden, und zwar in dem zu P konjugierten Punkte P'. Es gibt also zu jedem P nur einen konjugierten Punkt P'. Wenn vier Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$ des Objektraumes in einer Ebene liegen, so schneiden sich die Strahlen, welche je zwei dieser Punkte verbinden, z. B. der Strahl $P_1 P_2$ schneide $P_3 P_4$ im Punkte A. Die konjugierten Strahlen $P'_1 P'_2$ und $P'_3 P'_4$ schneiden sich daher ebenfalls, nämlich im Bilde A' von A. Daher liegen die vier Bilder $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$ ebenfalls in einer Ebene. — Man kann also sagen, daß sich Punkte, Strahlen und Ebenen in beiden Räumen gegenseitig eindeutig entsprechen. Eine solche Beziehung beider Räume nennt die Geometrie eine kollineare Verwandtschaft.

1) Die Abbildung soll nicht nur durch Elementarbüschel, sondern durch beliebig weite, endliche Büschel zustande kommen.

Der analytische Ausdruck der kollinearen Verwandtschaft läßt sich leicht bilden. Nennen wir xyz die Koordinaten eines Punktes P im Objektraum in bezug auf ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem, $x'y'z'$ die Koordinaten des konjugierten Punktes P' in bezug auf ein anderes, für den Bildraum angenommenes Koordinatensystem, so muß zu jedem xyz ein und zwar nur ein Wertsystem $x'y'z'$ zugehören, und umgekehrt. Dies ist nur möglich bei dem Ansatz:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{ax + by + cz + d}, \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{ax + by + cz + d}, \\ z' &= \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{ax + by + cz + d}, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei die a, b, c, d gewisse Konstanten sind. — In der Tat, für jedes x', y', z' berechnen sich nach (1) die x, y, z aus drei linearen Gleichungen; und umgekehrt gehört zu jedem x, y, z ein Wertsystem x', y', z'. Wenn die rechten Seiten der Gleichungen (1) nicht der Quotient zweier linearer Funktionen von x, y, z wären, so würden zu gegebenem x', y', z' mehrere Wertsysteme x, y, z gehören; außerdem muß der Nenner dieser Quotienten ein und dieselbe lineare Funktion sein $(ax + bz + cz + d)$, weil sonst einer Ebene:

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0$$

nicht wiederum eine Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

entsprechen würde.

Wenn man die Gleichungen (1) nach x, y, z auflöst, so folgen ganz analoge Formen wie (1), nämlich:

$$x = \frac{a'_1x' + b'_1y' + c'_1z' + d'_1}{a'x' + b'y' + c'z' + d'}, \quad \text{usw.} \tag{2}$$

Aus (1) folgt

für $ax + by + cz + d = 0$: $\quad x' = y' = z' = \infty$,

aus (2) folgt

für $a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0$: $\quad x = y = z = \infty$.

Die Ebene $ax + by + cz + d = 0$ heißt die Brennebene $\mathfrak{F}$ des Objektraumes. Ihren Punkten P entsprechen im Unendlichen liegende Bilder P'. Zwei Strahlen, die von einem Punkte P

dieser Brennebene ausgehen, entsprechen zwei Parallelstrahlen im Bildraume.

Die Ebene $a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0$ heißt die Brennebene $\mathfrak{F}'$ des Bildraumes. Parallelstrahlen des Objektraumes besitzen konjugierte Strahlen im Bildraume, die sich in einem Punkte dieser Brennebene $\mathfrak{F}'$ schneiden.

In dem Falle, daß $a = b = c = 0$ ist, entsprechen, wie aus den Gleichungen (1) hervorgeht, allemal endlichen Werten von x, y, z auch endliche Werte von x', y', z' und umgekehrt. Es ist also dann auch $a' = b' = c' = 0$. In diesem Falle, der als teleskopische Abbildung bezeichnet wird, gibt es also keine, im Endlichen liegenden Brennebenen.

3. Zentrierte Abbildung. Bei optischen Instrumenten ist vielfach der Fall realisiert, daß die Abbildung rings um die Achse symmetrisch ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn die Grenzflächen der brechenden bezw. reflektierenden Körper Rotationsflächen mit gemeinsamer Achse sind, oder spezieller Kugelflächen, deren Zentren auf einer Geraden liegen. — Diese Abbildung wird zentrierte genannt.

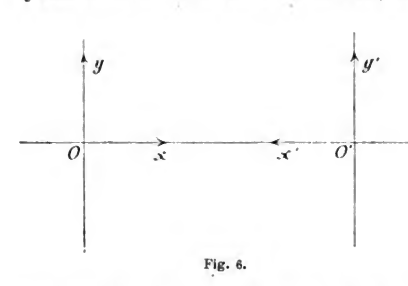


Fig. 6.

Nach Symmetrie muß das Bild P' eines Punktes P in der durch die Achse des Systems und durch den Punkt P gehenden (Meridian-)Ebene liegen, und es genügt zum Studium der Abbildung vollkommen, wenn die Beziehungen zwischen Objekt und Bild in einer solchen Meridianebene bekannt sind.

Wählen wir als solche die xy-Ebene des Objektraumes und die $x'y'$-Ebene des Bildraumes, und legen wir die x-Achse bezw. x'-Achse in die Symmetrieachse der Abbildung, so können die z- bezw. z'-Koordinaten in den Abbildungsgleichungen gar nicht mehr auftreten, so daß sie sich reduzieren auf:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + d_1}{ax + by + d}, \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + d_2}{ax + by + d}. \tag{3}$$

Die beiden Koordinatensysteme xy und $x'y'$ haben dann also

parallel gerichtete Koordinatenachsen, und zwar fällt die x-Achse und die x'-Achse zusammen. Der Koordinatenanfang O' für den Bildraum kann aber eine gewisse Distanz von dem Koordinatenanfang O des Objektraumes haben. Die positive Richtung von x soll sich im Sinne der einfallenden Lichtstrahlen (von links nach rechts) erstrecken, die positive Richtung von x' dagegen entgegengesetzt, d. h. von rechts nach links. Die positiven y und y' sollen nach oben gerechnet sein (vgl. Figur 6).

Nach der Symmetrie der Abbildung darf nun x' seinen Wert nicht ändern, falls y sein Vorzeichen ändert. Dies gibt für die Gleichungen (3) die Bedingung $b_1 = b = 0$. Ebenso folgt aus der Symmetrie der Abbildung, daß y' einfach sein Vorzeichen wechselt, falls es y tut. Dies gibt die Bedingung $a_2 = d_2 = 0$. Die Gleichungen (3) reduzieren sich daher auf:

$$x' = \frac{a_1 x + d_1}{ax + d}, \quad y' = \frac{b_2 y}{ax + d} \tag{4}$$

Es bleiben also fünf Konstanten übrig, aber nur ihre gegenseitigen Verhältnisse sind für die Abbildung maßgebend. **Eine zentrierte Abbildung hat also im allgemeinen vier charakteristische Konstanten.**

Die Umkehrung der Gleichungen (4) liefert:

$$x = \frac{dx' - d_1}{a_1 - ax'}, \quad y = \frac{a_1 d - a d_1}{b_2} \cdot \frac{y'}{a_1 - ax'}. \tag{5}$$

Die Brennebene $\mathfrak{F}$ des Objektraumes hat die Gleichung $ax + d = 0$, die Brennebene $\mathfrak{F}'$ des Bildraumes die Gleichung $ax' - a_1 = 0$. Die Durchschnitte mit der Achse des Systems werden die **Brennpunkte** F, F' genannt.

Legen wir den Anfang der x in den Brennpunkt F des Objektraumes, ebenso den Anfang der x' in den Brennpunkt F' des Bildraumes, so ist, falls x_0, x_0' die von den Brennebenen aus gerechneten Koordinaten bedeuten, ax_0 für $ax + d$ zu schreiben, und $-ax_0'$ für $a_1 - ax'$.

Aus den Gleichungen (4) gewinnt man dann:

$$x_0 x_0' = \frac{ad_1 - a_1 d}{a^2}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{b_2}{ax_0}. \tag{6}$$

Es bleiben also nur noch zwei charakteristische Konstantenkombinationen in den Gleichungen übrig. (Die anderen beiden Konstanten sind in der Lage der beiden Brennebenen enthalten.) Wir wollen für diese beiden Konstantenkombinationen vereinfachte

Beziehungen einführen, indem wir schreiben (es werden jetzt wieder die Indices o an den x fortgelassen):

$$xx' = ff', \quad \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}. \tag{7}$$

Hierbei sind also die x bezw. x' die Entfernungen des Objektes bezw. Bildes von den Brennebenen $\mathfrak{F}$ bezw. $\mathfrak{F}'$.

Das Verhältnis $y' : y$ wird die Lateralvergrößerung genannt, oder auch die Vergrößerung schlechthin. Dieselbe ist gleich 1 für $x = f$, d. h. $x' = f'$. Hierdurch sind zwei zur Achse des Systems senkrecht liegende Ebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ charakterisiert, welche die Hauptebenen der Abbildung genannt werden. Die Durchschnitte mit der Achse des Systems heißen die Hauptpunkte H, H'.

Die Hauptebenen haben also die Eigenschaft, daß irgend einem Punkte P in der einen Hauptebene ein achsenäquidistanter Punkt P' in der anderen Hauptebene konjugiert ist.

Die beiden, in den Abbildungsgleichungen (7) noch übrigbleibenden Konstanten f und f' haben nach dem Vorigen die Bedeutung der Entfernung der Hauptebenen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ von den Brennebenen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$. Die Konstante f heißt die Brennweite des Objektraumes, f' die Brennweite des Bildraumes. f ist positiv gerechnet, wenn die Lichtstrahlen zuerst die Brennebene $\mathfrak{F}$, dann die Hauptebene $\mathfrak{H}$ treffen; bei f' ist es umgekehrt. In Figur 7 sind beide Brennweiten positiv.

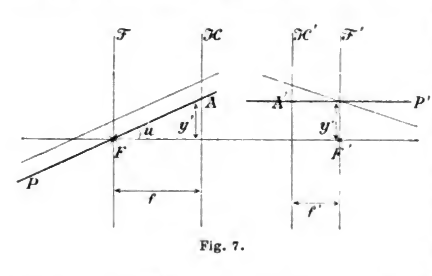


Fig. 7.

Die Bedeutung der Brennweiten kann man sich in folgender Weise klar machen: Parallelstrahlen im Objektraum müssen konjugierte Strahlen im Bildraume besitzen, die sich in einem Punkte der Höhe y' in der Brennebene $\mathfrak{F}'$ schneiden mögen. Diese Höhe y' hängt nun offenbar von dem Neigungswinkel u der einfallenden Strahlen gegen die Achse ab. Ist der Winkel $u = 0$, so folgt schon aus Symmetrie $y' = 0$, d. h. achsenparallele Strahlen haben kon-

jugierte Strahlen, die sich im Brennpunkt F' vereinigen. Wenn dagegen u von Null verschieden ist, so betrachten wir einen Strahl PFA (Figur 7) des Bündels, der durch den ersten Brennpunkt geht und die Hauptebene $\mathfrak{H}$ in A schneidet. Der konjugierte Strahl zu ihm: $A'P'$ muß offenbar ein achsenparalleler Strahl sein, da der erste Strahl durch F geht, ferner hat A' die gleiche Höhe wie A, wegen der Eigenschaft der Hauptebenen. Folglich ist die gesuchte Höhe y' des Bildes der unter dem Winkel u einfallenden Parallelstrahlen, wie aus Figur 7 sofort hervorgeht:

$$y' = f \cdot tg u. \tag{8}$$

Man kann deshalb den Satz aussprechen: Die Brennweite des Objektraumes ist gleich dem Verhältnis der linearen Größe eines in der Brennebene des Bildraumes gelegenen Bildes zur scheinbaren (angularen) Größe seines unendlich entfernten Objektes. Eine analoge Definition gilt natürlich auch für die Brennweite f' des Bildraumes, wenn man sich nämlich ein schiefes Parallelstrahlbündel in ihm einfallend denkt, so daß es zu einem Bilde in der Brennebene $\mathfrak{F}$ vereinigt wird.

Wenn man sich in Figur 7 $A'P'$ als einfallenden Strahl denkt, so daß die Rolle von Bildraum und Objektraum vertauscht wird, so kann man auch folgende Definition der Brennweite f, die dann also die Brennweite des Bildraumes bedeutet, aussprechen:

Die Brennweite des Bildraumes ist gleich der Entfernung eines achsenparallelen Strahles des Objektraumes von der Achse, dividiert durch die Tangente des Neigungswinkels des konjugierten Strahles.

Zu denselben Folgerungen, nämlich der Gleichung (8), gelangt man natürlich von den Gleichungen (7) durch Rechnung, indem man $tg u = y : x$, $tg u' = y' : x'$ setzt. — Wegen der entgegengesetzten Richtung der x und x' (vgl. oben S. 19), der gleichen Richtung der y und y', ergibt sich, daß u und u' in verschiedener Weise positiv gerechnet sind: Der Neigungswinkel u eines Strahles im Objektraum ist positiv (und kleiner als 90^0), falls der Strahl von links unten nach rechts oben geht; der Neigungswinkel u' eines Strahles des Bildraumes ist positiv, falls der Strahl von links oben nach rechts unten geht.

Die Lateralvergrößerung hängt, wie Gleichung (7) lehrt, von x, d. h. der Entfernung des Objektes vom Brennpunkte F, sowie

von der Brennweite f ab. Sie ist aber unabhängig von y, d. h. eine zur Achse des Systems senkrechte Figur wird **ähnlich** abgebildet. Dagegen wird ein Raumteil nicht mehr ähnlich abgebildet, wie schon einerseits aus der Abhängigkeit der Lateralvergrößerung von x hervorgeht, andererseits kann man leicht aus (7) ableiten, daß die **Tiefenvergrößerung**, d. h. das Verhältnis eines Zuwachses dx' von x' zu einem Zuwachse dx von x proportional dem **Quadrat** der Lateralvergrößerung ist.

Ein Strahl im Objektraum möge die Hauptebene $\mathfrak{H}$ in A, die Achse in P schneiden (vgl. Figur 8).

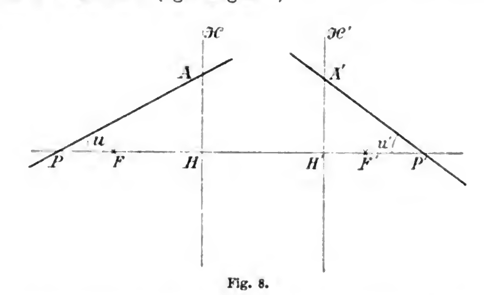


Fig. 8.

Sein Neigungswinkel u gegen die Achse folgt aus

$$tg\,u = \frac{AH}{PH} = \frac{AH}{f - x},$$

falls x die Entfernung des P von F mit richtigem Vorzeichen bedeutet.

Der Neigungswinkel u' des konjugierten Strahles gegen die Achse bestimmt sich aus

$$tg\,u' = \frac{A'H'}{P'H'} = \frac{A'H'}{f' - x'},$$

falls x' die Entfernung des P' und F' bedeutet, und P' der konjugierte Punkt zu P, A' der zu A ist. Wegen der Eigenschaft der Hauptebenen ist $AH = A'H'$, durch Division der beiden letzten Gleichungen folgt also mit Berücksichtigung von (7):

$$\frac{tg\,u'}{tg\,u} = \frac{f - x}{f' - x'} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'}. \tag{9}$$

Das Verhältnis der Tangenten der Neigungswinkel konjugierter Strahlen wird **Konvergenzverhältnis** oder **Angular-**

vergrößerung genannt. Dasselbe ist also gemäß der Gleichung (9) von u oder u' unabhängig.

Die Angularvergrößerung wird $= -1$ für $x = f'$, oder $x' = f$. Die beiden hierdurch bestimmten (konjugierten) Punkte K und K' heißen die Knotenpunkte des Systems. Sie haben die Eigenschaft, daß einem Strahl durch den einen Knotenpunkt K ein paralleler Strahl durch den anderen Knotenpunkt K' konjugiert ist. — Die Lage der Knotenpunkte K, K' bei positiven Brennweiten f und f' ist in der Figur (9) gezeichnet. KA, $K'A'$ sind zwei konjugierte Strahlen. Es folgt aus der Figur, daß

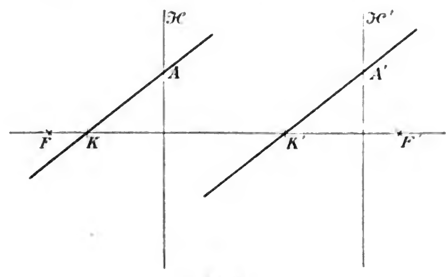


Fig. 9.

die beiden Knotenpunkte dieselbe Entfernung voneinander besitzen wie die beiden Hauptpunkte. — Falls $f = f'$ ist, fallen die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen.

Durch Multiplikation der zweiten der Gleichungen (7) mit (9) leitet man ab:

$$\frac{y' \operatorname{tg} u'}{y \operatorname{tg} u} = -\frac{f}{f'}. \tag{10}$$

Nennt man e die Entfernung eines Objektes P von der Hauptebene $\mathfrak{H}$, ebenso e' die Entfernung seines Bildes P' von der Hauptebene $\mathfrak{H}'$, wobei e und e' positiv gerechnet werden sollen, wenn P vor (links von) $\mathfrak{H}$, und P' hinter (rechts von) $\mathfrak{H}'$ liegt, so ist

$$e = f - x, \quad e' = f' - x'.$$

Daher liefert die erste der Gleichungen (7):

$$\frac{f}{e} + \frac{f'}{e'} = 1. \tag{11}$$

Dieselbe Gleichung gilt, falls e und e' die Entfernungen des P und P' von zwei beliebigen konjugierten Ebenen, die senkrecht

zur Achse stehen, bedeutet und f und f' die Entfernungen der Brennpunkte von diesen Ebenen. Das Resultat ist leicht aus (7) abzuleiten.

4. Konstruktionen konjugierter Punkte. Die Formel (11) erlaubt eine bequeme graphische Konstruktion (Figur 10). Wenn $ABCD$ ein Rechteck mit den Seiten f und f' ist, so schneidet jede Grade ECE' den rechten Winkel in zwei Distanzen $AE = e$, $AE' = e'$, welche der Gleichung (11) genügen. Man beweist dies leicht, wenn man daran denkt, daß Gl. (11) von der bekannten Form der geraden Linie $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ist.

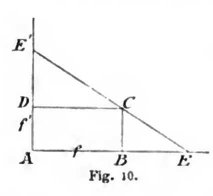


Fig. 10.

Man kann auch in anderer Weise verfahren, um zu P den konjugierten Punkt P' zu finden, indem man die Hauptebenen und Brennpunkte benutzt. Man ziehe (vgl. Figur 11) von P einen achsenparallelen Strahl PA, und einen durch den Brennpunkt F gehenden Strahl PF. Zu PA ist $A'F'$ konjugiert, wobei A' dieselbe Höhe wie A hat, zu PFB ist ein achsenparalleler Strahl $P'B'$ konjugiert, wobei B und B' gleiche Höhe haben. Der Schnittpunkt P' beider Strahlen ist der gesuchte konjugierte Punkt zu P. — Man könnte auch die Knotenpunkte bequem zur Konstruktion heranziehen.

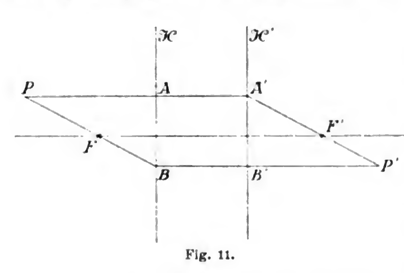


Fig. 11.

Die in Figur 11 benutzte Konstruktion versagt in dem Falle, daß P und P' auf der Achse liegen. Ein von P ausgehender Strahl möge die Brennebene $\mathfrak{F}$ in der Höhe g, die Hauptebene $\mathfrak{H}$ in der Höhe h schneiden (vgl. Figur 12). Der konjugierte Strahl schneide $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{F}'$ in den Höhen $h' = h$ und g'. Aus der Figur folgt, daß

$$\frac{g}{h} = \frac{PF}{f + PF} = \frac{-x}{f - x}, \quad \frac{g'}{h} = \frac{P'F'}{f' + P'F'} = \frac{-x'}{f' - x'};$$

durch Addition folgt:

$$\frac{g + g'}{h} = \frac{2xx' - fx' - f'x}{ff' + xx' - fx' - f'x} = 1, \tag{12}$$

da nach Gleichung (7) $xx' = ff'$ ist. P' ist also dadurch zu finden, daß man die Höhe $g' = h - g$ in der Brennebene $\mathfrak{F}'$ abträgt und die Endpunkte der Strecken $h' = h$ in $\mathfrak{H}'$ und g' in $\mathfrak{F}'$ durch eine Linie verbindet. g und g' sind negativ zu nehmen, falls sie unter der Achse liegen.

5. Charakterisierung der verschiedenen Gattungen von Abbildungen. Die verschiedenen Gattungen von Abbildungen können nur durch die Vorzeichen der Brennweiten f und f' voneinander verschieden sein.

Haben beide Brennweiten dasselbe Vorzeichen, so ist die Abbildung eine rechtläufige, d. h. wenn das Objekt von

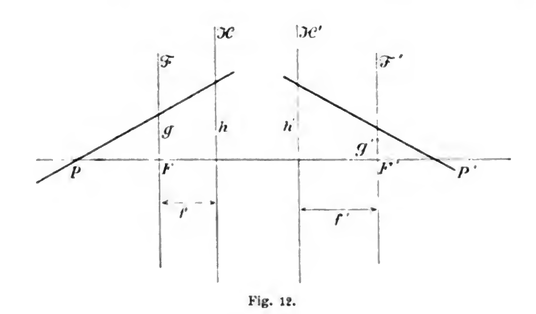


Fig. 12.

links nach rechts rückt (d. h. x größer wird), so rückt das Bild in gleichem Sinne, d. h. auch von links nach rechts (x wird kleiner). Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung (7) und dem Sinne, in welchem x bezw. x' positiv gerechnet sind (vgl. oben S. 19). Wir werden später sehen, daß diese Art Abbildung vorliegt, falls sie nur durch Brechungen oder eine gerade Zahl von Reflexionen oder eine Kombination beider zustande kommt. Diese Abbildung wird (weil dieselbe meist nur durch Brechungen realisiert wird), auch kurz als dioptrische bezeichnet.

Haben beide Brennweiten verschiedenes Vorzeichen, so ist die Abbildung rückläufig, d. h. wenn sich das Objekt von links nach rechts bewegt, so rückt das Bild von rechts nach links, wie aus der Formel $xx' = ff'$ hervorgeht. Dieser Fall liegt vor, wenn die Abbildung durch eine ungerade Zahl von Spiegelungen

zustande kommt oder durch Kombination von Brechungen mit solchen. Diese Abbildung wird daher auch kurz als katoptrische bezeichnet. Bei diesen Abbildungen ist der Sinn der Lichtausbreitung im Bildraum umgekehrt wie im Objektraum, so daß man diese Fälle gemeinsam zusammenfassen kann unter das Gesetz: Bei jeder Abbildung folgen die konjugierten Punkte zweier konjugierter Strahlen aufeinander im Sinne der Lichtausbreitung.

Unter den dioptrischen Abbildungen sind wiederum zu unterscheiden die mit positiven und die mit negativen Brennweiten. Erstere Abbildungen heißen kollektive, letztere dispansive; bei ersteren nämlich wird ein Parallelstrahlbündel in ein konvergentes, bei letzteren in ein divergentes abgebildet, wenn man es von der Hauptebene $\mathfrak{H}'$ des Bildraumes im Sinne der Lichtfortpflanzung weiter verfolgt. Eine Unterscheidung zwischen beiden Abbildungen, je nachdem die Brennpunkte reell oder virtuell sind, kann nicht gemacht werden, denn wir werden später sehen, daß manche dispansive Systeme (Mikroskop z. B.) reelle Brennpunkte besitzen.

Unter den katoptrischen Abbildungen sind nach gleicher Definition die mit negativer Brennweite des Bildraums als kollektive zu bezeichnen, da sich durch Reflexion der Sinn der Lichtfortpflanzung umkehrt (also nach unseren Festsetzungen von rechts nach links geht).

Es gibt daher folgende 4 Abbildungsarten:

Dioptrische	a) Kollektive:	$+f, +f'$.
	b) Dispansive:	$-f, -f'$.
Katoptrische	a) Kollektive:	$+f, -f'$.
	b) Dispansive:	$-f, +f'$.

6. Teleskopische Abbildung. Bisher ist angenommen, daß die Brennebenen im Endlichen liegen. Liegen sie in der Unendlichkeit, so liegt der Fall der teleskopischen Abbildung vor. In den Abbildungsgleichungen (4) verschwindet für diesen Fall der Koeffizient a, so daß sich dieselben bei geeigneter Wahl des Koordinatenanfangs der x reduzieren auf:

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y. \tag{13}$$

Da $x' = 0$ für $x = 0$ ist, so sieht man, daß irgend zwei konjugierte Punkte die Anfangspunkte der Zählung für x bezw. x' bilden. — Aus den Formeln (13) folgt, daß die Lateral- und Tiefenver-

größerung konstant ist, ebenso ist die Angularvergrößerung konstant; denn haben wir irgend zwei konjugierte Strahlen OP und $O'P'$, so mögen ihre Schnitte mit der Achse der Abbildung zu Koordinatenanfangspunkten dienen. Hat dann ein Punkt P des ersten Strahles die Koordinaten x, y, der konjugierte Punkt P' des konjugierten Strahles die Koordinaten x', y', so gilt für die Neigungswinkel u, u':

$$tg\,u = y : x, \quad tg\,u' = y' : x'.$$

Daher folgt vermöge der Gleichungen (13)

$$tg\,u' : tg\,u = \beta : \alpha. \tag{14}$$

α muß positiv sein bei rückläufiger (katoptrischer) Abbildung, negativ bei rechtläufiger (dioptrischer). Bei letzterer sieht man also nach (14) in Berücksichtigung des positiven Sinnes von u und u' (vgl. oben S. 21) bei positivem β aufrechte Bilder von unendlich entfernten Objekten, bei negativem β umgekehrte Bilder. Es gibt also je nach dem Vorzeichen von α und β vier verschiedenartige teleskopische Abbildungen.

Aus (14) und (13) erhält man

$$\frac{y'\,tg\,u'}{y\,tg\,u} = \frac{\beta^2}{\alpha}. \tag{15}$$

Ein Vergleich mit Formel (10) (S. 23) lehrt, daß bei der teleskopischen Abbildung beide Brennweiten (die beide unendlich groß sind) ein endliches Verhältnis besitzen. Es ist nämlich

$$\frac{f}{f'} = -\frac{\beta^2}{\alpha}. \tag{16}$$

Falls $f = f'$ ist, wie bei Fernrohren, und überhaupt bei jedem Instrument, bei dem der Brechungsindex des Objektraumes gleich dem des Bildraumes ist [vgl. dazu Kap. III, Formel (9)], so ist also $\alpha = -\beta^2$. Nach (14) ergibt sich dann

$$tg\,u' : tg\,u = -1 : \beta.$$

Man bezeichnet dies Konvergenzverhältnis (Angularvergrößerung) bei Fernrohren schlechthin als Vergrößerung Γ. Nach (13) ergibt sich

$$y : y' = -\Gamma, \tag{14}$$

d. h. beim Fernrohr ist die reziproke Lateralvergrößerung numerisch gleich der Angularvergrößerung.

7. Kombination mehrerer Abbildungen. Eine Reihenfolge mehrerer Abbildungen muß einer einzigen Abbildung äquivalent

sein. Wir wollen uns hier wiederum auf zentrierte Abbildungen beschränken. Nennt man (vgl. Figur 13) f, f' die Brennweiten der resultierenden Abbildung, f_1, f_1' die der ersten Abbildung, f_2, f_2' die der zweiten, so kann man leicht die Brennweiten und Brennpunktslagen der resultierenden Abbildung berechnen oder konstruieren, wenn man die Distanz $F_1' F_2 = \Delta$ kennt. Diese Distanz wollen wir kurz als Intervall der beiden Abbildungen 1 und 2 bezeichnen, und zwar sei dasselbe positiv, wenn F_1' links von F_2 liegt, sonst negativ.

Ein in der Höhe y einfallender achsenparalleler Strahl S (Fig. 13) wird durch die Abbildung 1 in den Strahl S_1 abgebildet, welcher

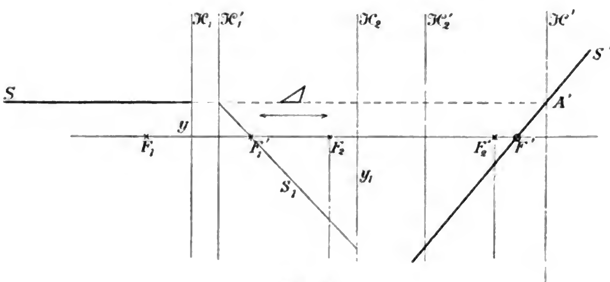


Fig. 13.

durch den Brennpunkt F_1' geht. Durch die Abbildung 2 wird S_1 in den Strahl S' abgebildet. Sein Schnittpunkt F' mit der Achse ist der Brennpunkt des Bildraumes der resultierenden Abbildung. Er bestimmt sich rechnerisch daraus, daß F_1' und F' konjugierte Punkte in bezug auf die Abbildung 2 sind, d. h. es ist

$$F_2' F' = \frac{f_2 f_2'}{\Delta}, \tag{17}$$

wobei $F_2'F'$ positiv ist, falls F' rechts von F_2' liegt; konstruktiv erhält man F' aus der oben S. 25 angeführten Konstruktion, indem die Durchschnittspunkte von S_1 und S' mit den Brennebenen $\mathfrak{F}_2$ und $\mathfrak{F}_2'$ solche Entfernungen g und g' von der Achse besitzen, daß $g + g' = y_1$ ist.

Der Durchschnittspunkt A' von S' mit S muß in der Hauptebene $\mathfrak{H}'$ des Bildraumes der resultierenden Abbildung liegen. Dadurch ist also $\mathfrak{H}'$ und infolgedessen auch die resultierende Brenn-

weite f' konstruiert, welches die Entfernung des resultierenden Brennpunktes F' von $\mathfrak{H}'$ ist. Aus der Konstruktion und der Figur folgt, daß f' bei positivem Δ negativ ist.

Rechnerisch folgt f' aus Berechnung des Neigungswinkels u' des Strahles S'. Für S_1 gilt:

$$tg\, u_1 = y : f_1',$$

und zwar ist u_1 mit entgegengesetztem Vorzeichen zu rechnen, falls S_1 als Objektstrahl für die Abbildung 2 aufgefaßt wird. Nach (9) ist nun:

$$\frac{tg\, u'}{tg\, u_1} = \frac{\Delta}{f_2'},$$

d. h. da $tg\, u_1 = -y : f_1'$ ist:

$$tg\, u' = -y \cdot \frac{\Delta}{f_1' f_2'}.$$

Da nun aber (vgl. auch den Satz der S. 21) $y : f' = tg\, u'$ ist, so folgt

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \tag{18}$$

Analog erhält man durch Betrachtung eines achsenparallelen Strahles im Bildraum und seines konjugierten Strahles im Objektraum:

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}, \tag{19}$$

und für die Entfernung des resultierenden Brennpunktes F von dem Brennpunkte F_1:

$$FF_1 = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}, \tag{20}$$

wobei FF_1 positiv ist, falls F links von F_1 liegt.

Die Gleichungen (17), (18), (19), (20) enthalten die Eigenschaften der resultierenden Abbildung, berechnet aus denen der zusammensetzenden Abbildungen.

Ganz ähnlich kann man verfahren, wenn mehr als zwei sukzessive Abbildungen vorhanden sind.

Ist das Intervall Δ zweier Systeme gleich Null, so werden die Brennweiten f und f' unendlich groß, man erhält also teleskopische Abbildung. Das Verhältnis der Brennweiten, welches endlich bleibt, folgt aus (18) und (19):

$$\frac{f}{f'} = \frac{f_1}{f_1'} \cdot \frac{f_2}{f_2'}. \tag{21}$$

Die Lateralvergrößerung $y' : y$ ergibt sich aus Betrachtung eines einfallenden achsenparallelen Strahles zu:

$$y' : y = \beta = -f_2 : f_1'. \tag{22}$$

Vermöge (21), (22) und (16) ist die Konstante α, welche die Achsenvergrößerung bedeutet [vgl. oben Formel (13)]

$$(23) \qquad \frac{x'}{x} = \alpha = -\frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}.$$

Folglich ist nach (14) die Angularvergrößerung:

$$(24) \qquad tg u' : tg u = \beta : \alpha = f_1 : f_2'.$$

Die Konstruktion oder Berechnung einer resultierenden Abbildung, wenn unter den zusammensetzenden Abbildungen eine oder mehrere teleskopische auftreten, ist etwas zu modifizieren gegenüber den bisherigen Betrachtungen. Das Resultat kann aber wiederum sofort erhalten werden, wenn man die sukzessiven Abbildungen eines einfallenden achsenparallelen Strahles konstruiert oder berechnet.

Es sei hier die Bemerkung hinzugefügt, daß Sommerfeld und Runge (Ann. d. Phys. **35**, 277, 1911) die Gesetze der geometrischen Optik in die Sprache der Vektorenrechnung übertragen und so der Anwendung dieses Kalküls ein neues Gebiet erschlossen haben.

Kapitel III.

Physikalische Herstellung der optischen Abbildung.

Im vorigen Kapitel ist nach dem Vorgang von Abbe die geometrische Theorie der optischen Abbildung, welche das physikalische Zustandekommen derselben ganz unerörtert läßt, deshalb vorangestellt, weil wir die so erhaltenen, allgemeinen Gesetze in jedem speziellen Abbildungsfalle wieder finden müssen, einerlei, welche spezielleren physikalischen Hilfsmittel zur Herstellung der Abbildung herangezogen werden. Der Begriff der Brennpunkte und Brennweiten z. B. ist also nur geknüpft an das Bestehen einer Abbildung, einerlei, ob dieselbe durch brechende Linsen oder reflektierende Spiegel oder durch andere Mittel realisiert wird.

In diesem Kapitel werden wir sehen, daß die optische Abbildung allerdings in dem idealen Sinne des vorigen Kapitels und ohne alle Beschränkungen physikalisch nicht hergestellt werden kann, es ist nämlich die Abbildung endlicher Räume durch beliebig weit geöffnete Strahlenbüschel nicht zu realisieren.

Wir haben zwar schon früher S. 15 gesehen, daß man durch Reflexion oder Brechung an einer aplanatischen Fläche die Abbildung eines Punktes durch weit geöffnete Büschel erzielen kann. Für andere Punkte ist dann aber keine Abbildung durch weit geöffnete Büschel vorhanden, da die Gestalt der aplanatischen Fläche vom Orte des Objektes abhängt. Deshalb bietet die genauere Behandlung spezieller aplanatischer Flächen kein großes physikalisches Interesse. Wir werden im folgenden nur die Herstellung der Abbildung durch brechende oder reflektierende **Kugelflächen** behandeln, da diese wegen der leichteren technischen Herstellbarkeit bei den optischen Instrumenten fast ausschließlich verwandt

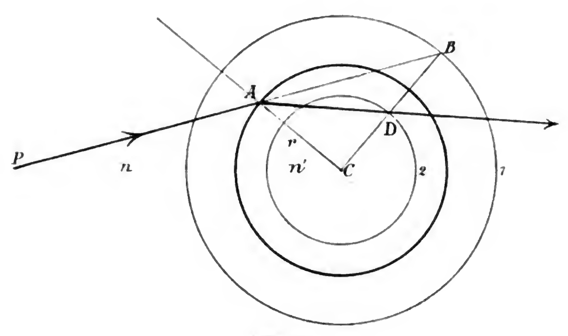


Fig. 14.

werden, und andere Gestalten der reflektierenden oder brechenden Flächen schon allein aus dem angeführten Grunde doch keine ideale optische Abbildung liefern können.

Wir werden sehen, daß man durch brechende oder reflektierende Kugelflächen optische Abbildung praktisch herstellen kann, wenn man gewisse Beschränkungen dabei zuläßt, nämlich entweder in der Größe der abgebildeten Räume, oder in der Weite der die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel.

1. Brechung an einer Kugelfläche. In einem Medium vom Brechungsindex n falle ein Strahl PA auf eine stärker brechende Kugel vom Brechungsindex n'. Der Radius der Kugel sei r, ihr Zentrum C (vgl. Figur 14). Um den gebrochenen Strahl zu finden,

konstruiere man (nach Weierstrass) um C zwei Kugeln 1 und 2 mit den Radien $r_1 = \frac{n'}{n} r$, und $r_2 = \frac{n}{n'} r$. Kugel 1 werde von PA in B getroffen; man ziehe BC, welches Kugel 2 in D schneide. Dann ist AD der gebrochene Strahl. Man kann dies leicht einsehen, da Dreieck ADC ähnlich dem Dreieck BAC ist. Denn es ist $AC : CD = BC : CA = n' : n$. Folglich ist $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ABC = \varphi'$ (Brechungswinkel), und da $\sphericalangle BAC = \varphi$ (Einfallswinkel) ist, so ist

$$\sin \varphi : \sin \varphi' = BC : AC = n' : n,$$

was nach dem Brechungsgesetz sein muß.

Wenn man so zu verschiedenen, von einem Punkte P ausgehenden Strahlen die gebrochenen konstruiert, so erkennt man schon aus der Zeichnung, daß dieselben sich nicht in einem einzigen Punkte P' schneiden; eine Abbildung durch weit geöffnete Strahlenbüschel findet also nicht statt. Aus der benutzten Konstruktion geht aber unmittelbar hervor, daß alle Strahlen PA, welche nach dem Punkte B hinzielen, sämtlich nach dem Punkte D hin gebrochen werden. Umgekehrt haben alle Strahlen, welche von D ausgehen, ihren virtuellen Vereinigungspunkt in B. Es gibt also auf jeder durch das Zentrum C einer Kugel vom Radius r gehenden Geraden zwei Punkte in den Entfernungen $r \frac{n'}{n}$ und $r \frac{n}{n'}$, welche durch alle Strahlen genau ineinander abgebildet werden, allerdings nicht zu zwei reellen Bildern. Diese Punktepaare heißen die aplanatischen Punktepaare der Kugel.

Bezeichnen wir die Neigungswinkel zweier von den aplanatischen Punkten B und D ausgehender Strahlen gegen die Achse BD mit u und u', d. h. setzen wir

$$\sphericalangle ABC = u, \ \sphericalangle ADC = u',$$

so ist, wie vorhin nachgewiesen wurde, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAC = u$. Aus Betrachtung des Dreiecks ADC folgt daher:

$$\sin u' : \sin u = AC : CD = n' : n. \qquad (1)$$

Wir haben also hier ein von u unabhängiges Verhältnis der Sinus der Neigungswinkel konjugierter Strahlen, nicht wie nach Formel (9) der S. 22 ein konstantes Verhältnis der Tangenten der Neigungswinkel. Der Unterschied beider Fälle ist darin begründet, daß früher eine Abbildung gewisser endlicher Raumteile angenommen wurde, während hier nur eine Abbildung zweier Flächen durch

weit geöffnete Büschel stattfindet. Die sämtlichen aplanatischen Punktepaare B, D bilden nämlich die beiden konzentrischen Kugelflächen 1 und 2 der Figur 14 Allerdings ist diese Abbildung der beiden Flächen auch nicht eine kollineare im früheren Sinne, denn die beiden Flächen sind nicht zwei Ebenen. Bezeichnet man die Größe zweier konjugierter Flächenstücke in ihnen mit s und s', so ist, da ihr Verhältnis gleich dem der ganzen Kugelfläche 1 und 2 sein muß:

$$s' : s = n^4 : n'^4.$$

Daher kann man die Gleichung (1) auch schreiben:

$$\sin^2 u \cdot s \cdot n^2 = \sin^2 u' \cdot s' \cdot n'^2. \tag{2}$$

Wir werden später sehen, daß diese Gleichung stets für die physikalische Abbildung zweier unendlich kleiner Flächenstücke s und s' gilt, einerlei, durch welche speziellen Anordnungen die Abbildung hergestellt ist (vgl. S. 58).

Um eine räumliche optische Abbildung durch die Brechung an einer Kugelfläche zu erhalten, müssen wir die Öffnung der die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel als sehr klein annehmen.

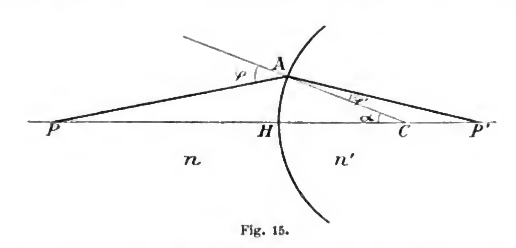


Fig. 15.

Sei (vgl. Figur 15) PA ein Strahl, welcher in AP' gebrochen wird, und sei PCP' die durch den Kugelmittelpunkt C gehende Zentrale, so folgt aus Dreieck PAC:

$$\sin \varphi : \sin \alpha = PH + r : PA,$$

aus Dreieck $P'AC$:

$$\sin \varphi' : \sin \alpha = P'H - r : P'A.$$

Durch Division folgt:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{n'}{n} = \frac{PH + r}{P'H - r} \cdot \frac{P'A}{PA}. \tag{3}$$

Setzen wir nun voraus, daß A unendlich nahe an H liege, d. h. daß $\sphericalangle APH$ sehr klein sei, so ist $PA = PH$, $P'A = P'H$ zu setzen. Bezeichnen wir diese Entfernungen mit

$$PH = e,\ P'H = e',$$

so folgt aus (3):

$$\frac{e+r}{e'-r} \cdot \frac{e'}{e} = \frac{n'}{n},$$

oder nach einigen Umformungen

$$\frac{n}{e} + \frac{n'}{e'} = \frac{n'-n}{r}. \tag{4}$$

Dabei ist r positiv gerechnet, wenn die Kugel gegen das einfallende Licht konvex ist, d. h. C rechts von H liegt; e ist positiv, falls P links von H, e' ist positiv, falls P' rechts von H liegt. Zu jedem e gehört also ein ganz bestimmtes e', unabhängig von der Lage des Strahles PA, d. h. es findet eine Abbildung eines sich nahe an die Zentrale PC anschließenden Raumteiles statt durch Strahlen, welche der Zentrale nahe bleiben.

Eine Vergleichung der Formel (4) mit der früher auf S. 23 abgeleiteten Formel (11) lehrt, daß die Brennweiten der Abbildung sind:

$$f = r\frac{n}{n'-n},\quad f' = r\frac{n'}{n'-n}, \tag{5}$$

und daß die beiden Hauptebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ zusammenfallen in die im Scheitel H der Kugelfläche errichtete Tangentialebene. Die gleichen Vorzeichen von f und f' entsprechen dem oben auf S. 25 besprochenen Merkmale der dioptrischen oder rechtläufigen Abbildung. Ist $n' > n$, so gibt eine konvexe Krümmung (positives r) eine kollektive Abbildung. Reelle Bilder ($e' > 0$) entstehen dabei, solange $e > f$ ist. Die Bilder sind dann zugleich umgekehrt.

Die Gleichung (10) der S. 23 wird:

$$\frac{y' \operatorname{tg} u'}{y \operatorname{tg} u} = -\frac{n}{n'}. \tag{6}$$

Nach früheren Festsetzungen sind die Neigungswinkel u, u' konjugierter Strahlen in verschiedenem Sinne gerechnet. Wenn sie in gleichem Sinne gerechnet werden, so wollen wir dies durch die Bezeichnung $'u$ an Stelle von u' ausdrücken. Es ist also $'u = -u'$ zu setzen. Man kann dann die letzte Gleichung schreiben:

$$n y \operatorname{tg} u = n' y' \operatorname{tg}' u. \tag{7}$$

Wir lernen durch diese Gleichung eine Größe kennen, welche

durch die Brechung nicht geändert wird, eine optische Invariante. Dieselbe bleibt daher auch konstant, wenn eine Brechung durch beliebig viele zentrierte Kugelflächen stattfindet. Bezeichnen wir in diesem Falle mit n den Brechungsindex im ersten Medium, mit n' den im letzten, so gilt also auch Gleichung (7). Da nun aber allgemein nach der früheren Gleichung (10) der S. 23 für jede Abbildung gilt

$$\frac{y' \operatorname{tg} u'}{y \operatorname{tg} u} = \frac{f}{f'}, \tag{8}$$

so gibt die Vergleichung mit (7):

$$f : f' = n : n', \tag{9}$$

d. h. bei der Abbildung durch ein System zentrierter, brechender Kugelflächen ist das Verhältnis der Brennweiten gleich dem Verhältnis der Brechungsindizes des ersten und des letzten Mediums. Wenn also z. B. diese beiden Medien Luft sind, wie es bei den Linsen, den Spiegeln und den meisten optischen Instrumenten der Fall ist, so sind beide Brennweiten einander gleich.

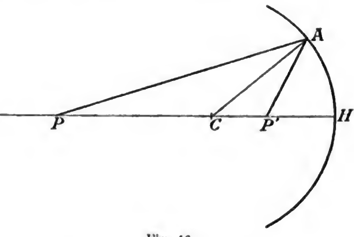
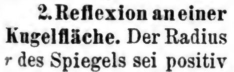


Fig. 16.



2. Reflexion an einer Kugelfläche. Der Radius r des Spiegels sei positiv für einen Konvexspiegel, negativ für einen Hohlspiegel gerechnet. Nach dem Reflexionsgesetz muß (vgl. Figur 16) $\sphericalangle PAC = \sphericalangle P'AC$ sein. Es ist also nach einem Satze der Geometrie:

$$PA : P'A = PC : P'C. \tag{10}$$

Wenn der Strahl PA beliebig große Winkel mit der Achse PC bildet, so ist der Durchschnittspunkt P' der Achse mit dem konjugierten Strahl ein variabler. Es besteht dann auch keine Abbildung des Punktes P. Wenn aber der Winkel APC so klein bleibt, daß man anstatt seines Sinus den Winkel selbst setzen kann, so gehört zu jedem P ein bestimmtes konjugiertes P', d. h. dann besteht eine Abbildung. Man kann dann nämlich $PA = PH$, $P'A = P'H$ setzen, so daß (10) übergeht in

$$PH : P'H = PC : P'C, \tag{11}$$

oder wenn man $PH = e$, $P'H = -e'$ setzt, so folgt (in der Figur ist r negativ):

$$-\frac{1}{e} + \frac{1}{e'} = \frac{2}{r}. \tag{12}$$

Ein Vergleich mit der früheren Formel (11) auf S. 23 lehrt, daß die Brennweiten der Abbildung sind:

$$f = -\frac{1}{2}r, \quad f' = +\frac{1}{2}r, \tag{13}$$

und daß die beiden Hauptebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ zusammenfallen in die im Scheitel H des Kugelspiegels errichtete Tangentialebene; die beiden Brennpunkte fallen zusammen (in die Mitte zwischen C und

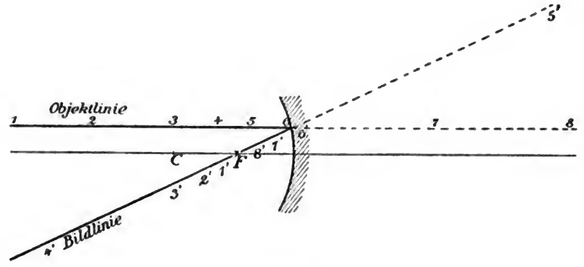


Fig. 17.

H), und die Knotenpunkte fallen auch zusammen, und zwar in das Zentrum C des Kugelspiegels. — Die Größen e und e' sind in demselben Sinne positiv gerechnet wie früher auf S. 23.

Das verschiedene Vorzeichen der Brennweiten f und f' entspricht dem oben auf S. 25 besprochenen Merkmale der katoptrischen oder rückläufigen Abbildung. Nach den Festsetzungen der S. 26 entspricht ein negatives r, d. h. ein Hohlspiegel, einer kollektiven Abbildung, dagegen ein Konvexspiegel einer dispansiven Abbildung.

Wie ein Vergleich der Formeln (13) und (5) dieses Kapitels lehrt, kann man die hier gewonnenen Resultate bei der Reflexion an einer Kugelfläche ableiten aus den früheren Resultaten für eine Brechung an derselben, falls man $n' : n = -1$ setzt. In der Tat geht ja auch für $n' : n = -1$ das Brechungsgesetz in das Reflexionsgesetz über. Von dieser Bemerkung kann man Gebrauch machen,

falls es sich um die Kombination der Abbildungen an mehreren brechenden oder spiegelnden Kugelflächen handelt. Der Satz (9) bleibt für alle diese Fälle bestehen und zeigt, daß durch Zusammensetzung der Reflexionen an einer geraden Anzahl von Kugelflächen und beliebigen Brechungen allemal ein positives Verhältnis $f : f'$, d. h. eine dioptrische oder rechtläufige Abbildung entsteht (vgl. oben S. 25).

Den Zusammenhang zwischen Bild und Objekt kann man deutlich aus der Figur 17 entnehmen. Dieselbe bezieht sich auf einen Konkav-(Hohl-)Spiegel. Die Zahlen *1, 2, 3, . . . 8* bedeuten Objektpunkte in konstanter Höhe über der Achse der Abbildung. Die Zahlen *7* und *8*, welche hinter dem Spiegel liegen, entsprechen virtuellen Objekten, d. h. die einfallenden Lichtstrahlen zielen nach diesen

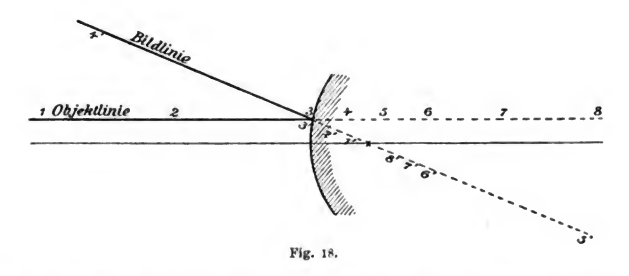


Fig. 18.

Punkten hin, kommen aber in ihnen nicht zum Schnitt, sondern treffen vorher auf den Spiegel und werden reflektiert. Das Gebiet der reellen Objekte ist in der Figur 17 durch eine ausgezogene, das der virtuellen Objekte durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Die Punkte *1', 2', 3' . . . 8'* sind die Bilder der Punkte *1, 2, 3 . . . 8*. Da letztere in einer achsenparallelen Geraden liegen, so müssen erstere in einer Geraden liegen, welche durch den Brennpunkt F geht und durch den Punkt *6*, den Schnitt des Objektstrahles mit dem Spiegel, d. h. der Hauptebene. Die ausgezogene Bildlinie bedeutet reelle Bilder, die gestrichelte virtuelle. Irgend ein Bildpunkt, z. B. *2'*, kann dadurch konstruiert werden (nach S. 24), daß man durch das Objekt *2* und den Brennpunkt F eine Gerade zieht, welche den Spiegel, d. h. die Hauptebene, in einem Punkte A_2 schneiden möge. Zieht man dann durch A_2 eine Parallele

zur Achse, so schneidet diese die vorhin konstruierte schiefe Bildlinie im gesuchten Bildpunkt $2'$.

Aus der Figur ersieht man deutlich, daß ferne Objekte sich reell und umgekehrt abbilden, daß von Objekten, die innerhalb der Brennweite vor dem Spiegel liegen, virtuelle aufrechte Bilder entstehen, und daß zu virtuellen Objekten hinter dem Spiegel reelle, aufrechte Bilder vor dem Spiegel gehören.

Für einen Konvexspiegel gibt ebenso Figur 18 die Lage von Objekt und Bild an. Man ersieht daraus, daß zu allen reellen Objekten virtuelle, aufrechte, verkleinerte Bilder gehören, daß bei virtuellen Objekten, die innerhalb der Brennweite hinter dem Spiegel liegen, reelle, aufrechte, vergrößerte Bilder entstehen; zu ferneren virtuellen Objekten gehören wieder virtuelle Bilder.

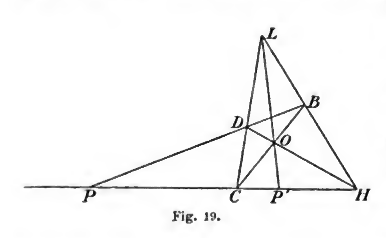


Fig. 19.

Die Gleichung (11) besagt, daß $PCP'H$ vier harmonische Punkte sind. Man kann also zu einem Objekte P sein Bild in folgender Weise nach einem Lehrsatze der synthetischen Geometrie konstruieren (vgl. Figur 19): Man ziehe von einem beliebigen Punkte L aus zwei Strahlen LC und LH, ferner ziehe man den beliebigen Strahl PDB. Der Schnittpunkt von DH mit BC sei O, dann schneidet LO die Gerade PH in dem zu P konjugierten Punkte P'. — Bei einem Konvexspiegel ist die Konstruktion ganz dieselbe, es vertauschen die beiden Punkte C und H nur ihre physikalischen Bedeutungen.

3. Linsen. Die Eigenschaften der Abbildung durch zwei zentrierte Kugelflächen (Linsen) können wir direkt aus dem § 7 des Kapitels II ableiten. Die Krümmungsradien r_1 und r_2 rechnen wir in dem früher (§ 1) festgesetzten Sinne positiv. Wir rechnen nämlich den Radius einer Kugelfläche als positiv, wenn sie konvex nach links, d. h. gegen die einfallenden Strahlen konvex ist. Wir wollen den Fall betrachten, daß die Linse den Brechungsindex n besitzt und in Luft liegt. Die Dicke der Linse, d. h. der Abstand ihrer Scheitelpunkte S_1 und S_2 (vgl. Figur 20), sei d. Wenn dann die Brennweiten für die Abbildung durch Brechung an der ersten

Grenzfläche der Linse mit f_1 und f_1', für die Abbildung an der zweiten Grenzfläche mit f_2 und f_2' bezeichnet werden, so ist das Intervall Δ beider Abbildungen (vgl. oben S. 28) gegeben durch:

$$\Delta = d - f_1' - f_2, \tag{14}$$

und nach (5) ist

$$f_1 = r_1 \frac{1}{n-1}, \quad f_1' = r_1 \frac{n}{n-1}, \quad f_2 = r_2 \frac{n}{1-n}, \quad f_2' = r_2 \frac{1}{1-n}. \tag{15}$$

Nach den Formeln (19) und (18) des Kapitels II (S. 29) werden also die resultierenden Brennweiten:

$$f = f' = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{r_1 r_2}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}, \tag{16}$$

während die Lage der beiden resultierenden Brennpunkte F und F' aus den Formeln (17) und (20) des Kapitels II (S. 28, 29) berechnet

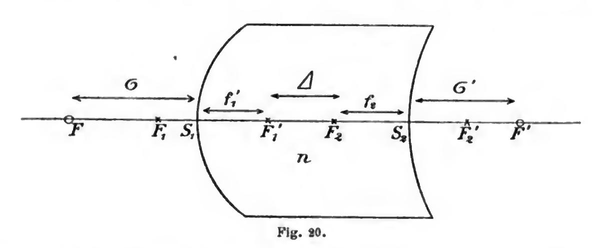


Fig. 20.

wird. Nach diesen Formeln wird die Entfernung σ des Brennpunktes F vor dem Linsenscheitel S_1 und die Entfernung σ' des Brennpunktes F' hinter dem Linsenscheitel S_2, da $\sigma = FF_1 + f_1$, $\sigma' = F_2'F' + f_2'$ ist:

$$\sigma = \frac{r_1}{n-1} \cdot \frac{d(n-1) + nr_2}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}, \tag{17}$$

$$\sigma' = \frac{r_2}{n-1} \cdot \frac{-d(n-1) + nr_1}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}. \tag{18}$$

Nennt man h die Entfernung der ersten Hauptebene $\mathfrak{H}$ von dem Linsenscheitel S_1, und h' die Entfernung der zweiten Hauptebene $\mathfrak{H}'$ hinter dem Linsenscheitel S_2, so ist $f + h = \sigma$ und $f' + h' = \sigma'$, d. h. es folgt nach (16), (17) und (18):

$$h = \frac{r_1 d}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}, \tag{19}$$

$$h' = \frac{-r_2 d}{d(n-1) - nr_1 + nr_2}, \tag{20}$$

für die Distanz p der Hauptebene $\mathfrak{H}$ vor der Hauptebene $\mathfrak{H}'$ folgt, da $p = d + h + h'$:

$$p = d\,(n-1)\,\frac{d - r_1 + r_2}{d\,(n-1) - nr_1 + nr_2}. \tag{21}$$

Die Knotenpunkte fallen in die Hauptpunkte, da $f = f'$ ist (vgl. oben S. 23).

Aus diesen Formeln geht unter anderm hervor, daß die Krümmungen r_1 und r_2 allein noch nicht den Charakter der Abbildung bestimmen, sondern daß derselbe auch wesentlich von der Dicke d der Linse bestimmt ist. So wirkt z. B. eine bikonvexe Linse (r_1 positiv, r_2 negativ) bei nicht zu großer Dicke d kollektiv, d. h. sie besitzt eine positive Brennweite, dagegen dispansiv, falls d sehr groß ist (bikonvexe Stablinse).

4. Dünne Linsen. In der Praxis tritt oft der Fall ein, daß die Dicke d der Linse so klein ist, daß man $d\,(n-1)$ vernachlässigen kann gegen $n\,(r_1 - r_2)$. Von dem Falle $r_1 = r_2$, welcher bei einer konvex-konkaven Linse mit zwei gleichen Krümmungen eintritt, wollen wir hierbei absehen. Dann werden nach (16) die Brennweiten der Linse:

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} f = f' &= \frac{-r_1 r_2}{(n-1)\,(r_1 - r_2)}, \text{ oder} \\ \frac{1}{f} &= (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \end{aligned} \right.$$

während nach (19), (20) und (21) die Hauptebenen nahe zusammenfallen mit den nahe zusammenfallenden Tangentialebenen in den Scheiteln S_1 und S_2 der Linse.

Genauer berechnet sich nach diesen Formeln, wenn man $d(n-1)$ gegen $n\,(r_1 - r_2)$ vernachlässigt:

$$h = -\frac{d}{n}\cdot\frac{r_1}{r_1 - r_2}, \quad h' = +\frac{d}{n}\cdot\frac{r_2}{r_1 - r_2}, \quad p = d\,\frac{n-1}{n}. \tag{23}$$

Der Abstand p beider Hauptebenen voneinander ist also von den Linsenkrümmungen unabhängig. Für $n = 1{,}5$ beträgt $p = \frac{1}{3}\,d$. Für bikonvexe sowohl als bikonkave Linsen liegen die Hauptebenen im Innern der Linse (da h und h' negativ sind). Bei gleichen Krümmungen ($r_1 = -r_2$) ist für $n = 1{,}5 : h = h' = -\frac{1}{3}\,d$, d. h. die Hauptebenen liegen um je $\frac{1}{3}$ der Linsendicke von der Oberfläche entfernt. — Bei gleichem Vorzeichen von r_1 und r_2 (konkav-konvexe Linsen) können die Hauptebenen außerhalb der Linse liegen.

Zu den Linsen mit positiver Brennweite (Sammellinsen) gehört die

Bikonvexlinse ($r_1 > 0$, $r_2 < 0$)
Plankonvexlinse ($r_1 > 0$, $r_2 = \infty$)
Konkav-konvexlinse ($r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_2 > r_1$),

kurz alle Linsen, welche in der Mitte dicker sind als am Rande.

Zu den Linsen mit negativer Brennweite (Zerstreuungslinsen) gehört die

Bikonkavlinse ($r_1 < 0$, $r_1 > 0$)
Plankonkavlinse ($r_1 = \infty$, $r_2 > 0$)
Konvex-konkavlinse ($r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_2 < r_1$),

d. h. alle Linsen, welche in der Mitte dünner sind als am Rande.[1])

Der Zusammenhang zwischen Bild und Objekt ergibt sich

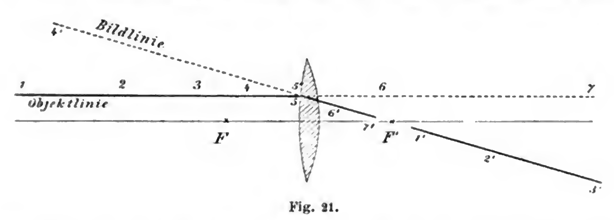


Fig. 21.

übersichtlich aus den Figuren 21 und 22, die in demselben Sinne zu verstehen sind wie die früheren Figuren 17 und 18. Aus ihnen ergibt sich, daß bei der Sammellinse reellen Objekten je nach

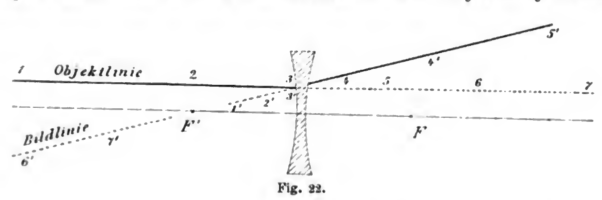


Fig. 22.

ihrer Distanz reelle oder virtuelle Bilder entsprechen, während bei der Zerstreuungslinse zu reellen Objekten nur virtuelle Bilder gehören. Reelle, aufrechte, vergrößerte Bilder entstehen durch eine

1) Die Bezeichnung: kollektive (dioptrische) Abbildung für solche mit positiven Brennweiten, dispansive für solche mit negativen Brennweiten ist

Zerstreuungslinse von virtuellen Objekten, die innerhalb der Brennweite hinter der Linse liegen.

Wenn zwei dünne Linsen der Brennweite f_1 und f_2 zentriert aufeinander gelegt werden, so ist das optische Intervall $\varDelta$ (vgl. oben S. 39) $\varDelta = -(f_1 + f_2)$. Nach Formel (19) des Kapitels II (S. 29) ist daher die resultierende Brennweite:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = f',$$

(24) oder

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Man pflegt die reziproke Brennweite einer Linse ihre Stärke zu nennen. Es besteht also der Satz: Die Stärke einer Kombination mehrerer aufeinandergelegter dünner Linsen ist gleich der Summe der Stärken der einzelnen Linsen.

5. Experimentelle Bestimmung der Brennweite. Bei dünnen Linsen, bei denen man die beiden Hauptebenen als praktisch zusammenfallend ansehen kann, genügt die Bestimmung der Orte eines Objektes und seines Bildes, um die Brennweite daraus herzuleiten, z. B. nach Formel (11) des II. Kapitels, S. 23, die sich hier, da $f = f'$ ist, vereinfacht zu

(25) $$\frac{1}{e} + \frac{1}{e'} = \frac{1}{f}.$$

Da die Orte reeller Bilder durch Auffangen auf einem Schirm besonders bequem zu bestimmen sind, so kombiniert man Konkavlinsen, die bei reellen Objekten nur virtuelle Bilder liefern, mit einer Konvexlinse gemessener Stärke, so daß die Kombination reelle Bilder liefert. Nach (24) ist dann leicht die Brennweite der Konkavlinse zu erhalten, wenn man die resultierende Brennweite f der Kombination experimentell ermittelt.

Dieses Verfahren ist nicht mehr statthaft bei dicken Linsen und überhaupt beliebigen optischen Systemen. Die Lage der Brennpunkte ist leicht zu ermitteln, falls man Parallelbüschel

---

dieser Eigenschaft der Linsen entnommen: eine Linse mit positiver Brennweite macht ein auffallendes Lichtbündel konvergenter, eine Linse mit negativer Brennweite macht es divergenter. Bei Abbildungen, die durch ein System von Linsen entstehen, und bei denen die Hauptebenen nicht zusammenfallen mit z. B. der ersten brechenden Fläche, ist der Unterschied zwischen kollektiven und dispansiven Systemen nicht so direkt zu konstruieren. Man muß dann nach S. 26 definieren.

einfallen läßt. Bestimmt man nun den Ort eines Objektes und seines Bildes in bezug auf die Brennpunkte, so ergeben sich nach den Formeln (7) auf S. 20 und (9) auf S. 22 sofort die Brennweiten. — Auf die im II. Kapitel S. 21 gegebene Definition der Brennweite [vgl. die dortige Formel (8)]

$$f = y' : tg\,u \tag{26}$$

kann man leicht ein strenges Verfahren zur Ermittelung der Brennweite gründen, indem man die angulare Größe $tg\,u$ eines unendlich entfernten Objektes mißt und die lineare Größe seines Bildes y'. Dies ist besonders bequem auszuführen bei Objektiven von Fernrohren, die über einem Teilkreise drehbar sind, da man dann an ihm sofort den Sehwinkel $tg\,u$ ablesen kann.

Ist das Objekt der Größe y nicht unendlich entfernt, sondern hat den Abstand e von der Hauptebene $\mathfrak{H}$, während sein Bild der Größe y' den Abstand e' von der Hauptebene $\mathfrak{H}'$ hat, so ist

$$y' : y = -e' : e, \tag{27}$$

da, falls $f = f'$ ist, die Knotenpunkte in die Hauptpunkte fallen, d. h. Objekt und Bild von den Hauptpunkten aus unter gleichen Winkeln erscheinen.

Eliminiert man e' oder e aus (25) und (27), so folgt

$$f = \frac{e}{1 - \frac{y}{y'}} = \frac{e'}{1 - \frac{y'}{y}}. \tag{28}$$

Entweder wählt man nun e sehr groß, oder e'. In beiden Fällen kann man dann ohne merklichen Fehler e bezw. e' gleich der Entfernung vom optischen System (z. B. Linse) setzen, falls wenigstens nicht die Hauptebenen desselben sehr weit von ihm entfernt liegen. Man kann also dann eine der beiden Formeln (28) zur Bestimmung der Brennweite f benutzen, wenn man e bezw. e' und die Vergrößerung $y' : y$ mißt.

Man umgeht die Bestimmung des Objekt- oder Bildortes, wenn man die Vergrößerung für zwei Objektlagen bestimmt, welche eine gemessene Distanz l voneinander besitzen. Denn nach (7) S. 20 ist

$$\left(\frac{y}{y'}\right)_1 = \frac{x}{f}, \quad \left(\frac{y}{y'}\right)_2 = \frac{x+l}{f},$$

daher (29)

$$f = \frac{l}{\left(\frac{y}{y'}\right)_2 - \left(\frac{y}{y'}\right)_1}.$$

Dabei bedeutet $(y:y')_1$ die reziproke Vergrößerung bei der Lage x des Objektes, $(y:y')_2$ die reziproke Vergrößerung bei der Lage $x+l$ des Objektes. l ist positiv, falls in der zweiten Lage das Objekt im Sinne des einfallenden Lichtes um die Strecke l verschoben ist (d. h. von links nach rechts).

Auf dieser Methode beruht das Fokometer von Abbe, mit Hilfe dessen man namentlich die Brennweiten von Mikroskopobjektiven bestimmen kann. Zur Messung der Bildgrößen y' dient ein Hilfsmikroskop. Mit einem solchen (bezw. einer einfachen Lupe) können natürlich ebensowohl von reellen, wie von virtuellen Bildern ihre Größen gemessen werden, so daß diese Methoden z. B. auch für dispansive Linsen, d. h. überhaupt allgemein anwendbar sind.[1])

6. Astigmatische Abbildung. In unseren früheren Betrachtungen haben wir gesehen, daß durch zentrierte Kugelflächen eine Abbildung vermittelt wird durch Elementar- (d. h. unendlich enge) Büschel, deren Strahlen nur eine geringe Neigung zur Achse haben und die von Punkten der Achse oder ihrer unmittelbaren Nachbarschaft ausgehen. In diesem Falle schneiden sich die sämtlichen Strahlen des Büschels im Bildraum in einem Punkte (dem Bilde), oder, wie man kurz sagt, die Strahlenbüschel sind auch im Bildraume homozentrisch. Wir wollen nun einmal prüfen, was eintritt, wenn man eine der gemachten Beschränkungen fallen läßt, d. h. wenn ein beliebig schiefes Elementarbüschel von einem Punkte P ausgeht.

Im allgemeinen ist dann das Bildbüschel nicht mehr homozentrisch. Die Konstitution eines Elementarbüschels, welches von einem Lichtpunkte P ausgegangen ist und Reflexionen und Brechungen an irgend welchen, beliebig gestalteten Flächen erfahren hat, charakterisiert sich durch den oben auf S. 13 besprochenen Satz von Malus als ein orthotomisches Strahlenbündel, d. h. dasselbe läßt sich als die Normalen N auf einem gewissen Flächenstück Σ auffassen. Dieselben schneiden sich nun im allgemeinen nicht in einem Punkte. Wie aber die Geometrie lehrt, gibt es auf jeder Fläche Σ zwei sich rechtwinklig schneidende Kurvenscharen (die sogenannten Krümmungslinien), deren Normalen, die zugleich senkrecht auf der Fläche Σ stehen, sich schneiden.

1) Näheres über das Fokometer und über die Brennweitenbestimmung überhaupt findet man in Winkelmann, Handbuch der Physik, 2. Auflage, Optik, S. 439ff (Autor Czapski).

Wenn man also ein **ebenes** Elementarbüschel ins Auge faßt, und zwar ein solches, dessen Bildstrahlen die Normalen eines Stückes l_1 einer Krümmungslinie sind, so wird durch dasselbe eine optische Abbildung vermittelt. Der Ort des Bildes ist der Krümmungsmittelpunkt jenes Stückes l_1 der Krümmungslinie, da sich dort die Normalen schneiden. Da jedes Stück l_1 einer Krümmungslinie senkrecht von einem Stück l_2 einer anderen Krümmungslinie geschnitten wird, so gibt es stets auch noch ein zweites ebenes Elementarbüschel, welches ebenfalls eine optische Abbildung vermittelt, aber der Bildort ist für dasselbe Objekt ein anderer, da die Krümmung von l_2 im allgemeinen verschieden ist von der von l_1.

Wie wird nun im allgemeinen die Abbildung beschaffen sein, welche ein beliebiges **räumliches** Elementarbüschel von einem Objekt P entwirft? Es seien (vgl. Figur 24) *1*, *2*, *3*, *4* die vier

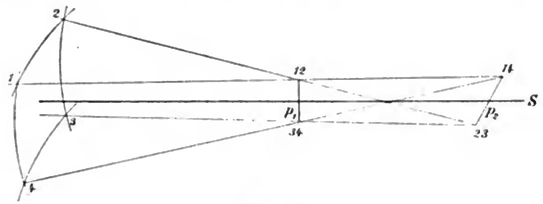


Fig. 23.

Schnittpunkte von vier benachbarten Krümmungslinien, welche ein Flächenelement $d\Sigma$ auf Σ abgrenzen. Die Krümmungslinienstücke *1—2* und *3—4* seien horizontal, die Stücke *2—3* und *1—4* vertikal. Die Normalen in *1* und *2* schneiden sich im Punkte *12*, die Normalen in *3* und *4* im Punkte *34*. Da die Krümmung der Linie *1—2* sich nur unendlich wenig unterscheidet von der Krümmung der Linie *3—4*, so liegen auch die Schnittpunkte *12* und *34* nahezu in gleichem Abstand von der Fläche Σ. Die Verbindungslinie p_1 der Punkte *12* und *34* steht daher auch nahezu senkrecht zu dem Strahl S, welcher in der Mitte von $d\Sigma$ senkrecht zu $d\Sigma$ errichtet ist, und welcher der **Hauptstrahl** des räumlichen Elementarbüschels genannt wird, das aus der Gesamtheit der Normalen auf $d\Sigma$ besteht. Die Linie p_1 muß ferner offenbar wegen der Symmetrie der Figur parallel den Krümmungslinien *2—3* oder *1—4* verlaufen, d. h. vertikal sein. Die Normalen irgendeiner horizontalen

Krümmungslinie werden sich auf einem Punkte der Linie p_1 schneiden.

Ebenso werden die Normalen irgendeiner vertikalen Krümmungslinie sich in einem Punkte der Linie p_2, der Verbindungslinie der Punkte *14* und *23*, schneiden. p_2 muß auch nahezu senkrecht zu S stehen und horizontal liegen. Diese beiden Linien p_1 und p_2, welche senkrecht aufeinander und senkrecht zum Hauptstrahl stehen, werden die beiden Brennlinien des Elementarbüschels, die durch den Hauptstrahl S und die beiden Brennlinien p_1, p_2 gelegten beiden Ebenen die Fokalebenen des Büschels genannt. Man kann also sagen, daß im allgemeinen sich ein Objektpunkt P durch ein beliebiges Elementarbüschel in zwei Brennlinien abbildet, die senkrecht aufeinander und zum Hauptstrahl stehen und einen gewissen Abstand voneinander besitzen. Dieser Abstand wird die astigmatische Differenz genannt. Erst in spezielleren Fällen, nämlich wenn die Krümmung beider Scharen von Krümmungslinien die gleiche ist, hat man es mit homozentrischer Strahlenvereinigung, d. h. mit der eigentlichen Abbildung im früheren Sinne, zu tun. Zur Unterscheidung wird die hier betrachtete allgemeinere Abbildung die astigmatische[1]) genannt.

Ein erkennbares, scharfes Bild entsteht bei einer Reihenfolge von Objektpunkten P bei astigmatischer Abbildung nicht. Nur wenn das Objekt aus einer geraden Linie besteht, kann ein ebenfalls aus einer Geraden bestehendes scharfes Bild entstehen, nämlich wenn die Objektlinie so orientiert ist, daß die Brennlinien, in die sich jeder Punkt P der Objektlinie abbildet, zur Deckung kommen. Da von jedem Punkt P zwei verschiedene, sich rechtwinklig kreuzende Brennlinien p_1, p_2 entstehen, so gibt es also zwei, ebenfalls um 90^0 verschiedene Orientierungen der Objektlinie, bei denen eine Abbildung wahrzunehmen ist. Die Bilder liegen an verschiedenen Stellen des Raumes.

Ebenso gibt es für ein System paralleler Geraden als Objekt zwei Orientierungen, bei denen eine Abbildung als parallele Gerade zustande kommt.

Ist das Objekt ein rechtwinkliges Kreuz (oder ein rechtwinkliges Kreuzgitter), so gibt es eine bestimmte Orientierung, bei der eine Abbildung der einen Linie des Kreuzes (oder des

1) Stigma wird dabei als Bezeichnung des Brennpunktes gebraucht, und astigmatisch ist also ein Strahlenbündel, welches keinen eigentlichen Brennpunkt hat.

einen Systems der Linien des Kreuzgitters) zustande kommt in einer gewissen Ebene $\mathfrak{P}_1$ des Bildraumes; in einer anderen Ebene $\mathfrak{P}_2$ des Bildraumes entsteht dann ein Bild der anderen Linie des Kreuzes (oder des anderen Systems der Linien des Kreuzgitters). Diese Erscheinung ist ein gutes Erkennungszeichen von vorhandenem Astigmatismus.

Astigmatische Abbildung muß im allgemeinen eintreten, wenn die brechende oder spiegelnde Fläche zwei verschiedene Krümmungen besitzt. So bieten z. B. Zylinderlinsen deutlich die Erscheinung des Astigmatismus. Aber auch ein auf eine Kugelfläche schief auftreffendes, homozentrisches Elementarbüschel muß nach der Brechung oder Reflexion zu einem astigmatischen werden.

Wir wollen diesen Fall einer näheren Berechnung unterziehen. In der Ebene der Zeichnung (Figur 24) möge der Objektpunkt P, das Kugelzentrum C und der Punkt A der Kugelfläche liegen, in welchem sie vom Hauptstrahl (d. h. dem mittleren Strahl) des von P ausgehenden Elementarbüschels getroffen wird. Die Strecke PA

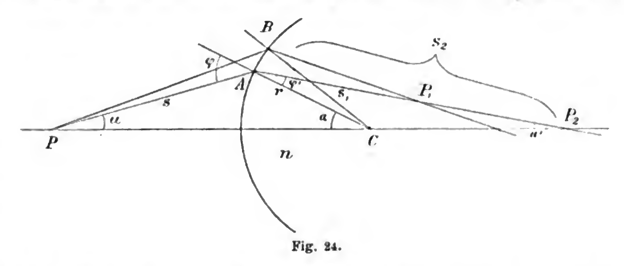


Fig. 24.

möge mit s, die Strecke AP_2 mit s_2 bezeichnet werden. Da nun ist:

$$\text{Dreieck } PAP_2 = \text{Dreieck } PAC + \text{Dreieck } CAP_2,$$

so folgt:

$$s\,s_2 \sin(\varphi - \varphi') = s\,r \sin\varphi + s_2\,r \sin\varphi',$$

falls φ und φ' Einfalls- bezw. Brechungswinkel bedeuten, während r der Kugelradius ist. Da nun nach dem Brechungsgesetz $\sin\varphi = n \cdot \sin\varphi'$, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$s\,s_2\,(n\cos\varphi' - \cos\varphi) = s\,r\,n + s_2 r, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s_2} = \frac{n\cos\varphi' - \cos\varphi}{r}. \qquad (30)$$

In demselben Punkte P_2 müssen offenbar alle diejenigen von P ausgehenden Strahlen nach der Brechung die Achse treffen, welche gleichen Neigungswinkel u mit derselben besitzen. Diese Strahlen werden ein Sagittalbüschel genannt. Dasselbe hat also den Bildpunkt P_2.

Dagegen wird ein elementares Meridionalbüschel, dessen Strahlen sämtlich in der Ebene PAC liegen, einen anderen Bildpunkt P_1 besitzen. Sei PB ein dem Strahl PA benachbarter Strahl, welcher den Neigungswinkel $u + du$ gegen die Achse besitze und der in die Richtung PP_1 gebrochen werde. Dann ist $\sphericalangle BP_1A$ als Inkrement du' von u' zu bezeichnen, und $\sphericalangle BCA$ als Inkrement da. Es ergibt sich nun sofort:

$$s \cdot du = AB \cos\varphi, \quad s_1 \cdot du' = AB \cdot \cos\varphi', \quad r \cdot da = AB. \tag{31}$$

Da nun ferner ist

$$\varphi = a + u, \quad \varphi' = a - u,$$

so folgt mit Rücksicht auf (31):

$$\begin{aligned} d\varphi &= da + du = AB\left(\frac{1}{r} + \frac{\cos\varphi}{s}\right), \\ d\varphi' &= da - du' = AB\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos\varphi'}{s_1}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Aus dem Brechungsgesetz $\sin\varphi = n \sin\varphi'$ folgt aber durch Differentiation:

$$\cos\varphi \cdot d\varphi = n \cos\varphi' \cdot d\varphi'.$$

Setzen wir hierin für $d\varphi$ und $d\varphi'$ die aus (32) folgenden Werte, so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{\cos^2\varphi}{s} + \frac{n\cos^2\varphi'}{s_1} = \frac{n\cos\varphi' - \cos\varphi}{r}. \tag{33}$$

Aus (33) und (30) ergeben sich verschiedene Werte s_1 und s_2, die zu gleichem s gehören, d. h. P wird astigmatisch abgebildet. Die astigmatische Differenz wird um so bedeutender, je schiefer das Büschel einfällt, d. h. je größer φ ist. — Die astigmatische Differenz verschwindet nur, d. h. es ist $s_1 = s_2 = s'$, falls $s = -ns'$ ist, wie aus (30) und (33) hervorgeht. Diese Bedingung führt auf die beiden, oben S. 32 erwähnten aplanatischen Punkte der Kugel.

Der Fall einer reflektierenden Kugelfläche leitet sich nach der oben S. 36 gemachten Bemerkung aus den Formeln (30) und (33) dadurch ab, daß man $n = -1$, d. h. $\varphi' = -\varphi$ setzt. Es ergibt sich demnach für einen Kugelspiegel[1]):

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s_2} = -2\frac{\cos\varphi}{r}, \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s_1} = -\frac{2}{r\cos\varphi}. \tag{34}$$

---

1) Für einen Konvexspiegel ist r positiv, für einen Konkavspiegel r negativ.

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} = \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi\right),$$

oder

$$\frac{s_2 - s_1}{s_1 s_2} = \frac{2}{r} \sin\varphi \; tg\,\varphi. \tag{35}$$

Man erkennt hieran deutlich, in welchem Maße der Astigmatismus mit dem Einfallswinkel wächst, und zwar ist dies in so hohem Maße der Fall, daß man mit geeigneten Mitteln an einem Flüssigkeitsniveau, etwa einem Quecksilberspiegel, den durch die Krümmung der Erde verursachten Astigmatismus der an ihm reflektierten Büschel noch bemerken könnte.[1]) Betrachtet man nämlich das Spiegelbild eines sehr weit befindlichen Kreuzgitters mittels eines Fernrohrs von 7,5 m Brennweite (Öffnung etwa $^1/_2$ m), so ist die astigmatische Differenz gleich 0,1 mm, d. h. es sind die Orte, wo das eine oder das andere System von Gitterstäben deutlich ist, um $^1/_{10}$ mm voneinander getrennt. Wendete man aber gar das Riesenfernrohr des Lick-Observatoriums in Kalifornien zur Beobachtung an, so würde jene Differenz bis auf 0,7 mm steigen. — Die Erscheinung des Astigmatismus läßt sich also gut dazu verwenden, um Spiegel auf ihre Ebenheit zu prüfen. Anstatt der Differenz der Bildorte eines Kreuzgitters, das man möglichst streifend im Spiegel reflektieren läßt, kann man auch die verschiedene Schärfe der Bilder der Kreuzgitterlinien als Kriterium verwenden. Man verwendet zu dem Zwecke passend gestrichelte Linien im Kreuzgitter.

7. Die Erweiterung der Abbildungsgrenzen. Im Vorangegangenen haben wir gesehen, daß durch Brechung oder Reflexion an zentrierten Kugelflächen nur die Abbildung eines nahe der Achse anliegenden fadenförmigen Raumes durch räumliche Elementarbüschel von geringer Neigung gegen die Achse erzeugt werden kann. Sind die Elementarbüschel stärker geneigt gegen die Achse, so muß man, wie im letzten Paragraphen gezeigt wurde, sich sogar auf ebene Büschel beschränken, falls man noch Abbildung erhalten will.

Diese bisher betrachtete physikalische Herstellung der Abbildung wäre nun praktisch sehr unbrauchbar. Denn nicht nur würden die Bilder sehr lichtschwach sein, wenn sie durch Elemen-

1) Der Versuch stieße praktisch wegen des beständigen Zitterns der Quecksilberoberfläche auf große Schwierigkeiten, läge aber, besonders bei Anwendung zweier in größerem Abstand befindlicher Quecksilberspiegel, wohl im Bereiche technischer Ausführbarkeit.

tarbüschel erzeugt werden, sondern aus der physikalischen Theorie des Lichtes ergibt sich auch, daß (wegen der Beugung des Lichtes vgl. I. Abschnitt, Kapitel IV) Elementarbüschel nie scharfe Bilder erzeugen können, sondern stets nur Beugungsscheibchen.

Wir müssen uns also notwendig nach Mitteln umsehen, die Abbildungsgrenzen zu erweitern. Zunächst kommt uns die beschränkte Empfindlichkeit des Auges hierbei zu statten: Wir können zwei Lichtpunkte schon dann nicht mehr als getrennt unterscheiden, wenn sie unter einem Sehwinkel von etwa einer Winkelminute erscheinen. Eine mathematisch exakte punktförmige Abbildung brauchen wir daher nicht notwendig, und schon dadurch brauchen die die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel nicht elementare im mathematischen Sinne, d. h. solche von unendlich kleinem Öffnungswinkel, zu sein.

Durch eine gewisse Teilung der Ansprüche kann man nun noch eine größere Erweiterung der Abbildungsgrenzen erreichen. Man kann nämlich entweder ein bei der Achse gelegenes Flächenelement durch weitgeöffnete Strahlenbüschel abbilden, oder ein ausgedehntes Objekt durch enge Strahlenbüschel. Je weiter man den ersten Fall realisiert, desto weniger tritt gleichzeitig der zweite ein, und umgekehrt.

Daß man einen Punkt auf der Achse durch weitgeöffnete Strahlenbüschel abbilden kann, haben wir schon oben S. 32 bei Betrachtung der aplanatischen Flächen gesehen. Aber auch durch Anwendung geeignet gestalteter zentrierter Kugelflächen kann man dies Ziel näherungsweise erreichen. Es ergibt sich dies aus der theoretischen Berechnung der sogenannten s p h ä r i s c h e n A b e r r a t i o n. — Benachbarte Punkte würden nun allerdings im allgemeinen noch nicht durch weitgeöffnete Strahlenbüschel abgebildet werden. Soll dies eintreten, d. h. will man ein zur Achse senkrechtes Flächenelement durch weitgeöffnete Büschel abbilden, so wird man auf die sogenannte S i n u s b e d i n g u n g geführt. Die Objektive von Mikroskopen und Fernrohren müssen diesen Anforderungen genügen.

Der Aufgabe, größere Räume durch relativ enge Büschel abzubilden, müssen die Okulare der optischen Instrumente und die photographischen Systeme genügen. Bei letzteren können die Büschel auch schon ziemlich weit sein, weil es sich unter Umständen (Porträtphotographie) um Herstellung nur mäßig scharfer Bilder handelt. Im folgenden sollen diese verschiedenen Aufgaben der

Abbildung näher besprochen werden. Eine Abbildung im früheren idealen Sinne zu erreichen, nämlich beliebig großer Räume durch weitgeöffnete Strahlenbüschel, ist allerdings unmöglich, schon allein aus dem Grunde, weil, wie wir sehen werden, die Sinusbedingung nie gleichzeitig für mehr als eine Objektlage erfüllt werden kann.

8. Sphärische Aberration. Wenn von einem Achsenpunkte P zwei Strahlen S_1 und S_2 ausgehen, von denen S_1 einen sehr kleinen Winkel, S_2 aber einen endlichen Winkel u mit der Achse bildet, so schneiden ihre Bildstrahlen S_1' und S_2' nach Brechung durch zentrierte Kugelflächen die Achse im allgemeinen in zwei verschiedenen Punkten P_1' und P_2'. Die Distanz zwischen diesen Punkten wird als sphärische Aberration (Longitudinalaberration) bezeichnet. Um dieselbe zu berechnen, kann man, falls der Neigungswinkel u des Strahles S_2 gegen die Achse nicht zu groß ist, eine Entwickelung nach steigenden Potenzen von u vornehmen. Wenn dagegen u beträchtlich ist, so empfiehlt sich eine direkte trigonometrische Durchrechnung der einzelnen Wege eines Strahles. Diese Rechnungen sollen hier nicht im Detail mitgeteilt werden.[1] Bei relativ dünnen Kollektivlinsen ist für sehr weit entfernte Objekte P der Vereinigungspunkt P_1 der der Achse nahen Strahlen entfernter von der Linse als der Vereinigungspunkt P_2 der stärker geneigten Strahlen. Man spricht dann von sphärischer Unterkorrektion. Umgekehrt besitzt eine Dispansivlinse sphärische Überkorrektion. Beschränkt man sich auf das erste Glied in der Potenzentwickelung nach u (dasselbe enthält u^2 als Faktor), so ergibt sich für diese sogenannte Aberration erster Ordnung, falls das Objekt P sehr weit entfernt ist:

$$\varepsilon = P_1'P_2' = -\frac{h^2\left\{2 - 2n^2 + n^3 + \sigma(n + 2n^2 - 2n^3) + \sigma^2 n^3\right\}}{f \cdot 2n(n-1)^2(1-\sigma^2)}. \quad (36)$$

Dabei bezeichnet h den Radius der Öffnung der Linse, f ihre Brennweite, n ihren Brechungsexponenten und σ das Verhältnis ihrer Krümmungsradien:

$$\sigma = r_1 : r_2, \quad (37)$$

r_1 und r_2 sind in dem oben S. 38 definierten Sinne positiv gerechnet, für eine Bikonvexlinse ist z. B. r_1 positiv, r_2 negativ.

---

1) Näheres hierüber vgl. in Winkelmanns Handbuch der Physik, Optik, 2. Aufl., S. 109ff. (Autor Czapski), oder Müller-Pouillets Lehrbuch d. Physik, 9. Aufl., S. 487ff. (Autor Lummer), oder Heath, Geometrische Optik, deutsch von Kanthack, Berlin 1894, S. 146ff.

$P_1' P_2'$ ist negativ für sphärische Unterkorrektion, positiv für Überkorrektion. Das Verhältnis $h : f$ wird auch die relative Öffnung der Linse genannt. Es ergibt sich dann aus (36), daß das Verhältnis der Aberration $P_1' P_2'$ zur Brennweite f proportional dem Quadrat der relativen Öffnung der Linse zunimmt, falls σ konstant bleibt.

Bei bestimmten f und h erreicht die Aberration für ein bestimmtes Radienverhältnis σ' ein Minimum;[1]) dasselbe folgt aus (36) zu:

$$\sigma' = -\frac{4 + n - 2n^2}{n(1 + 2n)}. \tag{38}$$

Für $n = 1{,}5$ folgt $\sigma' = -1 : 6$. Dies entspricht entweder einer Bikonvex- oder Bikonkavlinse. Die stärker gekrümmte Fläche muß dem einfallenden Lichte zugekehrt sein. Wenn dagegen das Objekt etwa in Brennweitenabstand von der Linse entfernt läge, so würde sie das beste Bild liefern, wenn ihre schwächer gekrümmte Fläche nach dem Objekt zu läge,[2]) da man ja diesen Fall aus dem vorhin betrachteten (sehr entferntes Objekt) ableiten kann, wenn Objekt und Bild ihre Rolle gegenseitig vertauschen. — Für $n = 2{,}0$ folgt aus (38) $\sigma' = +\,{}^1\!/_5$. Dies würde einer konvex-konkaven Linse entsprechen, welche die konvexe Seite nach dem fernen Objekt P zuwendet.

Folgende Tabelle ergibt eine Anschauung von der Größe der Longitudinalaberration ε bei zwei verschiedenen Brechungsindizes und verschiedenen Radienverhältnissen σ. Es ist dabei f konstant gleich 1 m und $h : f = {}^1\!/_{10}$, d. h. $h = 10$ cm gesetzt. Die sogenannte Lateralaberration ζ, d. h. der Radius des Kreises, welchen die Randstrahlen der Linse auf einem Schirme bilden, der durch den Bildpunkt P_1' geht, ergibt sich, wie man sofort aus dem Strahlengange erhält, durch Multiplikation der Longitudinalaberration mit der relativen Öffnung h/f, d. h. hier mit ${}^1\!/_{10}$. Die Lateralaberration gibt den Radius der Bildscheibchen, welche die Randstrahlen von einem leuchtenden Punkte P in einer Ebene entwerfen, in welcher P durch achsennahe Strahlen scharf abgebildet wird.

1) Dies Minimum ist immer noch von Null verschieden. Man kann ein völliges Verschwinden der Aberration erster Ordnung erst dann erreichen, wenn auch die Linsendicke geeignet gewählt wird.

2) Schon hieraus folgt, daß die Gestalt der Linse minimalster Aberration von der Lage des Objektes abhängt.

$f = 1$ m. $h = 10$ cm.

	$n = 1{,}5$			$n = 2$		
Gestalt der Linse	σ	$-\varepsilon$	ζ	σ	$-\varepsilon$	ζ
Ebene Vorderfläche	∞	4,5 cm	4,5 mm	∞	2 cm	2 mm
Gleichseitig	-1	1,67 „	1,67 „	-1	1 „	1 „
Ebene Hinterfläche	0	1,17 „	1,17 „	0	0,5 „	0,5 „
Günstigste Form	$-{}^1/_6$	1,07 „	1,07 „	$+{}^1/_5$	0,44 „	0,44 „

Daß eine plankonvexe Linse Bilder von geringerer Aberration liefert, falls ihre konvexe Seite dem fernen Objekt zugekehrt ist, als umgekehrt, ist schon aus dem Grunde plausibel, weil im ersten Falle die Strahlen an beiden Flächen der Linse gebrochen werden, im letzteren nur an einer, und es ist plausibel, daß eine möglichst gleichmäßige Verteilung der Brechungen günstig ist, da dann an jeder brechenden Fläche die kleinsten Winkeländerungen von einfallendem und gebrochenem Strahl eintreten. — Die Tabelle lehrt ferner, daß die günstigste Linsenform wenig Vorteil bietet vor der geeignet gestellten plankonvexen Linse. Aus dem Grunde leichterer Herstellung wird daher letztere oft in praxi angewendet.

Schließlich lehrt die Tabelle, daß die Aberrationsfehler ganz bedeutend kleiner werden, wenn bei gegebener Brennweite der Brechungsindex möglichst hoch ist. Dieses Resultat bleibt auch bestehen, wenn man die Aberration höherer Ordnung berücksichtigt, welche nicht mehr allein abhängt vom ersten Gliede in der Potenzentwickelung nach dem Neigungswinkel u der Objektstrahlen. — Ebenfalls vermindert sich die Aberration bedeutend, wenn man eine einzige Linse ersetzt durch ein System mehrerer Linsen von gleicher Gesamtbrennweite.[1]) Wählt man letztere sogar noch von verschiedener Gestalt, so hat man die Möglichkeit, die Aberration erster Ordnung und auch noch höherer Ordnungen zum Verschwinden zu bringen.[2]) — Man kann dies auch gleichzeitig für mehrere Objektlagen erreichen, aber allerdings nie für ein endliches Stück der Achse.

1) Man büßt dann allerdings etwas an der Bildhelligkeit ein wegen der vermehrten Reflexionsverluste.

2) So kann man durch zwei Linsen, von denen die eine kollektiv, die andere dispansiv ist, die Aberration erster Ordnung aufheben.

Bei beträchtlichen Neigungswinkeln u wird die Potenzentwickelung der Aberration unbrauchbar, z. B. bei Mikroskop-Objektiven, bei denen u unter Umständen fast 90° erreicht. Es ist dann praktischer, durch trigonometrische Rechnung den Gang mehrerer Strahlen zu verfolgen und durch Probieren die besten Linsengestalten und Anordnungen zu ermitteln. Es bietet sich indes durch Benutzung der oben S. 32 erwähnten aplanatischen Punkte der Kugel ein Weg, um bei nahen Objekten die Divergenz ihrer austretenden Strahlen streng aberrationsfrei beliebig zu verkleinern, d. h. auch ein aberrationsfreies, beliebig großes, virtuelles Bild des Objektes zu erzeugen.

Die erste Linse 1 (Frontlinse) möge plankonvex (z. B. Halbkugel vom Radius r_1) sein, und zwar kehre sie ihre ebene Fläche dem Objekt P zu (vgl. Figur 25). Wenn P in einem Medium eingebettet ist vom gleichen Brechungsexponenten n_1, wie diese Frontlinse, so findet erst an der Hinterfläche derselben eine Brechung der vom Objekt ausgehenden Strahlen statt, und zwar wenn P den Abstand r_1/n_1 vom Krümmungszentrum C_1 jener Hinterfläche besitzt, so erzeugen die austretenden Strahlen ein aberrationsfreies virtuelles Bild P_1 im Abstand $n_1 r_1$ von C_1. Bringt man nun hinter der Frontlinse eine zweite konkav-konvexe Linse 2 an, deren Vorderfläche ihr Krümmungszentrum in P_1 hat, während ihre Hinterfläche einen derartigen Radius r_2 besitzt, daß P_1 im aplanatischen Punkte dieser Kugel r_2 (für den Brechungsindex n_2 der Linse) liegt, so werden die Lichtstrahlen nur an dieser Hinterfläche gebrochen, und zwar derart, daß sie vom virtuellen Bilde P_2 herkommen, welches den Abstand $n_2 r_2$ vom Krümmungszentrum C_2 der Hinterfläche der Linse 2 besitzt und wiederum völlig aberrationsfrei ist. Durch Anwendung einer dritten, vierten usw. Konkav-konvexlinse kann man sukzessive weiter nach links liegende virtuelle Bilder P_3, P_4 usw. vom Objekt P erzeugen, d. h. auch die

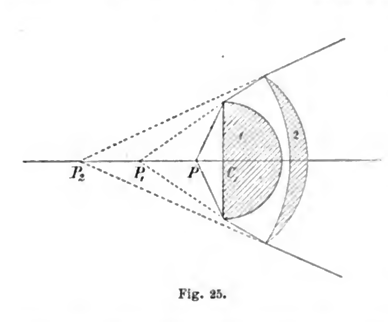


Fig. 25.

Divergenz der Lichtstrahlen sukzessive verkleinern, ohne daß Aberrationsfehler entstehen.

Dieses Prinzip (von Amici herrührend) benutzt man in der Tat vielfach bei der Konstruktion der Mikroskopobjektive, wobei man allerdings höchstens die beiden ersten Linsen desselben nach diesem Prinzip konstruiert, weil sonst zu starke, unkompensierbare chromatische Fehler (vgl. hierüber weiter unten) entstehen.

9. Der Sinussatz. Wenn ein Achsenpunkt P durch weitgeöffnete Strahlenbüschel aberrationsfrei in einem Punkte P' abgebildet wird, so ist damit im allgemeinen noch nicht die Abbildung eines bei P senkrecht zur Achse gelegenen Flächenelements $d\sigma$ in ein bei P' gelegenes Flächenelement $d\sigma'$ verknüpft, sondern es muß dazu noch die sogenannte Sinusbedingung erfüllt sein, daß nämlich $\sin u : \sin u' =$ constans ist, falls u und u' die Neigungswinkel irgend welcher durch P und P' gehender konjugierter Strahlen sind.

Nach Abbe werden diejenigen abbildenden Systeme, welche aberrationsfrei für zwei Achsenpunkte P und P' sind, und für diese Punkte die Sinusbedingung erfüllen, aplanatische Systeme genannt. Die Punkte P und P' heißen die aplanatischen Punkte des Systems. Die früher S. 32 genannten aplanatischen Punkte der Kugel entsprechen diesen Bedingungen, da nach der dortigen Formel (2) das Sinusverhältnis konstant ist. Die beiden Brennpunkte eines ellipsoidischen Hohlspiegels sind aber nicht aplanatische Punkte, sondern nur aberrationsfreie.

Früher (S. 22, Formel (9), Kapitel II) hatten wir gesehen, daß bei der kollinearen Abbildung beliebig großer Räume das Verhältnis $tg\, u : tg\, u' =$ const. ist. Diese Bedingung tritt, sobald u und u' nicht sehr kleine Winkel sind, mit der Sinusbedingung in Widerspruch, und hieraus ergibt sich, da die letztere notwendig bei physikalischer Abbildung zweier Flächenelemente erfüllt werden muß, daß eine punktförmige Abbildung beliebig großer Räume durch weitgeöffnete Strahlenbüschel physikalisch nicht herzustellen ist.

Erst wenn die Winkel u und u' sehr klein sind, können beide Bedingungen nebeneinander bestehen. In diesem Falle entsteht auch, falls P ein Bild P' erzeugt, allemal ein Bild $d\sigma'$ bei P' von einem Flächenelemente $d\sigma$ bei P. Bei weiten Öffnungswinkeln u werden aber, falls die Sinusbedingung nicht erfüllt ist, selbst bei vollkommenster Aufhebung der sphärischen Aberration für Achsenpunkte, die Bilder benachbarter Punkte, die seitlich der Achse

liegen, so undeutlich, daß ihre Zerstreuungskreise von derselben Größenordnung sind wie die Abstände der Punkte von der Achse. Nach Abbe hat diese undeutliche Abbildung seitlicher Achsenpunkte ihren Grund darin, daß die verschiedenen Zonen des sphärisch korrigierten abbildenden Systems von einem Flächenelement Bilder von verschiedener Linearvergrößerung entwerfen.

Die mathematische Bedingung für die Konstanz dieser Linearvergrößerung ist nach Abbe[1]) die Sinusbedingung. Andere Beweise dafür, die auf photometrischen und energetischen Grundsätzen

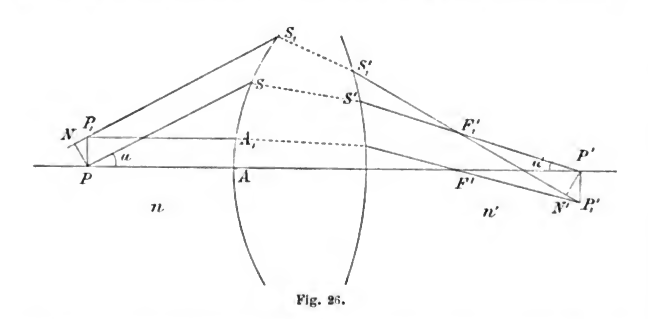


Fig. 26.

beruhen, gab Clausius[2]) und v. Helmholtz.[3]) Diese Schlußweisen werden weiter unten im III. Abschnitt auseinandergesetzt werden. Es möge hier ein einfacher Beweis folgen, den Hockin[4]) gegeben hat und der nur den Satz benutzt, daß die optischen Längen aller Strahlenwege zwischen konjugierten Punkten einander gleich sein müssen[5]) (vgl. oben S. 9).

Es möge (vgl. Figur 26) P durch einen Achsenstrahl PA und einen unter dem Winkel u geneigten Strahl PS im Achsenpunkte P' abgebildet werden. Ebenso möge der unendlich nahe Punkt P_1

1) Carls Repert. f. Physik, 1881, 16, S. 303.

2) R. Clausius, Mechanische Wärmetheorie, 1887, 3. Aufl., 1, S. 315.

3) Pogg. Ann. Jubelbd., 1874, S. 557.

4) Journ. Roy. Microscop. Soc. 1884, (2), 4, S. 337.

5) Nach Bruns (das Eikonal, Abhandl. d. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 21, S. 325, math.-phys. Kl.) kann man den Sinussatz auf noch allgemeinere Grundsätze zurückführen, nämlich allein auf das Vorhandensein konjugierter Strahlen und den Malusschen Satz (vgl. oben S. 13).

durch einen achsenparallelen Strahl $P_1 A_1$ und einen zu S parallelen Strahl $P_1 S_1$ im Punkte P_1' abgebildet werden. Der zu $P_1 A_1$ konjugierte Strahl $F' P_1'$ muß offenbar durch den Brennpunkt F' des Bildraumes gehen. Bezeichnet man nun die optische Länge zwischen den Punkten P und P' auf dem Wege über A durch (PAP'), auf dem Wege über S, S' durch $(PSS'P')$, und analog die optischen Längen der von P_1 ausgehenden Strahlen, so ist nach dem Prinzip vom ausgezeichneten Lichtweg:

$$(PAP') = (PSS'P'); \; (P_1 A_1 F' P_1') = (P_1 S_1 S_1' P_1'),$$

daher auch

$$(PAP') - (P_1 A_1 F' P_1') = (PSS'P') - (P_1 S_1 S_1' P_1'). \tag{39}$$

Da nun F' konjugiert ist zu einem unendlich entfernten Objekt T auf der Achse, so wäre $(TPAF') = (TP_1 A_1 F')$. Nun sind aber offenbar die Längen TP und TP_1 einander gleich, da PP_1 senkrecht zur Achse stehen soll. Daher folgt aus der letzten Beziehung durch Subtraktion dieser Längen $TP = TP_1$:

$$(PAF') = (P_1 A_1 F'). \tag{40}$$

Ferner folgt, da $P'P_1'$ senkrecht steht zur Achse: $F'P' = F'P_1'$, wenigstens falls $P'P_1'$ sehr klein ist. Addiert man diese Gleichung zu (40), so ergibt sich:

$$(PAF'P') = (P_1 A_1 F' P_1'),$$

d. h. die linke Seite der Gleichung (39) verschwindet, d. h. es wird:

$$(PSS'P') = (P_1 S_1 S_1' P_1'). \tag{41}$$

Nennt man nun F_1', den Schnittpunkt der Strahlen $P'S'$ und $P_1'S_1'$, so ist F_1' konjugiert zu einem unendlich entfernten Objektpunkte T_1, dessen Strahlen den Winkel u mit der Achse bilden. Fällt man daher von P ein Lot PN auf $P_1 S_1$, so entsteht, analog wie oben die Gleichung (40):

$$(PSS'F_1') = (NS_1 S_1' F_1'). \tag{42}$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von (41) entsteht:

$$(F_1'P') = -(NP_1) + (F_1'P_1'). \tag{43}$$

Ist nun n der Brechungsindex des Objektraumes, n' der des Bildraumes, so ist, falls die geometrischen Längen ohne Klammern bezeichnet werden:

$$(NP_1) = n \cdot NP_1 = n \cdot PP_1 \cdot \sin u. \tag{44}$$

Zieht man ferner $P'N'$ senkrecht zu $F_1'P_1'$, so ist, da $P'P_1'$ unendlich klein ist,

$$(F_1'P_1') - (F_1'P') = n' \cdot N'P_1' = n' \cdot P'P_1' \cdot \sin u'. \tag{45}$$

Daher gibt die Gleichung (43), wenn man (44) und (45) berücksichtigt:

$$n \cdot PP_1 \cdot \sin u = n' \cdot P'P_1' \cdot \sin u'.$$

Nennt man y die lineare Größe PP_1 des Objektes, ebenso y' die des Bildes $P'P_1'$, so ergibt sich also:

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'y'}{n y}. \tag{46}$$

Hiermit ist die Konstanz des Sinusverhältnisses bewiesen, und zwar ist auch zugleich der Wert der Konstanten ermittelt. Derselbe stimmt überein mit der bei den aplanatischen Punkten der Kugel früher (S. 33) erhaltenen Formel (2).

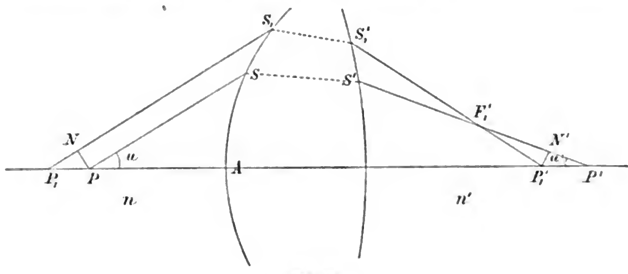


Fig. 27.

Für zwei verschiedene Achsenpunkte kann man nicht die Sinusbedingung erfüllen. Denn wenn (vgl. Figur 27) P und P_1 die Bilder P', P_1' besitzen, so muß nach dem Prinzip gleicher optischer Längen sein:

$$(PAP') = (PSS'P'), \quad (P_1 AP_1') = (P_1 S_1 S_1' P_1'). \tag{47}$$

PS und $P_1 S_1$ mögen zwei einander parallele Strahlen vom Neigungswinkel u sein. Durch Subtraktion beider Gleichungen (47) voneinander folgt dann durch dieselben Schlußfolgerungen wie vorhin:

$$(P_1'P') - (P_1 P) = -(P_1 N) + (N'P'),$$

oder

$$n \cdot P_1 P (1 - \cos u) = n' \cdot P_1' P' (1 - \cos u'), \text{ d. h.}$$

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} u}{\sin^2 \frac{1}{2} u'} = \frac{n' \cdot P'P_1'}{n \cdot PP_1}. \tag{48}$$

Diese Gleichung ist also die Bedingung dafür, daß zwei benachbarte Punkte der Achse, d. h. ein unendlich kleines Stück derselben, durch weitgeöffnete Strahlenbüschel abgebildet werden.

Diese Bedingung kann aber nicht gleichzeitig mit der Sinusbedingung (46) erfüllt werden. **Man kann also nur für eine Objektlage ein abbildendes System aplanatisch machen.**

Für die Mikroskopobjektive ist die Erfüllung der Sinusbedingung besonders wichtig. Man hat dieselbe bei der Konstruktion der älteren Mikroskope theoretisch noch nicht gekannt, man kann aber nach Abbe experimentell nachweisen, daß die älteren Mikroskopobjektive, welche, nach rein empirischen Grundsätzen hergestellt, gute Bilder liefern, tatsächlich der Sinusbedingung genügen.

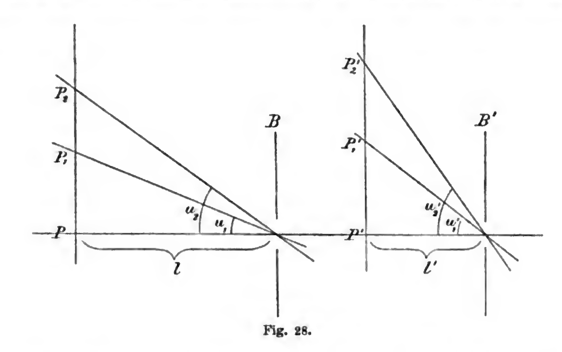


Fig. 28.

10. Abbildung großer Flächen durch enge Büschel. Vor allem muß der Astigmatismus gehoben sein (vgl. oben S. 44). Es läßt sich auf theoretischem Wege kein Satz für diese Bedingung ableiten, wenigstens wenn die Neigung der abbildenden Strahlen gegen die Achse beliebig groß ist. Man ist also wesentlich hierbei auf praktische Erfahrungen und trigonometrische Durchrechnung angewiesen. Es mag hervorgehoben werden, daß auf den Astigmatismus nicht nur die Gestalt der einzelnen Linsen, sondern auch der Ort einer Blende Einfluß hat.

Noch zwei weitere Forderungen pflegt man an die Abbildung zu stellen, welche allerdings keine unbedingten sind und zum Teil nur der Bequemlichkeit dienen: das Bild soll eben sein (ohne Wölbung) und in seinen einzelnen Teilen gleiche Vergrößerung

besitzen (es soll frei von Verzerrung sein). Erstere Forderung wird besonders an photographische Objektive gestellt, über die analytischen Bedingungen vgl. Winkelmann, Handb. d. Physik, Optik, 2. Aufl., S. 140 (Autor Czapski).

Die analytische Bedingung für Verzerrungsfreiheit läßt sich leicht aufstellen: Es sei (vgl. Figur 28) P, P_1, P_2 eine Objektivebene; P', P_1', P_2' die konjugierte Bildebene. Die abbildenden Strahlenbüschel des Objektes werden stets durch eine bestimmte Blende B (Eintrittspupille) begrenzt (eventuell ist diese einfach der Rand einer Linse, oder eine speziell angebrachte Blende), und zwar sind die von den Objekten P_1, P_2 usw. nach dem Mittelpunkt B der Eintrittspupille hinzielenden Strahlen die Hauptstrahlen (mittleren Strahlen) der abbildenden Büschel. Ebenso werden die

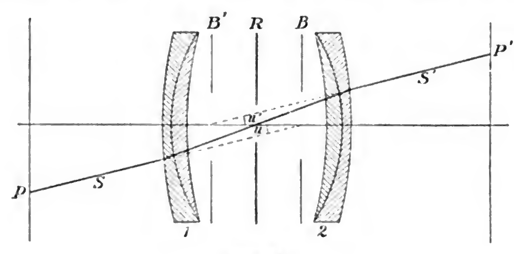


Fig. 29.

Bildstrahlen durch eine Blende B' (Austrittspupille), welche das konjugierte Bild zur Eintrittspupille[1]) ist, begrenzt. Wenn l und l' die Entfernungen der Pupillen von der Objekt-, bezw. Bildebene ist, so ergibt sich aus der Figur:

$$tg\,u_1 = PP_1 : l, \qquad tg\,u_2 = PP_2 : l,$$
$$tg\,u_1' = P'P_1' : l', \qquad tg\,u'_2 = P'P_2' : l'.$$

Wenn nun die Vergrößerung konstant sein soll, so muß sein:

$$P'P'_1 : PP_1 = P'P'_2 : PP_2,$$

daher auch

$$\frac{tg\,u_1'}{tg\,u_1} = \frac{tg\,u_2'}{tg\,u_2} = \text{constans}. \tag{49}$$

Bei konstanter Vergrößerung müssen alle konjugierten

1) Näheres hierüber vgl. im Kapitel IV.

Hauptstrahlen ein konstantes Tangentenverhältnis ihrer Neigungswinkel besitzen. Man pflegt in diesem Falle die Schnittpunkte der Hauptstrahlen mit der Achse, d. h. die Mittelpunkte der Pupillen, „orthoskopische" Punkte zu nennen; man kann also auch sagen: die Zentra der Perspektive von Objekt und Bild müssen orthoskopische Punkte sein, falls das Bild ohne Verzerrung sein soll.

Aus diesem Grunde ist die Lage der Pupillen von Bedeutung. An einem Beispiele, welches der photographischen Optik entnommen ist, mag gezeigt werden, wie man bei einem Projektionssystem der Bedingung der Orthoskopie am einfachsten genügen kann: Man bringt nämlich zu beiden Seiten einer körperlichen Blende R vollkommen symmetrische Linsensysteme 1 und 2 an. (Das ganze System nennt man dann ein symmetrisches Doppelobjektiv.) In der Figur 29 sind zwei konjugierte Hauptstrahlen S, S' gezeichnet. Das optische Bild B der Blende R in bezug auf das System 1 ist offenbar die Eintrittspupille, denn alle Hauptstrahlen müssen tatsächlich durch die Mitte der Blende R gehen, die einfallenden Hauptstrahlen S müssen daher nach der Mitte von B, dem optischen Bilde von R in bezug auf 1, hinzielen. Ebenso ist B', das optische Bild von R in bezug auf 2, die Austrittspupille. Aus der Symmetrie der Anordnung ergibt sich nun sofort, daß stets $u = u'$ ist, d. h. die Bedingung (49) der Orthoskopie ist erfüllt.

Solche symmetrische Doppelobjektive besitzen, kraft ihrer Symmetrie, noch zwei andere Vorteile:

Einmal ist eine bessere Vereinigung der Meridionalbüschel zu erzielen,[1] andererseits sind auch chromatische Fehler (die im nächsten Paragraphen ausführlicher behandelt werden sollen) leichter zu vermeiden. Das Resultat $u = u'$, d. h. die Parallelität konjugierter Hauptstrahlen, ist ganz unabhängig von den Brechungsexponenten des Systems, d. h. auch von der Farbe des Lichtes. Wenn nun jedes der beiden Teilsysteme 1 und 2 einzeln für sich achromatisiert ist in bezug auf den Bildort, der von der körperlichen Blende R entsteht, d. h. wenn die Orte der Eintritts- und Austrittspupille unabhängig von der Farbe sind,[2] so fallen kon-

1) Es handelt sich hier um Aufhebung des sogenannten Komafehlers. Vgl. darüber Müller-Pouillet, Optik (von Lummer), 9. Aufl. S. 774, 10. Aufl. S. 310.

2) Diese Achromatisierung kann, wie wir sehen werden, praktisch genügend nahe erreicht werden, dagegen kann nicht gleichzeitig erreicht werden, daß auch die Größen der von R entstehenden Bilder unabhängig von der Farbe sind.

jugierte Hauptstrahlen von einem Objekte P_1 und seinem Bilde P_1' für alle Farben stets zusammen. Dadurch entstehen dann aber auch in der Bildebene gleichgroße Bilder für alle Farben. Der Ort der schärfsten Bildebene ist allerdings streng genommen für die verschiedenen Farben etwas verschieden, wenn aber z. B. ein Schirm auf Gelb scharf eingestellt ist, so ist die Unschärfe für andere Farben nur gering, und ihre Bilder liegen an den Schnittpunkten der Hauptstrahlen. Falls also diese für alle Farben zusammenfallen, so wird das Bild nur wenig durch chromatische Fehler gestört.

Von der Entfernung der Einzelsysteme 1 und 2 von der Blende R hängt der Astigmatismus und die Bildwölbung ab. Im allgemeinen wird das Bild mit zunehmender Entfernung der Einzelsysteme gestreckter, d. h. die Bildwölbung nimmt ab, während die astigmatische Differenz zunimmt. Nur infolge Verwendung der neuen Gläser von Schott in Jena, bei denen hohe Dispersion mit niedrigem Brechungsindex und geringe Dispersion mit hohem Brechungsindex gepaart vorkommt, ist eine anastigmatische Bildebnung ermöglicht worden. Es soll dies unten (Kapitel V über optische Instrumente) noch näher besprochen werden.

11. Die chromatischen Abweichungen in dioptrischen Systemen. Bisher ist immer nur vom Brechungsexponenten eines Körpers schlechthin die Rede gewesen; aber es ist zu bedenken, daß derselbe für die verschiedenen, im weißen Lichte enthaltenen Farben ein verschiedener ist. Für alle gut durchsichtigen Körper wächst der Brechungsexponent kontinuierlich, wenn man vom roten Ende der Spektralfarbenskala zum blauen Ende übergeht. Um eine Anschauung zu geben, sind in folgender Tabelle die Brechungsexponenten für 3 Farben: n_C für rotes Licht (der Fraunhoferschen Linie C des Sonnenspektrums, die identisch mit der roten Wasserstofflinie ist), n_D für gelbes Licht (Natriumlinie), n_F für blaues Licht (blaue Wasserstofflinie) bei zwei verschiedenen Glassorten angegeben.

Glassorte	n_C	n_D	n_F	$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$
Calcium-Silikat-Crown . .	1,5153	1,5179	1,5239	0,0166
Gewöhnl. Silikat-Flint . .	1,6143	1,6202	1,6314	0,0276

In der letzten Kolumne ist das sogenannte Dispersionsvermögen ν des Körpers angegeben. Dasselbe ist also definiert durch:

$$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}. \tag{50}$$

Es ist übrigens für ν ziemlich gleichgültig, ob im Nenner n_D oder der Brechungsexponent für irgend eine andere Farbe gewählt wird. Denn dadurch würde sich ν um höchstens 2% ändern.

Da nun die Abbildungsfaktoren vom Brechungsexponenten abhängig sind, so muß im allgemeinen das von einem weißen Objekte entstehende Bild farbige (chromatische) Abweichungen zeigen, d. h. die verschiedenen im weißen Objekte enthaltenen Farben entwerfen Bilder, welche nach Ort und Größe voneinander etwas verschieden sind.

Will man das rote und blaue Bild vollständig zur Deckung bringen, d. h. will man das abbildende System für rot und blau achromatisieren, so ist dazu erforderlich, daß nicht nur die Brennweiten, sondern auch beide Hauptebenen für beide Farben identisch werden.[1]) In vielen Fällen genügt aber schon eine teilweise Achromatisierung des Systems, z. B. entweder nur der Brennweite, oder der Lage eines Brennpunktes, je nach den praktischen Zwecken, denen das System dient, nach denen entweder mehr Gewicht auf die Bildvergrößerung oder den Bildort zu legen ist.

Durch eine Achromatisierung des Systems für zwei Farben, z. B. rot und blau, ist aber im allgemeinen noch nicht eine Achromatisierung für alle anderen Farben erreicht, weil das Verhältnis der Dispersionen in verschiedenen Teilen des Spektrums von Substanz zu Substanz varriiert. Die so noch übrig bleibenden chromatischen Abweichungen der Bilder, welche man sekundäres Spektrum nennt, sind aber meist schon unerheblich für praktische Zwecke. Man kann ihren Einfluß noch weiter reduzieren entweder durch Wahl geeigneter brechender Körper, bei denen die Disproportionalität des Dispersionsvermögens möglichst klein ist, oder durch Achromatisierung für 3 Farben. (Die dann noch übrigbleibenden chromatischen Bildabweichungen heißen tertiäres Spektrum.)

Die Wahl der zum Zwecke praktischer Achromatisierung zu vereinigenden Farben hängt vom Zwecke des optischen Instru-

1) Bei weitgeöffneten Strahlenbüscheln gibt es noch mehr Bedingungen, die zur völligen Achromasie notwendig sind; vgl. weiter unten.

mentes ab. Bei einem photographischen Systeme, für welches das blaue Licht das wirksamste ist, wird man beide Farben mehr nach dem blauen Ende des Spektrums zu wählen, als bei einem dem menschlichen Auge dienenden Instrumente, für welches das gelbgrüne Licht das wirksamste ist. In letzterem Fall kann man experimentell leicht entscheiden, welche beide Farben man am zweckmäßigsten vereinigt in folgender Weise: Man stellt zwei Prismen verschiedener Glassorten auf den Tisch eines Spektrometers so zusammen, daß sie nahezu achromatische Spaltbilder liefern, z. B. die Farben C und F bei bestimmter Stellung des Spektrometertisches vereinigen. Dreht man denselben, so wird das Spaltbild im allgemeinen farbig gesehen, bei einer Stellung des Spektrometertisches wird aber das Spaltbild am wenigsten gefärbt erscheinen. Man berechnet dann aus dieser, hier gerade vorhandenen Lage der Prismen die beiden Farben, welche tatsächlich genau parallel aus den Prismen austreten. Dieses sind dann diejenigen beiden Farben, welche zur Achromatisierung bei subjektiver Beobachtung am zweckmäßigsten zu vereinigen sind.

Schon mit einer einzigen dicken Linse kann man Achromatisierung der Brennweite oder der Brennpunktsorte erreichen.

Praktisch wichtiger sind aber die Fälle, in denen dünne Linsen verwandt werden. Werden dieselben aufeinander gelegt, so können wir näherungsweise von der chromatischen Abweichung der Hauptebenen absehen, da diese bei dünnen Linsen einfach immer in die Linsen fallen (vgl. oben S. 40). Wenn man also dann die Brennweite achromatisiert, so ist das System nahezu vollständig achromatisiert, d. h. sowohl für Bildort als auch Bildgröße.

Es ist nun die Brennweite f_1 einer dünnen Linse vom Brechungsindex n_1 bei einer bestimmten Farbe nach Formel (22) der S. 40 gegeben durch

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) = (n_1 - 1)\, k_1, \tag{51}$$

wobei k_1 eine Abkürzung für die Differenz der Linsenkrümmungen bedeutet.

Ferner ist nach (24) der S. 42 die resultierende Brennweite f zweier aufeinander gelegter dünner Linsen der Brennweiten f_1 und f_2 gegeben durch

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \tag{52}$$

Für einen Zuwachs dn_1 des Brechungsindex n_1 bei Übergang zu

einer anderen Farbe folgt nun aus (51) der Zuwachs der reziproken Brennweite:

$$d\left(\frac{1}{f_1}\right) = dn_1 \cdot k_1 = \frac{dn_1}{n_1 - 1} \cdot \frac{1}{f_1} = \frac{\nu_1}{f_1}, \tag{53}$$

wobei ν_1 das Dispersionsvermögen der Substanz der Linse 1 zwischen den beiden benutzten Farben bedeutet, vgl. Gl. (50). Soll die resultierende Brennweite f für beide Farben die gleiche sein, so folgt aus (52) und (53):

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = d\left(\frac{1}{f_1}\right) + d\left(\frac{1}{f_2}\right) = \frac{\nu_1}{f_1} + \frac{\nu_2}{f_2} = 0. \tag{54}$$

Die Bedingung der Achromatisierung ist also in (54) enthalten. Diese Gleichung sagt aus, da ν_1 und ν_2 beständig dasselbe Vorzeichen besitzen, was für Körper 1 und 2 man auch verwenden möge, daß die Einzelbrennweiten einer dünnen achromatischen Doppellinse entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

In Verbindung mit (52) folgen die reziproken Einzelbrennweiten zu

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1}, \quad \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f} \frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1}. \tag{55}$$

Bei positiver Gesamtbrennweite hat daher die Linse mit kleinerem Dispersionsvermögen eine positive, die mit größerem Dispersionsvermögen eine negative Brennweite.

Wenn f vorgeschrieben ist und die Glassorten gewählt sind, so sind zur Erreichung der Brennweiten f_1 und f_2 vier Krümmungsradien verfügbar. Es bleiben daher noch zwei frei verfügbar. Will man die beiden Linsen aneinanderkitten, so ist $r_1' = r_2$ zu setzen. Es bleibt dann noch ein Krümmungsradius verfügbar. Derselbe kann zweckmäßig so gewählt werden, daß die sphärische Aberration möglichst klein wird.

Bei mikroskopischen Objektiven werden achromatische Paare dieser Art sehr allgemein verwendet; es besteht hierbei jedes aus einer plankonkaven Linse aus Flintglas, welche mit einer bikonvexen Linse von Crownglas verkittet ist, wobei die plane Linsenfläche dem einfallenden Licht zugekehrt wird.

Wenn wir zwei dünne Linsen in einem größeren Abstande voneinander verwenden wollen, so ist ihr optisches Intervall Δ (vgl. oben S. 28)

$$\Delta = a - (f_1 + f_2),$$

daher nach (19) S. 29 die resultierende reziproke Brennweite:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2}. \tag{56}$$

Soll die Brennweite achromatisiert werden, so folgt aus (56) und (53):

$$0 = \frac{\nu_1}{f_1} + \frac{\nu_2}{f_2} - \frac{a(\nu_1 + \nu_2)}{f_1 f_2},$$

oder

$$a = \frac{\nu_2 f_1 + \nu_1 f_2}{\nu_1 + \nu_2}. \tag{57}$$

Bestehen beide Linsen aus gleichem Material ($\nu_1 = \nu_2$), so bilden sie also in der Distanz

$$a = \frac{f_1 + f_2}{2} \tag{58}$$

ein hinsichtlich der Brennweite achromatisches System. Diese Achromasie findet dann zugleich für alle Farben statt, da stets $\nu_1 = \nu_2$ ist.

Will man das System nicht nur hinsichtlich der Brennweite achromatisieren, sondern vollständig, d. h. nach Bildort und Bildgröße, so ergibt die Figur 30:

$$\frac{y_1}{y} = -\frac{e_1'}{e_1}, \quad \frac{y'}{y_1} = -\frac{e_2'}{e_2}, \text{ d. h.}$$

das Vergrößerungsverhältnis:

$$y' : y = e_1' e_2' : e_1 e_2. \tag{59}$$

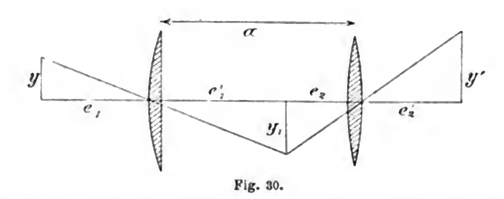


Fig. 30.

Wenn daher die Vergrößerung und der Bildort achromatisiert werden soll, so muß sein, da e_1 für alle Farben konstant ist:

$$d\left(\frac{e_1' e_2'}{e_2}\right) = 0, \quad de_2' = 0. \tag{60}$$

Da nun aber $e_1' + e_2 = a$ (Abstand der Linsen) auch für alle Farben konstant ist, so folgt $de_1' = -de_2$, während aus (60) folgt $d(e_1'/e_2) = 0$.

Hieraus ergibt sich $de_1' = 0$, $de_2 = 0$, d. h. die beiden Einzellinsen müssen schon für sich achromatisiert sein, d. h. müssen aus achromatischen Paaren bestehen.

Man kann daher auch allgemein schließen: Ein Gesamtsystem, welches aus mehreren getrennten Einzelsystemen besteht, ist nur dann vollständig (d. h. nach Bildort und Bildgröße) achromatisiert, wenn dies schon die Einzelsysteme für sich sind.

Wenn der Öffnungswinkel der die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel erheblicher wird, so ist mit der Achromasie des Bildortes oder der Brennweite noch nicht das Zustandekommen eines guten Bildes gewährleistet, auch wenn es für eine Farbe entstehen sollte. Es muß auch die sphärische Aberration für zwei Farben möglichst aufgehoben sein und (bei Abbildung von Flächenelementen) die Bedingung des Aplanatismus (Sinusbedingung) für zwei Farben erfüllt sein. Abbe nennt Systeme, die frei von sekundärem Spektrum sind und zugleich aplanatisch für mehrere Farben, „apochromatische“ Systeme. Dieselben besitzen dann noch eine chromatische Differenz der Vergrößerung; dieselbe kann durch andere Mittel unschädlich gemacht werden (vgl. weiter unten bei Besprechung des Mikroskops).

Kapitel IV.

Über die Strahlenbegrenzung und die von ihr abhängige Lichtwirkung.

1. Eintrittspupille und Austrittspupille. Die Strahlen, welche die Abbildung durch ein optisches System vermitteln, sind naturgemäß stets begrenzt, entweder infolge der beschränkten Größe der Linsen bezw. Spiegel, oder infolge besonders angebrachter körperlicher Blenden. Sei P ein bestimmt gelegener

Objektpunkt (vgl. Figur 31), so findet man zunächst diejenige von den vorhandenen Blenden (oder denjenigen Linsenrand), welche die Öffnung der abbildenden Büschel am meisten einschränkt, in folgender Weise: Man konstruiere von jeder Blende B das optische Bild B_1, welches der zwischen B und dem Objekt P liegende Teil S_1 des optischen Systems entwirft. Dasjenige unter diesen Bildern B_1, welches vom Objekt P unter dem kleinsten Sehwinkel erscheint, begrenzt offenbar die abbildenden Strahlenbüschel; dieses Bild heißt die Eintrittspupille des ganzen abbildenden Systems, die körperliche Blende B selbst wird die Apertur- oder Öffnungsblende (oder auch Iris) genannt.[1] Der Sehwinkel $2U$, unter

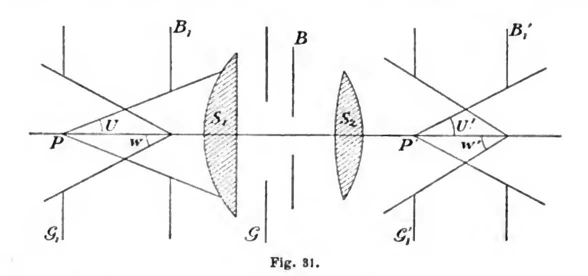


Fig. 31.

welchem die Eintrittspupille vom Objekt aus erscheint, d. h. der Winkel zweier in einer Meridianebene verlaufenden Randstrahlen, heißt der Öffnungswinkel des Systems.

Das optische Bild B_1', welches das ganze System von der Eintrittspupille entwirft, wird seine Austrittspupille genannt. Dieselbe begrenzt offenbar die von dem Bilde P' des Objektes P ausgehenden Strahlen. Der Winkel $2U'$, unter dem die Austrittspupille von F' aus erscheint, heißt der Projektionswinkel des Systems. Aus der Vertauschbarkeit von Bild und Objekt folgt ohne weiteres, daß die Austrittspupille B_1' das Bild der Aperturblende B in bezug auf den Teil S_2 des ganzen optischen Systems ist, welcher von B nach dem Bildraume zu folgt. Beim Fernrohr ist oft der Rand der Vorderlinse (des Objektivs) die Aperturblende,

1) Wenn die Iris vor der ersten Linse des Systems liegt, so ist sie mit der Eintrittspupille identisch.

das von dem Okular entworfene Bild dieses Linsenrandes daher die Austrittspupille. Man sieht die Austrittspupille als reelles oder virtuelles Bild, wenn man das Instrument in genügender Entfernung vom Auge gegen einen hellen Hintergrund hält.

Unter Umständen kann aber auch die Iris des beobachtenden Auges die Aperturblende bilden, deren von der Hornhaut und Augenwasser entworfenes Bild die Pupille genannt wird. Nach diesem Falle ist die allgemeine Bezeichnung „Eintrittspupille" und „Iris" gewählt.

Die Lage der Pupillen ist, wie wir schon oben S. 59 sahen, von Wichtigkeit bei der Abbildung ausgedehnter Objekte durch enge Büschel. Soll das Bild dem Objekte ähnlich sein, so müssen die Mittelpunkte der Eintritts- bezw. Austrittspupille „orthoskopische" Punkte sein. Außerdem ist die Lage der Pupillen

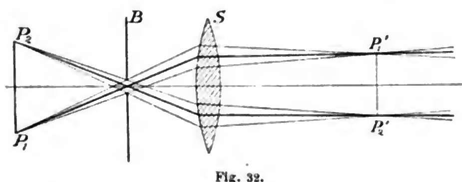


Fig. 32.

wesentlich für den Gang der Hauptstrahlen, d. h. der mittleren Strahlen der die Abbilduug vermittelnden Büschel. Sind, was wir voraussetzen wollen, die Pupillen Kreise, deren Zentren auf der Achse des abbildenden Systems liegen, so sind die von einem beliebig liegenden Objekt P bezw. seinem Bilde P' nach dem Mittelpunkt der Eintritts- bezw. Austrittspupille hinzielenden Strahlen die Hauptstrahlen der Objekt- bezw. Bildstrahlenbündel. Den Verlauf der Hauptstrahlen im abbildenden System bezeichnet man des näheren als seinen Strahlengang.

2. Telezentrischer Strahlengang. Durch besondere Lage der „Iris" kann man es erreichen, daß entweder die Eintritts- oder Austrittspupille (oder bei teleskopischer Abbildung beide zugleich) ins Unendliche rücken. Man braucht dazu nur die Iris in den hinteren Brennpunkt von S_1 oder in den anderen Brennpunkt von S_2 zu legen (vgl. oben Figur 31). Dieser Fall wird als „telezentrischer" Strahlengang bezeichnet, und zwar der erstere als „tele-

zentrisch nach der Objektseite", der letztere als „telezentrisch nach der Bildseite". Im ersteren Falle sind alle Hauptstrahlen des Objektraumes achsenparallel, im letzteren alle Hauptstrahlen des Bildraumes. Figur 32 bezieht sich auf diesen Fall, d. h. auf einen telezentrischen Strahlengang nach der Bildseite. Die Iris B liegt im vorderen Brennpunkt der Linse S, welche von dem Objekt $P_1 P_2$ das reelle Bild $P_1' P_2'$ entwirft. Die von den Punkten P_1 und P_2 ausgehenden Hauptstrahlen sind stark gezeichnet, die Randstrahlen schwach. — Dieser Strahlengang ist vorteilhaft anzuwenden, wenn das Bild $P_1' P_2'$ auf einer mit Teilstrichen versehenen Pointierungsebene (Mikrometer) ausgemessen werden soll. Auch wenn sie nicht genau mit dem Bilde $P_1' P_2'$ zusammenfällt, so ergibt sich doch immer dieselbe Bildgröße, weil bei unscharfer Einstellung der Schnitt der Hauptstrahlen mit der Pointierungsebene als Ort des (unscharfen) Bildes aufgefaßt wird. Wenn nun die Hauptstrahlen des Bildraumes achsenparallel sind, so müssen auch die unscharfen Bilder auf der nicht genau eingestellten Mikrometerebene stets dieselbe Größe behalten. Bei schiefem Gange der Hauptstrahlen würde aber die scheinbare Größe des Bildes stark mit der Lage der Pointierungsebene wechseln.

Wenn man das System telezentrisch nach der Objektseite macht, so ist aus ähnlichem Grunde die Bildgröße unabhängig von einer genauen Einstellung auf das Objekt. Dieser Strahlengang ist daher bei den Mikrometermikroskopen vorteilhaft anzuwenden, während der erstere bei Fernrohren zu realisieren ist, bei denen die Objektdistanz immer gegeben ist (unendlich groß), aber das Okularmikrometer verstellt werden kann.

3. Gesichtsfeld. Außer der Blende B (Iris), welche selbst, bezw. deren optische Bilder Eintritts- bezw. Austrittspupille bilden, sind stets noch weitere Blenden oder Linsenränder vorhanden, welche die Größe des abzubildenden Objektes, das Gesichtsfeld, bestimmen. Man findet diejenige Blende (die sogenannte Gesichtsfeldblende), welche hierfür maßgebend ist, indem man wiederum von sämtlichen Blenden ihre optischen Bilder konstruiert, die der Teil S_1 des ganzen optischen Systems entwirft, der zwischen Objekt und der betreffenden Blende liegt. Dasjenige Bild G_1 unter diesen, welches von der Mitte der Eintrittspupille aus unter dem kleinsten Winkel $2w$ erscheint, ist für das Gesichtsfeld bestimmend. Der Sehwinkel $2w$ heißt der Gesichtsfeldwinkel. Die Richtigkeit dieser Behauptung geht aus einer Zeichnung, z. B. Figur 31

auf S. 68, unmittelbar hervor. In dieser Figur sind außer der Iris B noch die Ränder der Linsen S_1 und S_2 und das Diaphragma G als Blenden vorhanden. Das Bild der letzteren in bezug auf S_1 ist G_1, und da wir annehmen wollen, daß G_1 von der Mitte der Eintrittspupille unter kleinerem Winkel erscheine als der Rand von S_1 und das Bild, welches S_1 vom Linsenrand S_2 entwirft, so wirkt G als Gesichtsfeldblende. — Das optische Bild G_1', welches das ganze System $S_1 + S_2$ von G_1 entwirft, begrenzt das Gesichtsfeld im Bilde. Der Winkel $2w'$, unter dem G_1' von der Mitte der Austrittspupille aus erscheint, heißt der Bildwinkel.

In der Figur 31 ist angenommen, daß das Bild G_1 der Gesichtsfeldblende in die Ebene des abzubildenden Objektes P fällt. Dieser Fall zeichnet sich dadurch aus, daß dann das Gesichtsfeld scharf begrenzt ist, weil jeder Objektpunkt P entweder die Eintrittspupille vollständig mit Strahlen erfüllen kann, oder gar keine Strahlen zu denselben senden kann, da sie alle von G_1 aufgehalten werden. Wenn die Objektebene nicht mit dem objektseitigen Bilde G_1 der Gesichtsfeldblende zusammenfällt, so ist das Gesichtsfeld unscharf begrenzt, d. h. durch eine Zone kontinuierlich abnehmender Helligkeit. Denn dann gibt es nach dem Rande des Gesichtsfeldes zu offenbar Objektpunkte P, deren Strahlen die Eintrittspupille nur teilweise erfüllen können.

Bei Instrumenten, welche zur subjektiven Beobachtung dienen, ist es günstig, wenn die Pupille des Auges mit der Austrittspupille des Instrumentes zusammenfällt, damit das Gesichtsfeld möglichst ausgenutzt wird. Denn wenn die Augenpupille in einiger Entfernung von der Austrittspupille liegt, so kann erstere als Gesichtsfeldblende wirken und das Gesichtsfeld unter Umständen sehr einschränken. Die Austrittspupille wird daher auch oft als Augenkreis (Okularkreis), ihr Mittelpunkt als Augenort bezeichnet.

Bisher ist der Einfluß der Blenden im wesentlichen allein auf den geometrischen Verlauf des Strahlenganges diskutiert, die Blenden haben nun aber auch noch die größte Bedeutung für die Helligkeit der Bilder. Bei Betrachtung derselben verlassen wir den Boden der rein geometrischen Optik, wir wollen aber diese Betrachtungen hier einschalten, da ohne dieselben die Beschreibung der Wirkungsweise der verschiedenen optischen Instrumente zu unvollständig ausfallen würde.

4. **Photometrische Grundsätze.** Wir bezeichnen als Gesamtlichtmenge M einer Lichtquelle Q diejenige Lichtmenge,

welche Q auf irgend eine geschlossene, sie umgebende Fläche S sendet. Auf die speziellere Gestalt von S kommt es dabei nicht an, indem die Voraussetzung (oder besser Definition) gemacht wird, daß bei der Ausbreitung des Lichtes in einem vollständig durchsichtigen[1]) Medium die Gesamtlichtmenge weder verkleinert noch vergrößert wird.

Ebenso wird vorausgesetzt (definiert), daß die Lichtmenge konstant bleibt für jeden Querschnitt einer Röhre, deren Seiten von Lichtstrahlen gebildet werden (Lichtröhre).[2]) Vernachlässigen wir bei einer Lichtquelle Q zunächst ihre seitliche Ausdehnung, d. h. setzen wir sie als punktförmig voraus, so sind die Lichtstrahlen gerade Linien, die vom Punkte Q ausgehen. Eine Lichtröhre ist also ein Kegel, dessen Spitze in Q liegt. Als Öffnungswinkel (oder räumlicher Winkel) Ω des Kegels wird die Flächengröße verstanden, welche der Kegel aus einer um seine Spitze als Zentrum beschriebenen Kugel vom Radius 1 (1 cm) ausschneidet.

Fassen wir nun einen Elementarkegel von dem sehr kleinen räumlichen Winkel $d\Omega$ ins Auge, so ist die in ihm enthaltene Lichtmenge:

$$dL = K \cdot d\Omega. \tag{61}$$

Die Größe K wird die Lichtstärke (Leuchtkraft) der Lichtquelle Q in Richtung der Kegelachse genannt. Sie hat die physikalische Bedeutung, daß sie diejenige Lichtmenge bedeutet, welche Q auf die Flächeneinheit in der Einheit der Entfernung sendet, falls diese Fläche senkrecht zu den Lichtstrahlen liegt, denn dann ist $d\Omega = 1$.

Die Lichtstärke kann im allgemeinen von der Richtung der Lichtstrahlen abhängen. Die Gesamtlichtmenge M drückt sich daher nach (61) aus durch

$$M = \int K \cdot d\Omega, \tag{62}$$

wobei das Integral ganz um die Lichtquelle Q herum zu summieren

1) Im folgenden wird stets vollkommene Durchsichtigkeit des Mediums vorausgesetzt.

2) Die hier vorangestellten Definitionen ergeben sich als notwendig, sowie man die Lichtmenge als die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt der Röhre hindurchgehende Energie auffaßt. Solche tiefer gehende physikalische Vorstellungen sollen aber hier vermieden werden, um nicht zu sehr den Boden der geometrischen Optik zu verlassen.

ist. Falls K unabhängig von der Richtung der Lichtstrahlen wäre, so würde folgen

$$M = 4\pi K,$$

da die Summe der räumlichen Öffnungen aller um Q befindlichen Elementarkegel gleich der Oberfläche einer um Q mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel ist, d. h. gleich 4π. Die mittlere Lichtstärke K_m wird definiert durch

$$K_m = \frac{\int K\, d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{M}{4\pi}. \tag{63}$$

Schneidet nun der Elementarkegel $d\Omega$ aus einer beliebig liegenden Fläche S ein kleines Stück dS heraus, dessen Normale den Neigungswinkel Θ mit der Kegelachse bildet, und welches in der Entfernung r von der Spitze Q des Kegels, d. h. der Lichtquelle, liegt, so ergibt eine einfache geometrische Betrachtung die Beziehung:

$$d\Omega \cdot r^2 = dS \cdot \cos\ \Theta. \tag{64}$$

Aus (61) folgt also für die auf dS fallende Lichtmenge:

$$dL = K \frac{dS \,.\, \cos\ \Theta}{r^2}. \tag{65}$$

Die auf die Flächeneinheit fallende Lichtmenge wird die Beleuchtungsstärke B genannt. Aus (65) ergibt sich für sie

$$B = K \frac{\cos\ \Theta}{r^2}, \tag{66}$$

d. h. die Beleuchtungsstärke ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung von der punktförmigen Lichtquelle und proportional dem Kosinus des Neigungswinkels der Normale der beleuchteten Fläche gegen die Lichtstrahlen.

Wenn die hier aufgestellten Definitionen wirklich brauchbar sind, so muß unserem Auge ein Schirm gleichhell beleuchtet erscheinen, wenn die Beleuchtungsstärke dieselbe ist. Das zeigt nun in der Tat der Versuch, wenn man mehrere gleiche Lichtquellen Q, sagen wir z. B. Stearinkerzen, auf ihre Beleuchtungswirkung hin prüft. Eine Kerze in 1 m Entfernung vor einem Schirm S läßt denselben nämlich in gleicher Helligkeit erscheinen, wie vier dicht zusammengestellte Kerzen in 2 m Entfernung.

Wir besitzen daher ein einfaches Mittel, um Lichtstärken relativ zu vergleichen: Man läßt zwei Lichtquellen Q_1 und Q_2 in solchen Entfernungen r_1 und r_2 einen Schirm (bei gleichem Θ) beleuchten, daß die Beleuchtungsstärke auf ihm gleich erscheint.

Dann verhalten sich die Lichtstärken K_1 und K_2 der beiden Lichtquellen wie die Quadrate der Entfernungen $r_1^2 : r_2^2$. Um eine solche Vergleichung scharf ausführen zu können, dient das Photometer. Das vollkommenste dieser Instrumente[1]) ist wohl heutzutage das von Lummer und Brodhun konstruierte.

Der wesentlichste Teil dieses Instrumentes ist ein Glaswürfel, der aus zwei mit ihren Hypotenusenflächen gut eben aufeinander abgeschliffenen rechtwinkligen Prismen A, B besteht (vgl. Figur 33). Nachdem an der Hypotenusenfläche des einen Prismas A durch Anschleifen einer Kugelfläche die obere Glasschicht bis auf eine

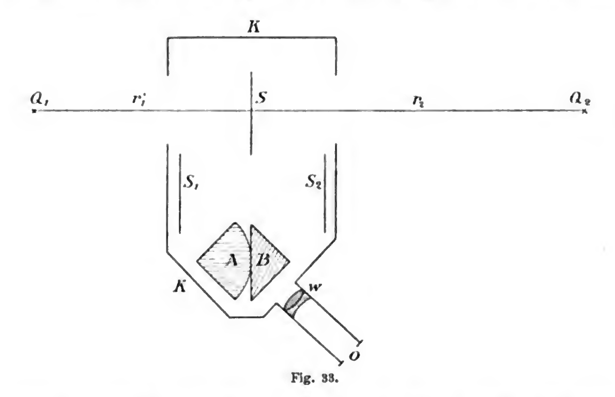


Fig. 33.

scharf begrenzte Kreisfläche entfernt ist, wird dieses Prisma so fest gegen das andere (B) gepreßt, daß an der Berührungsstelle keine Luftschicht zwischen den Prismen bleibt. Ein Auge bei o, welches mit Hilfe einer Lupe w senkrecht zur Kathetenfläche des Prismas B blickt, erhält durchgehendes und totalreflektiertes Licht unmittelbar nebeneinander. Zwischen die beiden zu vergleichenden Lichtquellen Q_1 und Q_2 wird ein auf beiden Seiten gleich beschaffener Schirm S von weißem Gips gestellt; das von S diffus ausgestrahlte Licht wird durch die beiden Spiegel S_1 und S_2 zu

1) Eine vollständige Übersicht über diese Instrumente, sowie überhaupt über die Grundsätze der Photometrie ist u. a. in Winkelmanns Handbuch d. Physik, Optik, 2. Aufl., S. 747 (Autor Brodhun) gegeben; vgl. ferner E. Liebenthal, Praktische Photometrie, Braunschweig 1907.

den Glaswürfeln A, B reflektiert. Sind die Beleuchtungsstärken beider Seiten von S einander gleich, so erblickt das Auge in o den Glaswürfel gleichmäßig erhellt, d. h. die Figur, welche durchgehendes und reflektiertes Licht trennt, verschwindet. Die Lichtquellen Q_1 und Q_2 werden nun in solche Entfernungen r_1 und r_2 vom Schirm S gebracht, bis daß dieses Verschwinden der Trennungsfigur im Glaswürfel eintritt. — Um sich frei von einem Fehler zu machen, der durch etwaige Ungleichheit beider Seiten von S entstehen kann, ist es zweckmäßig, eine zweite Messung auszuführen, bei der die Lage der beiden Lichtquellen Q_1 und Q_2 die umgekehrte ist, d. h. so, daß Q_1 rechts von S und Q_2 links von S steht. Der Schirm S ist mit den Spiegeln S_1, S_2 und dem Glaswürfel fest im Instrument durch den Kasten KK verbunden.

Als Lichteinheit, d. h. als diejenige Lichtstärke, auf welche alle anderen Lichtstärken bezogen werden, benutzt man in Deutschland heute allgemein das sogenannte Hefnerlicht, eine durch v. Hefner-Alteneck eingeführte Lampe, die mit Amylazetat gespeist wird und deren Flammenhöhe 40 mm betragen soll.

Hat man die Lichtstärke irgend einer Lichtquelle gemessen, so berechnet sich die Beleuchtungsstärke an irgend einer Stelle nach (66). Die Maßeinheit der Beleuchtungsstärke ist die Meterkerze, d. h. diejenige Beleuchtungsstärke, welche eine Kerze in 1 m (horizontaler) Entfernung auf einen senkrecht gegen die Lichtstrahlen liegenden Schirm wirft. So z. B. bedeutet eine Beleuchtungsstärke von 50 Meterkerzen, welche beim Lesen gefordert wird, die gleiche Beleuchtungsstärke, welche 50 Kerzen in 1 m Entfernung auf dem senkrecht gegen das Licht gehaltenen Buche hervorbringen, oder 12—13 Kerzen in $^1/_2$ m Entfernung, oder 1 Kerze in $^1/_7$ m Entfernung.

Die Photometrierung verschiedenfarbigen Lichtes bietet große Schwierigkeiten. Nach Purkinje variiert die Helligkeitsdifferenz zweier verschieden gefärbter Flächen mit der Größe der Beleuchtungsstärke.[1]) Beim Photometrieren gehen also physiologische Eigentümlichkeiten unseres Sehorgans in die Beobachtungen ein, und hierdurch kommt notwendig eine Unsicherheit in der Vergleichung zweier Lichtenergien zustande.

1) Selbst in dem Falle, daß beide Lichtquellen farblos erscheinen, aber aus verschiedenen Farben zusammengesetzt sind, kann die Photometrierung durch physiologische Einflüsse unsicher werden. Vgl. darüber A. Tschermak, Arch. f. ges. Physiologie, 70, S. 297, 1898.

Wenn wir die Lichtquelle Q nicht als sehr klein (punktförmig), sondern als Fläche auffassen müssen, so hängt die ausgestrahlte Lichtmenge nicht nur von der Größe der Fläche, sondern auch von ihrer Neigung gegen die Lichtstrahlen ab.

Eine glühende Metallkugel erscheint dem Auge gleichmäßig hell. In allen Elementarkegeln von gleichem Öffnungswinkel $d\omega$, deren Spitze im Auge liegt, und die die Metallkugel treffen, muß daher ein und dieselbe Lichtmenge enthalten sein. Da nun aber [vgl. dazu die frühere Formel (64)] diese Kegel aus der Metallkugel ein Flächenstück ds der Größe

$$ds = \frac{d\omega \cdot r^2}{\cos \vartheta} \tag{67}$$

herausschneiden, falls ϑ den Neigungswinkel der Normale von ds gegen die Kegelachse bezeichnet, so ist das Flächenstück, welches die gleiche Lichtmenge liefert, um so größer (proportional mit $1 : \cos \vartheta$), je schiefer es zu den Lichtstrahlen liegt.

Wir erhalten daher für die Lichtmenge dL, welche ein Flächenelement ds einem anderen Flächenelement dS zustrahlt, durch Berücksichtigung der früheren Formel (65) das von **Lambert** aufgestellte Grundgesetz:

$$dL = \frac{i \cdot ds \cdot dS \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \Theta}{r^2}. \tag{68}$$ [1])

Dabei bezeichnet r die Entfernung der beiden Flächenelemente voneinander und ϑ, Θ die Neigungen der Normalen von ds und dS gegen ihre Verbindungslinie. i wird die **spezifische Lichtintensität** der Fläche ds genannt. Dieselbe ist also diejenige Lichtmenge, welche die Flächeneinheit einer um die Längeneinheit entfernten anderen Flächeneinheit zustrahlt, falls beide Flächenstücke senkrecht zu ihrer Verbindungsstrecke liegen.

In der Formel (68) ist ihre Symmetrie in bezug auf das strahlende und das bestrahlte Flächenstück beachtenswert. Diese Symmetrie kann man in die Worte fassen: **Die Lichtmenge, welche ein Flächenstück der Intensität i einem anderen Flächenstück zustrahlt, ist dieselbe, als ob letzteres mit**

---

1) Diese Formel, welche oft kurz das Kosinusgesetz der Strahlung genannt wird, ist aber nur angenähert richtig. Streng genommen variiert i stets etwas mit ϑ, bei verschiedenen Körpern in verschiedener Weise. Es wird davon noch einmal später bei Besprechung des Kirchhoffschen Gesetzes (III. Abschnitt, Kapitel II) die Rede sein. — Wir wollen aber hier mit der Näherungsformel weiter rechnen, d. h. i als konstant annehmen.

der Intensität i dem ersteren Flächenstück Licht zustrahle.

Wir können die Formel (68) in eine einfachere Gestalt bringen, wenn wir den räumlichen Öffnungswinkel $d\Omega$ einführen, unter dem dS von ds aus erscheint. $d\Omega$ steht nämlich mit dS in der durch die Gleichung (64) angegebenen Beziehung. Es läßt sich daher (68) auch so schreiben:

$$dL = i \cdot ds \cdot \cos\vartheta \cdot d\Omega. \tag{69}$$

Andererseits kann man aber auch den räumlichen Öffnungswinkel $d\omega$ einführen, unter dem ds von dS aus erscheint; seine Größe ist nach (67) gegeben. Daher wird:

$$dL = i \cdot dS \cdot \cos\Theta \cdot d\omega. \tag{70}$$

Die Lichtintensität i steht in einer leicht angebbaren Beziehung zur Gesamtlichtmenge M, welche die Fläche ds ausstrahlt.

Zunächst ergibt ein Vergleich der Formeln (61) und (69), daß die Lichtstärke K der Fläche ds in einer Richtung, die den Winkel ϑ mit ihrer Normalen bildet, den Wert hat

$$K = i\, ds \cos\vartheta. \tag{71}$$

Wir wollen nun zunächst die Lichtmenge berechnen, welche enthalten ist zwischen zwei Kegeln, deren erzeugende Gerade den Winkel ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ mit der Normale auf ds bilden. Den zwischen beiden Kegeln enthaltenen Raum kann man ansehen als einen ringförmigen Elementarkegel der Öffnung

$$d\Omega = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta, \tag{72}$$

denn er schneidet aus einer Kugel vom Radius 1 einen Kreisring der Breite $d\vartheta$ und vom Radius $\sin\vartheta$ aus. Nach den Formeln (69) und (72) ist daher die im ringförmigen Elementarkegel enthaltene Lichtmenge

$$dL = 2\pi\, i\, ds \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

In einem endlichen Kegel, dessen erzeugende Gerade den Winkel U mit der Normale auf ds einschließen, ist daher die Lichtmenge enthalten:

$$L = 2\pi\, i\, ds \int_0^U \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta = \pi\, i\, ds \sin^2 U. \tag{73}$$

Um die Gesamtlichtmenge M zu finden, ist hierin $U = \pi/2$ zu setzen und das Resultat mit 2 zu multiplizieren, falls das Flächenelement ds nach beiden Seiten mit der Intensität i strahlt. Dies gibt

$$M = 2\pi\, i\, ds. \tag{74}$$

5. Die Intensität und Beleuchtungsstärke optischer Bilder. Auf der Achse eines zentrierten optischen Systems liege ein senkrecht zur Achse stehendes Flächenelement ds, welches mit der Intensität i leuchte. Bezeichnet U den Winkel, den die Randstrahlen, d. h. die von ds zum Rande der Eintrittspupille hinzielenden Strahlen mit der Achse des Systems bilden, so ist nach (73) die Lichtmenge, welche in das System gelangt

$$L = \pi \, i \, ds \sin^2 U. \tag{75}$$

Dieselbe ist also um so größer, je größer U, d. h. je größer die Eintrittspupille des Systems ist. Wenn nun ds' das optische Bild von ds ist, und U' der Winkel, den die Randstrahlen des Bildes, d. h. die vom Rande der Austrittspupille zum Bilde hinzielenden Strahlen, mit der Achse des Systems machen, so wollen wir zunächst nach der Intensität i' des optischen Bildes fragen. Nach der Formel (73) würde die Lichtmenge, welche vom Bilde ausstrahlt, gegeben sein durch

$$L' = \pi \, i' \, ds' \sin^2 U'. \tag{76}$$

Nun kann aber L' höchstens gleich L sein, falls nämlich Lichtverluste durch Reflexion und Absorption ganz ausgeschlossen wären, da dann nach der Festsetzung der S. 72 die Lichtmenge innerhalb einer Lichtröhre konstant bleibt. Setzen wir diesen günstigsten Fall voraus, so folgt aus (75) und (76):

$$i' = i \frac{ds \sin^2 U}{ds' \sin^2 U'}. \tag{77}$$

Wenn nun aber ds' das optische Bild von ds ist, so folgt aus dem Sinussatz [Formel (46) S. 58]

$$\frac{ds \sin^2 U}{ds' \sin^2 U'} = \frac{n'^2}{n^2}, \tag{78}$$

falls n der Brechungsindex des Objektraumes und n' der Brechungsindex des Bildraumes ist. Daher ergibt sich aus (77)

$$i' = i \frac{n'^2}{n^2}. \tag{79}$$

Sind die Brechungsindizes des Bild- und Objektraumes einander gleich, so ist also die Intensität des optischen Bildes höchstens gleich der Intensität des Objektes.

Wenn wir also z. B. durch ein Brennglas ein reelles Sonnenbild entwerfen, so ist die Intensität in ihm nicht gesteigert gegen-

über der der Sonne. Trotzdem ist aber die Beleuchtungsstärke durch das Brennglas sehr verstärkt, um so mehr, je größer seine Öffnung und je kürzer seine Brennweite ist. Die Beleuchtungsstärke B wird erhalten, indem man in (76) L' durch ds' dividiert. Falls $n = n'$, so folgt daher aus (76) $B = \pi\, i\, \sin^2 U'$. Die Verstärkung der Beleuchtungsstärke durch das System wird am anschaulichsten, wenn wir bedenken, daß alle Lichtröhren, welche durch das Bild ds' gehen, auch durch die Austrittspupille hindurchtreten. Die gesamte Lichtmenge, welche im Bilde ds' vereinigt wird, ist daher nach dem Lehrsatz der S. 76 dieselbe, als ob die ganze Austrittspupille mit der Intensität i der Sonne dem Elemente ds' Licht zustrahle. Die Wirkung des Brennglases ist also ganz dieselbe, als ob das Element ds' ohne Brennglas der Sonne so nahe gebracht wäre, daß sie von ds' aus unter demselben Sehwinkel erscheint, wie die Austrittspupille (freie Öffnung) des Brennglases von ihrem Brennpunkte aus.

Dieselbe Betrachtung gilt für jedes optische Instrument, alle Vorrichtungen zur Lichtkonzentration können nur das Ziel verfolgen, mit Hilfe einer gegebenen Lichtquelle von kleinen Dimensionen oder an einem sehr entfernten Orte dennoch einen solchen Effekt zu bewirken, wie er ohne Vorrichtung direkt nur durch eine gleich intensive, ausgedehntere oder in größerer Nähe befindliche Lichtquelle erreichbar wäre.

Im Falle, daß n und n' voneinander verschieden sind, kann man eine Steigerung der Intensität des optischen Bildes erreichen, wenn $n < n'$ ist. Dies ist z. B. der Fall bei den Immersionssystemen der Mikroskope, falls das Licht einer Quelle Q im Medium $n = 1$ durch ein Sammellinsensystem (Kondensor) vor dem Objektiv in einem Raume von größerem Brechungsindex n (Immersionsflüssigkeit) vereinigt wird. Die Lichtmenge, welche in das Mikroskop hineingelangt, ist daher proportional mit $n^2 \sin^2 U$, wobei U den Randstrahlwinkel zur Eintrittspupille bedeutet. Das Produkt

$$n \sin U = a \tag{80}$$

wird nach Abbe die numerische Apertur des Instrumentes genannt. Die aufgenommene Lichtmenge ist also proportional dem Quadrate der numerischen Apertur. — Die Intensität im optischen Bilde, welches wiederum in Luft ($n = 1$) liegt, ist natürlich höchstens gleich der Intensität der Lichtquelle Q.

6. Die subjektive Helligkeit optischer Bilder. Man hat zu unterscheiden zwischen der (objektiven) Beleuchtungsstärke, welche von einer leuchtenden Fläche s an einem Orte O hervorgebracht wird, und der (subjektiven) Helligkeit, mit welcher eine solche Fläche von einem Beobachter gesehen wird. Die Lichtempfindung wird durch die Bestrahlung kleiner lichtempfindlicher Elemente auf der Netzhaut im Auge vermittelt. Wenn es sich um eine leuchtende Fläche s handelt, so ist ihr Bild auf der Netzhaut ebenfalls eine kleine Fläche s', welche sehr viele lichtempfindliche Elemente erregt. Wir definieren nun als Helligkeit der Fläche s die Lichtmenge, welche auf die Flächeneinheit der Netzhaut fällt, d. h. die Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut.

Betrachten wir nun zunächst die Lichtquelle ohne Zwischenschaltung eines optischen Systems vor das Auge, so ist letzteres selbst als ein optisches System aufzufassen, für welches die früheren Betrachtungen gelten. Die Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut wird also aus den Formeln (76), (79) erhalten, mit der Berücksichtigung, daß hier die Brechungsexponenten n des Objektraumes und des Bildraumes n' (hintere Augenkammer) im allgemeinen voneinander verschieden sind. Daher wird die Helligkeit H_0 ohne Zwischenschaltung eines optischen Instrumentes und unter der Annahme, daß die Lichtquelle im Medium des Brechungsindex $n = 1$ strahle, die sogenannte natürliche Helligkeit:

$$H_0 = \pi\, i\, n' \sin^2 W_0'. \tag{81}$$

Hierin bezeichnet i die Intensität der Lichtquelle, falls man von Lichtverlusten beim Durchgang der Strahlen durchs Auge absieht. W_0' ist der Winkel, den die vom Mittelpunkte des Bildes auf der Netzhaut nach dem Rande der Pupille (strenger nach dem Rande des von der Kristallinse des Auges entworfenen Bildes der Irisöffnung) hinzielenden Strahlen mit der Augenachse bilden, d. h. es ist $2\,W_0'$ der Projektionswinkel im Auge (vgl. oben S. 68). Wenn die Pupillengröße konstant bleibt, so ist W_0' ebenfalls konstant. Die Helligkeit H_0 hängt dann also nur von der Intensität i der Lichtquelle ab, ist aber von der Entfernung derselben vom Auge gänzlich unabhängig.

In der Tat entspricht dies auch innerhalb gewisser Grenzen dem physiologischen Eindruck. Bei sehr großer Annäherung an die Lichtquelle, bei der das optische Bild auf der Netzhaut erheblich größer wird, empfindet man allerdings eher den Eindruck

der Blendung, was man als ein Wachsen des Helligkeitseindrucks ansehen kann. — Bei Verkleinerung der Pupille wird W_0' kleiner, daher auch H_0 geringer.

Schalten wir nun ein optisches Instrument vor das Auge, so kann ersteres inklusive letzterem in Summa wiederum als ein einziges System aufgefaßt werden, für welches die früheren Betrachtungen gelten. Es soll das Auge an den Ort der Austrittspupille des Instrumentes gebracht werden, was nach S. 71 zur möglichsten Ausnutzung des Gesichtsfeldes günstig ist. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Austrittspupille des Instrumentes ist größer oder mindestens gleich der Augenpupille. Dann ist der Projektionswinkel $2W'$ des Bildes im Auge durch die Augenpupille bestimmt, d. h. es ist $W' = W_0'$. Für die Helligkeit gilt die Formel (81), wobei i höchstens gleich der Intensität der Lichtquelle ist; wenn man nämlich von allen Lichtverlusten im Instrumente und im Auge absähe, und falls die Lichtquelle, wie bei (81) vorausgesetzt war, in einem Medium vom Brechungsindex $n = 1$ strahlt. Ist dieser Brechungsindex von 1 verschieden, so wäre H noch durch n^2 zu dividieren. Dieser Fall ist aber bei den gebräuchlichen Instrumenten nie realisiert. Die eigentliche Lichtquelle liegt stets in Luft, oder (z. B. bei der Sonne) im Weltraum; für die Immersionssysteme der Mikroskope z. B. gilt dies ebenfalls, denn die Lichtquelle ist nicht das in der Immersionsflüssigkeit eingebettete Objekt, sondern dies wird nur durchleuchtet. Der Selbstleuchter ist der helle Himmel, die Sonne, eine Lampe usw. Wir wollen also stets an der Annahme festhalten, daß die Lichtquelle in einem Medium des Brechungsindex $n = 1$ strahle, und erhalten so das Resultat: Die Helligkeit des optischen Bildes, welches das Instrument liefert, ist gleich der natürlichen Helligkeit der Lichtquelle, falls keine Lichtverluste durch Reflexion und Absorption im Instrument einträten.

2. Die Austrittspupille des Instrumentes ist kleiner als die Augenpupille. Dann gilt für die Helligkeit H die zu (81) analoge Formel

$$H = \pi\, i\, n'^2 \sin^2 W', \tag{82}$$

wobei i höchstens gleich der Intensität der Lichtquelle ist (bei Absehen von Reflexionsverlusten im Instrument), und worin $2W'$ der Projektionswinkel des Bildes im Auge ist. Nun ist aber $W' < W_0'$, d. h. die Helligkeit des optischen Bildes ist

kleiner als die natürliche Helligkeit der Lichtquelle. Das Verhältnis beider Helligkeiten folgt aus (81) und (82) zu:

$$H : H_0 = \sin^2 W' : \sin^2 W_0' . \tag{83}$$

Da nun W_0' und um so mehr W' kleine Winkel sind (beim menschlichen Auge ist W_0' etwa 5^0), bei denen man den *sin* mit *tg* vertauschen kann, so ist die rechte Seite von (83), d. h. das Verhältnis der Helligkeit des Bildes zur natürlichen Helligkeit der Lichtquelle, gleich dem Verhältnis der Größe der Austrittspupille des Instrumentes zu der Größe der Augenpupille (dem von der Hornhaut und vorderen Augenkammer entworfenen Bilde der Irisöffnung). — Zusammenfassend können wir also sagen: Bei flächenhaft ausgedehnten Objekten kann jedes optische Instrument nur das Ziel verfolgen, das Objekt dem Auge im Bilde unter vergrößertem Sehwinkel darzubieten, aber in höchstens der gleichen Helligkeit.

Diese Resultate hätte man auch in folgender Weise erhalten können. Nach dem Satze der S. 78 ist die Intensität des Bildes gleich der der Lichtquelle (bei $n = n' = 1$ und bei Vernachlässigung der Reflexions- und Absorptionsverluste im Instrument). Das optische Instrument bewirkt also nur eine scheinbare Ortsveränderung der Lichtquelle. Da nun aber die Helligkeit derselben von ihrem Orte nach dem Satze der S. 80 ganz unabhängig ist, solange die ganze Pupille des Auge von Lichtstrahlen angefüllt wird, so ist die Helligkeit des Bildes gleich der natürlichen der Lichtquelle. Falls aber die Austrittspupille kleiner als die Augenpupille ist, so wird letztere nicht ganz von Lichtstrahlen erfüllt, d. h. die Helligkeit des Bildes muß kleiner sein als die natürliche Helligkeit. Das Verhältnis ergibt sich in diesem Falle, wie es vorhin festgestellt wurde, da die Neigungen der Bildstrahlen gegen die Achse bei den Entfernungen des Bildes vom Auge, auf denen man noch mit dem Auge deutlich sehen kann, sehr klein sind.

Befindet sich das Bild ds' einer leuchtenden Fläche ds in der Entfernung δ von der Austrittspupille (d. h. auch vom Auge, da dies an den Ort der Austrittspupille gebracht sein soll), so ist $\delta \, tg\, U'$ der Radius der Austrittspupille, wobei $2\,U'$ der Projektionswinkel des Bildes (in Luft) ist. Man erhält daher, bei Vertauschung des $\sin U'$ mit $tg\, U'$ für das Verhältnis der Helligkeit H des Bildes zur natürlichen Helligkeit H_0 der Lichtquelle,

falls die Austrittspupille kleiner als die Augenpupille ist, deren Radius p sei:

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\delta^2 \sin^2 U'}{p^2}.$$

Nun ist nach dem Sinussatz [vgl. Formel (78)] zu schreiben (am Bildorte ist der Brechungsindex $n' = 1$),

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\delta^2 n^2 \sin^2 U}{p^2} \cdot \frac{ds}{ds'}, \tag{84}$$

wobei ds das zu ds' konjugierte Flächenelement ist, dessen Randstrahlen den Winkel U mit der Achse des Instrumentes bilden. n sei der Brechungsindex am Orte von ds, es ist also $n \sin U = a$ [Formel (80)] gleich der numerischen Apertur des Systems. $ds' : ds$ ist das Quadrat der Lateralvergrößerung des Instrumentes. Bezeichnet man diese mit V, so wird (84) zu

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\delta^2 a^2}{p^2 V^2}. \tag{85}$$

Diese Formel gilt also nur, solange $H < H_0$ ist. Sie zeigt deutlich den Einfluß der numerischen Apertur auf die Bildhelligkeit und ist bei der Theorie des Mikroskops von großer Bedeutung.

Man nennt die Normalvergrößerung eines optischen Instrumentes diejenige, bei der seine Austrittspupille gleich der Augenpupille ist, bei der also die Bilder gerade noch die natürliche Helligkeit der Lichtquelle besitzen. Nimmt man den Radius p der Pupille zu 2 mm an, die Distanz δ des Bildes vom Auge zu 25 cm (deutliche Sehweite), so folgen aus (85) für verschiedene numerische Aperturen folgende Normalvergrößerungen V_n:

$$a = 0{,}5 \qquad V_n = 62$$
$$a = 1{,}0 \qquad V_n = 125$$
$$a = 1{,}5 \qquad V_n = 187.$$

Für die doppelten Vergrößerungen $V = 2 \cdot V_n$ ist die Helligkeit H der vierte Teil der natürlichen Helligkeit H_0. Man kann diese Vergrößerungen etwa als Grenze für die unverminderte Deutlichkeit des Bildes ansehen. Bei $a = 1{,}5$ wäre dies also etwa eine 380fache Vergrößerung. Bei einer 1000fachen Vergrößerung und der Apertur $a = 1{,}5$ ist die Helligkeit H der 27. Teil der natürlichen Helligkeit H_0.

Für Fernrohre ist die Formel (85) praktisch etwas umzugestalten. Ist nämlich h der Radius der freien Öffnung des Fernrohrs (Radius seines Objektivs), so ist nach Formel (14') auf S. 27

der Radius seiner Austrittspupille gleich $h : \Gamma$, wobei Γ die (Angular)vergrößerung des Fernrohrs ist. Daher wird das Verhältnis von Austrittspupille zu Augenpupille:

$$\frac{H}{H_0} = \frac{h^2}{p^2 \Gamma^2}. \tag{86}$$

Für die Normalvergrößerung Γ_n eines Fernrohrs muß also das Objektiv des Radius $p \cdot \Gamma_n$ besitzen, d. h. 2, 4, 6, 8 usw. mm, falls die Normalvergrößerung den Wert 1, 2, 3, 4 usw. hat und p zu 2 mm angenommen wird. Für die Normalvergrößerung 100 muß also z. B. das Objektiv einen Radius von 20 cm besitzen.

7. Die Helligkeit punktförmiger Lichtquellen. Die Gesetze für die Lichtstärke optischer Bilder von flächenhaften Objekten gelten nicht mehr, wenn punktförmige Objekte, wie z. B. Fixsterne, zur Abbildung gelangen. Ihr Netzhautbild ist nämlich (wegen Beugung am Pupillenrande) immer von gleicher Größe, die nur vom Pupillendurchmesser abhängt (Vgl. dazu die Entwickelungen Kapitel IV des I. Abschnittes der physikal. Optik.) Solange der Sehwinkel eines Objektes etwa eine Winkelminute nicht überschreitet, ist es in diesem Sinne als punktförmig aufzufassen.

Die Helligkeit punktförmiger Lichtquellen P wird bestimmt durch die Lichtmenge, welche von P ins Auge gelangt. Die natürliche Helligkeit H_0 ist daher proportional der Größe der Pupille und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung P vom Auge. — Bei Betrachtung mit Hilfe eines optischen Instrumentes gelangt alles Licht von P, welche durch die Eintrittspupille des Instrumentes tritt, in das Auge, falls die Austrittspupille kleiner als die Augenpupille ist, d. h. wenn die Normalvergrößerung des Fernrohrs überschritten wird. Bildet daher der Rand des Objektivs seine Eintrittspupille, so ist die Helligkeit einer sehr entfernten[1]) Lichtquelle (Stern) im Verhältnis der Größe des Objektivs zur Augenpupille verstärkt gegenüber der natürlichen Helligkeit.

Wenn aber die Normalvergrößerung des Fernrohrs noch nicht erreicht ist, d. h. wenn seine Austrittspupille größer als die Augenpupille ist, so bildet letztere bei Benutzung des Instrumentes seine Austrittspupille, das vom Fernrohr entworfene Bild der Augenpupille ist seine Eintrittspupille. Nach Formel (14') auf S. 27 ist letztere Γ^2mal größer als die Augenpupille, falls Γ die Ver-

1) Die Lichtquelle soll in einer solchen Entfernung liegen, daß ihr gegenüber die Fernrohrlänge zu vernachlässigen ist.

größerung des Fernrohrs bezeichnet. Daher ist die Helligkeit des Sternes I^2mal größer als die natürliche Helligkeit.

Da man also die Helligkeit von Sternen bei Betrachtung mit einem Fernrohr vergrößern kann, während die Helligkeit ihres Hintergrundes nicht vergrößert, sondern eventuell (bei Überschreitung der Normalvergrößerung) verringert wird, so hebt sich im Fernrohr der Stern deutlicher vom Hintergrunde ab und kann eventuell (bei großen Fernrohren) bei Tage gesehen werden.

8. Die Bedeutung der Apertur für die Leistungsfähigkeit optischer Instrumente. Bisher ist die Bedeutung der Apertur für den geometrischen Verlauf des Strahlenganges und für die Bildhelligkeit behandelt worden. Die Apertur ist aber drittens auch noch bestimmend für die Leistungsfähigkeit des Instrumentes, d. h. sein Vermögen, zwei Gegenstände, welche das unbewaffnete Auge nicht zu unterscheiden vermag, optisch zu trennen. Schon oben S. 50 ist darauf hingewiesen, daß sehr enge Strahlenbüschel wegen sogenannter Beugungserscheinungen schlechte Bilder liefern. Das Auftreten derselben ist bestimmend für die Grenze der Leistungsfähigkeit optischer Instrumente, und es ist von vornherein klar, daß diese Grenze aus diesem Grunde um so weiter hinausgeschoben werden kann, je weiter die die Abbildung vermittelnden Strahlenbüschel sind, d. h. je größer die Apertur des Instrumentes ist. Die zahlenmäßigen Beziehungen, welche man hier aufstellen kann, sollen aber erst später in dem Kapitel über die Beugung des Lichtes hergeleitet werden. Vorgreifend soll hier nur bemerkt werden, daß durch das Mikroskop zwei Objektpunkte der gegenseitigen Distanz d noch optisch getrennt werden können, falls ist:

$$d \geq \frac{\lambda}{2a}, \tag{87}$$

wobei λ die (später definierte) Wellenlänge des Lichtes in Luft, a die numerische Apertur des Mikroskops ist. Das Fernrohr kann zwei Objekte noch optisch auflösen, falls sie unter einem Sehwinkel φ erscheinen, der gegeben ist durch

$$\varphi \geqq 0{,}6\,\frac{\lambda}{h}, \tag{88}$$

wobei h der Öffnungsradius des Fernrohrs ist.

Kapitel V.

Optische Instrumente.[1])

1. Photographische Systeme. Bei der Landschaftsphotographie soll das optische System auf der lichtempfindlichen Platte ein reelles Bild von dem weit ausgedehnten Objektraum entwerfen. Die Öffnung der abbildenden Strahlenbüschel ist verhältnismäßig eng. Schon früher (S. 59) ist auf die Bildfehler hingewiesen, welche hierbei hauptsächlich zu vermeiden sind. Auch ist dort der Vorteil der symmetrischen Doppelobjektive besprochen, sowie der Einfluß geeignet gestellter Blenden zur Erreichung der Bildähnlichkeit. Doch auch für die Ebnung des Bildes kann die Lage der Blende von Einfluß sein.

Eine möglichste Ebnung des Bildes kann nun auch bei zwei aufeinander gelegten dünnen Linsen der Brennweiten f_1 und f_2 und der Brechungsindizes n_1 und n_2 erreicht werden, falls die Bedingung[2]) erfüllt ist:

$$n_1 f_1 = - n_2 f_2. \tag{1}$$

Die Bedingung der Achromasie lautete nach Formel (54) S. 65 für zwei dünne Linsen:

$$\nu_2 f_1 = - \nu_1 f_2. \tag{2}$$

Beide Bedingungen (1) und (2) können nur dann gleichzeitig erfüllt werden, wenn die Linse mit größerem Brechungsindex n das kleinere Dispersionsvermögen ν besitzt. Früher hatte man nur Glassorten, welche diese Bedingung nicht erfüllten, d. h. welche bei höherem Brechungsindex auch stärkere Dispersion besaßen; das schwach brechende Crownglas besaß eine geringe Dispersion, das stark brechende Flintglas eine hohe Dispersion. Erst die neueren von Schott in Jena hergestellten Gläser zeigen zum Teil auch das umgekehrte Verhalten,[3]) und seitdem[4]) ist es möglich, mit

---

1) Betreffs ausführlicherer Darstellung vgl. Hdb. d. Physik von Winkelmann, Optik, 2. Aufl., S. 295 ff. (Autor Czapski u. Rohr). — M. v. Rohr, Die Theorie der optischen Instrumente I, Berlin 1904 (J. Springer). — Müller-Pouillet, Physik, 9. Aufl. Optik, S. 721 ff. (Autor Lummer); 10. Aufl. S. 460.

2) Über die Herleitung dieser schon von Petzval im Jahre 1843 ausgesprochenen Bedingung vgl. Lummer, Ztschr. f. Instrumentenkunde 1897, S. 231, wo überhaupt in drei Arbeiten (S. 208, 225, 264) eine vorzügliche Übersicht über die photographische Optik gegeben ist.

3) Die Baryumsilikatgläser haben stärkere Brechung als das gewöhnliche Crownglas, aber geringere Dispersion.

4) Für unverkittete Linsen gilt allerdings die Petzvalsche Gleichung nicht,

der Achromasie zugleich die Ebnung des Bildes zu erreichen. Solche Linsensysteme werden Neuachromate im Gegensatz zu den früheren (Altachromaten) genannt.

Auch noch aus einem anderen Grunde bietet die Anwendung der neuen Glassorten, welche mit wachsendem n kleinere Dispersion ν besitzen, Vorteile für die photographische Optik: Verbindet man einen Altachromaten mit einem Neuachromaten, so läßt sich der Astigmatismus heben, weil ersterer mit seiner dispansiv wirkenden Kittfläche eine astigmatische Differenz von entgegengesetztem Vorzeichen erzeugt, als letzterer mit seiner kollektiv wirkenden Kittfläche. Solche symmetrische Doppelobjektive, welche auf beiden Seiten alt- und neuachromatische Kombinationen besitzen, heißen Anastigmat[1]-Aplanate.

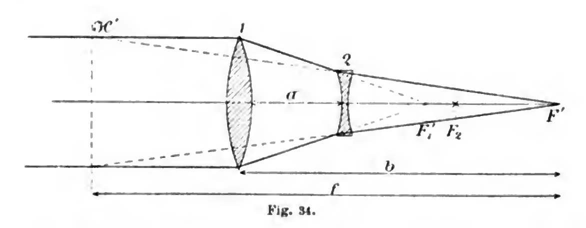


Fig. 34.

Um ferne Gegenstände möglichst groß abzubilden, muß die Brennweite f des Systems möglichst groß sein. Dadurch wird aber eine unbequeme Verlängerung der photographischen Camera erzielt, falls das System aus nahe zusammenstehenden Linsen besteht, da dann annähernd die Cameralänge b gleich der Brennweite f sein muß. Man kann diesen Übelstand vermeiden durch das sogenannte Teleobjektiv, bei welchem ein Kollektivsystem mit einem im Abstand a von ihm befindlichen Dispansivsystem verknüpft ist. Das letztere entwirft nach der Figur 22 auf S. 41 aufrechte, reelle, vergrößerte Bilder von virtuellen Objekten, die hinter der Dispansivlinse, aber noch vor ihrem hinteren Brennpunkte F_2 liegen. Dort muß also der Brennpunkt F_1' des vorderen

und daher kann man dann auch mit den alten Glassorten Bildebnung und Achromasie erfüllen; vgl. dazu K. Martin, Centr.-Ztg. f. Optik u. Mechanik, Nr. 13, 1901.

1) An Stelle der zweifachen Negationen in „Anastigmat" wäre das Wort „Stigmat" einfacher.

Kollektivsystems liegen. Wie der in Figur 34 gezeichnete Strahlengang ergibt, ist die Brennweite f des ganzen Systems größer als die Distanz des Kollektivsystems vom Bildorte, d. h. die Cameralänge. Um z. B. bei einer Cameralänge von 20 cm (genauer 19,85 cm) eine Brennweite f von 37 cm benutzen zu können, muß man mit einer Sammellinse von 10 cm Brennweite eine Dispansivlinse von 5 cm Brennweite im optischen Intervall Δ von 1,35 cm, d. h. im Abstand 6,35 cm hinter der Sammellinse kombinieren. Diese Zahlen ergeben sich aus den auf S. 28, 29 ermittelten Formeln (17) und (19) eines kombinierten Systems.

Bei der Porträtlinse wird das Hauptgewicht auf die Öffnung gelegt, um möglichste Lichtstärke zu erzielen. Es muß demnach vor allem die sphärische Aberration gehoben und ebenfalls die Sinusbedingung erfüllt sein.

2. Die Lupe. Die scheinbare Größe eines Gegenstandes hängt von der Größe des Sehwinkels ab, unter welchem derselbe erscheint. Durch Annäherung des Gegenstandes an das Auge kann man den Sehwinkel vergrößern, aber nur bis zu einer gewissen Grenze, da der Gegenstand innerhalb der Weite des deutlichen Sehens liegen muß. Durch Anwendung einer Lupe läßt sich aber der Sehwinkel noch weiter vergrößern.

Die einfachste Form der Lupe ist eine Sammellinse. Dieselbe entwirft (vgl. Figur 21 auf S. 41) von einem Objekte, welches zwischen vorderem Brennpunkt und Linse liegt, ein aufrechtes. vergrößertes, virtuelles Bild. Soll dasselbe in der Entfernung $\delta = 25$ cm vom Auge liegen, so ist nach Formel (7) auf S. 20 die Vergrößerung V der Lupe

$$V = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{\delta + a}{f}, \tag{3}$$

worin x' die Entfernung des Bildes vom hinteren Brennpunkte, a die Entfernung des Auges von demselben bezeichnet. Meist kann man a gegenüber δ vernachlässigen, man erhält dann als Vergrößerung der Lupe

$$V = \frac{\delta}{f}. \tag{4}$$

Dieselbe ist also umgekehrt proportional zur Brennweite der Lupe.

Wenn die Lupenlinse größeren Durchmesser besitzt als das von der Lupe entworfene Bild der Augenpupille, so bildet letztere die Aperturblende, erstere die Gesichtsfeldblende. Zur Erreichung eines möglichst großen Gesichtsfeldes ist es daher notwendig,

das Auge der Lupe möglichst nahe zu bringen. Mit wachsender Entfernung des Auges wird nicht nur das Gesichtsfeld beschränkter, sondern auch der Strahlengang (vgl. oben S. 69) ein anderer, indem dann seitliche Objektpunkte durch seitliche Partien der Lupenlinse abgebildet werden. Dies ergibt sich direkt aus einer Zeichnung der Eintrittspupille des Systems, d. h. des Bildes, welches die Lupe von der Augenpupille entwirft. Dadurch wird dann auch meist die Orthoskopie (vgl. oben S. 69) zerstört, d. h. das Bild erscheint am Rande verzerrt.

Eine einfache plankonvexe Linse gibt gute Bilder bis zu achtfacher Vergrößerung, d. h. bis zur Brennweite von 3 cm herunter. Man muß dabei die plane Seite der Linse dem Auge zukehren. Diese Stellung gibt zwar, da das Objekt nahe beim vorderen Brennpunkt der Linse liegt, relativ großen Betrag der



Fig. 35.

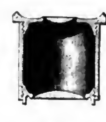


Fig. 36.

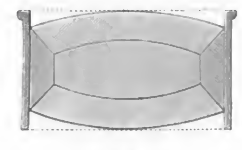


Fig. 37.

sphärischen Aberration in der Achse (vgl. oben S. 53), ist aber trotzdem günstiger als die umgekehrte Stellung der Linse wegen der erheblich geringeren Fehler außerhalb der Achse.

Durch die Anwendung zweier einfacher Linsen wird das Bild wesentlich verbessert, weil durch Verteilung der Brechung auf mehrere Linsen die sphärische Aberration in der Achse bedeutend verringert wird. Die Figuren 35 (Fraunhofersche Lupe) und 36 (Wilsonsche Lupe) geben zwei bekannte Ausführungsformen. Bei der letzteren ist die Distanz beider Linsen noch größer gewählt als bei der ersteren. Man erreicht dadurch den Vorteil, daß die chromatische Differenz der Vergrößerung noch verringert wird, allerdings auf Kosten des Objektabstandes von der Frontlinse.[1])

Eine Achromatisierung durch Wahl verschiedener Glassorten ist in der Steinheilschen sogenannten aplanatischen Lupe erreicht

1) Inwiefern der Abstand der Linsen Einfluß auf die Achromatisierung hat, ist schon oben S. 66 besprochen. Wir kommen hierauf bei Besprechung der Okulare, der Mikroskope und Fernrohre zurück, welche auch als Lupen aufzufassen sind.

(vgl. Figur 37). Bei dieser ist eine bikonvexe Crownglaslinse zwischen zwei Flintglasmenisken eingekittet.

Durch großen Objektabstand zeichnet sich die Brückesche Lupe aus, bei welcher man eine kollektive achromatische Vorderlinse mit einer (einfachen) Zerstreuungslinse in einem gewissen Abstand verbindet. Letztere entwirft (vgl. dazu Figur 22 auf S. 41) von virtuellen Objekten, welche etwas hinter ihrem hinteren Brennpunkt liegen, umgekehrte, vergrößerte, virtuelle Bilder. Die Anordnung der Linsen kann dieselbe wie im Teleobjektiv sein (vgl. Figur 34), d. h. das optische Intervall Δ zwischen der kollektiven und dispansiven Linse kann positiv sein. Bei genügender Nähe des Objektes fällt dann doch das von der Sammellinse entworfene Bild hinter den hinteren Brennpunkt der Zerstreuungslinse. Die Kombination liefert, gerade wie die einfache Lupe, aufrechte Bilder, da das von der Sammellinse entworfene Bild umgekehrt sein würde, und dieses von der Zerstreuungslinse noch einmal umgekehrt wird. Ein Übelstand ist aber das kleine Gesichtsfeld.

3. Das Mikroskop.[1]) a) Allgemeines. Um stärkere Vergrößerungen zu erzielen, wendet man anstatt einer Lupe von sehr kurzer Brennweite viel vorteilhafter das Mikroskop an, das aus zwei in größerem Abstand voneinander befindlichen Kollektivsystemen besteht. Das erste (Objektiv) entwirft von einem Objekte, welches nahe an seinem vorderen Brennpunkte liegt, ein reelles umgekehrtes vergrößertes Bild, welches durch das zweite Kollektivsystem (Okular), das als Lupe wirkt, noch weiter vergrößert wird. Abgesehen davon, daß man durch den größeren Abstand beider Kollektivsysteme, d. h. durch die Tubuslänge des Mikroskops, offenbar stärkere Vergrößerungen erzielen kann, als durch die Kollektivsysteme einzeln, wenn man sie als Lupen benutzen wollte, liegt der Hauptvorteil des Mikroskops darin, daß man die Aufgabe der Abbildung in zwei Teile zerlegt, welche einzeln vom Objektiv und Okular gelöst werden können. Diese Arbeitsteilung besteht darin, daß das Objektiv von einem Flächenelement eine Abbildung vermittelt bei möglichst großer numerischer Apertur,[2]) während das Okular, wie jede Lupe, bei großem Gesichtsfeld eine

1) Vgl. außer der auf S. 86 angegebenen Literatur auch: Ernst Abbe, Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop, herausgegeben von Lummer und Reiche, Braunschweig 1910, Verlag F. Vieweg u. Sohn.

2) Diese Forderung wird gestellt nicht nur zur Erzielung möglichster Bildhelligkeit, sondern auch zum Zweck größter Auflösungskraft. Vgl. oben S. 83 und 85.

Abbildung durch Strahlenbüschel vermitteln soll, die wenig geöffnet sind, da die Bildstrahlen von der Augenpupille begrenzt werden. Diese beiden verschiedenen Aufgaben sind aber nach früheren Auseinandersetzungen (vgl. Kapitel III, §§ 8, 9, 10) einzeln lösbar.

b) Das Objektiv. Die Hauptforderungen an das Objektiv sind: Bei hoher numerischer Apertur soll eintreten:

1. Aufhebung der sphärischen Aberration in der Achse und Herstellung konstanten Sinusverhältnisses (Bedingung des Aplanatismus).

2. Achromatisierung. Diese besteht einerseits darin, daß die Bedingungen des Aplanatismus für mehrere, mindestens zwei Farben erfüllt sind, andererseits in Herstellung eines achromatischen, vom Objekt durch das Objektiv entworfenen reellen Bildes. Begnügt man sich mit teilweiser Achromatisierung (vgl. oben S. 63), so ist die Lage des vorderen Brennpunktes des Objektivs zu achromatisieren. Denn das Objekt, welches nahe bei diesem Brennpunkt F liegt, liefert ein Bild, dessen Ort sehr stark mit der Farbe variieren würde, falls die Lage von F mit der Farbe variierte. Bei einer solchen teilweisen Achromatisierung, in der also die Lage von F, d. h. auch der Bildort, achromatisiert wird, ist die Brennweite nicht achromatisiert. Die verschiedenen Farben entwerfen daher verschieden große Bilder, d. h. es bleibt eine chromatische Differenz der Vergrößerung bestehen. Diese muß dann durch das Okular kompensiert werden.

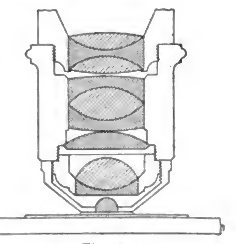


Fig. 38.

Man unterscheidet Trockensysteme und Immersionssysteme. Bei letzteren füllt man den Zwischenraum zwischen der Frontlinse des Objektivs und dem Deckglas, unter dem das Objekt liegt, mit einer Flüssigkeit aus. Die Vorteile der letzteren zur Erhöhung der numerischen Apertur liegen auf der Hand, außerdem kann durch Anwendung sogenannter homogener Immersion, bei der die Flüssigkeit (Zedernholzöl) denselben Brechungsindex und Dispersion wie das Deckglas und die Frontlinse besitzt, das Prinzip von Amici (vgl. oben S. 54), nämlich eine aplanatische Abbildung durch eine stark gewölbte (halbkugelige) Frontlinse, erreicht werden. In der Figur 38 ist in etwa doppelter natürlicher

Größe ein von Abbe konstruiertes Objektiv, Aprochromat genannt, gezeichnet, welches die angegebenen Anforderungen durch Kombination von 10 verschiedenen Linsen erfüllt und mit homogener Immersion arbeitet. Der Aprochromat ist für drei Spektralfarben achromatisiert, ist also frei vom sekundären Spektrum (vgl. oben S. 63), die Bedingungen des Aplanatismus sind für zwei Farben erfüllt. Die Brennweite des ganzen Systems beträgt 2 mm, seine numerische Apertur ist $a = 1{,}40$. Die lichtsammelnde und dioptrische Güte dieses Objektivs ist eine derartige, daß die Grenze der Leistungsfähigkeit des Mikroskops [vgl. oben S. 85, Formel (87)] als tatsächlich erreicht angesehen werden kann.

c) Das Okular. Die Hauptanforderungen an das Okular sind wie bei der Abbildung ausgedehnter Objekte durch enge Büschel:

1. Aufhebung des Astigmatismus in den schiefen Büscheln.
2. Orthoskopische Abbildung.
3. Achromatisierung.

Über die beiden ersteren Punkte ist schon Kapitel III, § 10, S. 59 gesprochen worden; was den dritten Punkt anbelangt, so kann man sich wiederum mit einer teilweisen Achromatisierung begnügen. Nehmen wir zunächst den Fall an, daß das vom Objektiv entworfene Bild ohne chromatische Fehler sei. Die Hauptstrahlen, welche auf das Okular fallen, sind bei der Tubuslänge des Mikroskops, d. h. bei der ziemlich beträchtlichen Entfernung, welche das vom Objektiv entworfene reelle Bild von der Austrittspupille des Objektivs besitzt, nahezu achsenparallel, oder haben wenigstens nur geringe Neigung zur Achse des Mikroskops. Wenn nun die Brennweite des Okulars achromatisiert ist, so spaltet sich, wie aus der oben S. 24 angegebenen Konstruktion konjugierter Strahlen oder aus der S. 21 ausgesprochenen Eigenschaft der Brennweite hervorgeht, ein weißer Strahl, der auf das Okular achsenparallel einfällt, in farbige Strahlen, welche unter gleicher Neigung gegen die Achse aus dem Okular austreten. Ein auf Unendlich akkommodiertes Auge sieht daher ein farbenfreies Bild. Auch wenn dasselbe in der deutlichen Sehweite (25 cm) vom Auge entfernt liegt, so ist doch die Bedingung eines farbenfreien Bildes nahezu die Achromatisierung der Brennweite des Okulars.

Nun wurde oben S. 66 der Satz bewiesen, daß zwei einfache Linsen der Brennweiten f_1 und f_2 aus gleichem Glase in der Distanz $a = \frac{f_1 + f_2}{2}$ für alle Farben gleiche resultierende Brenn-

weite f besitzen. Da man zugleich durch die Zerlegung des Okulars in zwei Linsen eine Bildverbesserung hinsichtlich der Aufhebung des Astigmatismus erzielen kann, so sind die Okulare nach diesem Prinzipe konstruiert. Die dem Objektiv zugewandte Linse des Okulars heißt die Kollektivlinse, die dem Auge zugewandte die Augenlinse.

Diese achromatischen Okulare werden meist in zwei verschiedenen Formen ausgeführt:

1. Das Ramsdensche Okular (vgl. Figur 40, S. 100), welches aus zwei gleichen, plankonvexen, mit ihren gekrümmten Flächen einander zugewandten Linsen besteht. Bei $f_1 = f_2$ folgt der Abstand a dieser Linsen zu $a = f_1 = f_2$. Dies würde aber den Übelstand haben, daß, da die Kollektivlinse von der Augenlinse um ihre Brennweite entfernt ist, etwaige Staubkörnchen oder Kratzen auf der Kollektivlinse durch die Augenlinse deutlich vergrößert gesehen und das Bild stören würden. Man legt daher die Kollektivlinse etwas näher an die Augenlinse, wählt etwa $a = {}^2/_3 f_1$. Man erreicht dadurch noch einen weiteren Vorteil. Das optische Intervall (vgl. oben S. 28) beider Linsen hat für $a = {}^2/_3 f_1$ den Wert $\Delta = -{}^4/_3 f_1$. Nach Formel (20) auf S. 29 liegt daher der vordere resultierende Brennpunkt F des Okulars noch um ${}^1/_4 f_1$ vor der Kollektivlinse, während er bei $a = f_1$, d. h. $\Delta = -f_1$, in die Kollektivlinse selbst fallen würde. Da nun das vom Objektiv des Mikroskops entworfene reelle Bild nahe beim Brennpunkt F des Okulars liegen muß, so liegt dies für $a = {}^2/_3 f_1$ noch vor der Kollektivlinse; man kann daher das Mikroskopbild mikrometrisch ausmessen, indem man vor der Kollektivlinse am Orte des reellen, vom Okjektiv entworfenen Bildes ein Mikrometer (feine Teilung auf Glas, oder durch Schraube verschieblicher Faden) anbringt.

2. Das Huygenssche Okular (vgl. Figur 39). Bei diesem ist die Brennweite f_1 der Kollektivlinse größer als die Brennweite f_2 der Augenlinse. Meist ist $f_1 = 3 f_2$. Aus $f_1 = 3 f_2$ folgt für $a = \frac{f_1 + f_2}{2}$ der Wert $a = {}^2/_3 f_1 = 2 f_2$. Das optische Intervall Δ hat hier den Wert $\Delta = -{}^2/_3 f_1$, daher liegt nach (20) auf S. 29 der resultierende Brennpunkt F des Okulars um ${}^1/_2 f_1$ hinter der Kollektivlinse. Das vom Objektiv entworfene reelle Bild muß daher hinter die Kollektivlinse (als virtuelles Objekt) fallen, und eine mikrometrische Ausmessung ist nicht gut statthaft, da das Objekt durch beide Okularlinsen abgebildet wird, während das

Mikrometer nur durch die Augenlinse abgebildet werden könnte. Dadurch können aber verschiedene Vergrößerungsverhältnisse entstehen. Dieses Okular besteht auch aus zwei plankonvexen Linsen, die aber beide mit ihren gekrümmten Seiten dem Objekte zugewandt sind. Der Vorteil der Kombination einer schwachen Kollektivlinse mit einer dreimal stärkeren Augenlinse liegt darin, daß dann die Ablenkungen der Lichtstrahlen auf beide Linsen gleichmäßig verteilt sind.[1])

Ist das reelle, vom Objektiv entworfene Bild mit chromatischen Fehlern behaftet, so können diese im Okular durch entgegen-

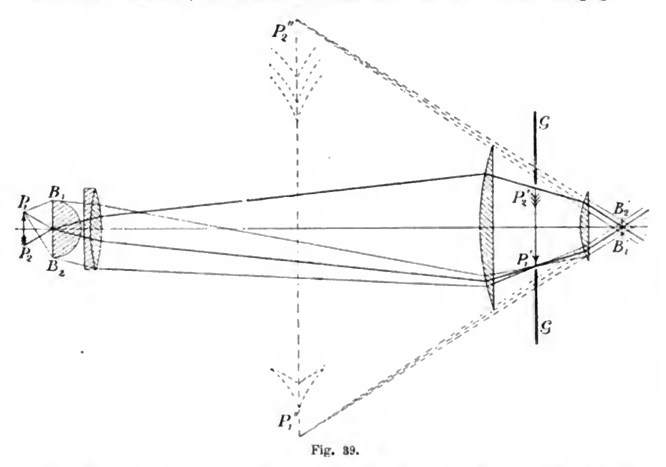


Fig. 39.

gesetzte chromatische Abweichungen aufgehoben werden. Wir sahen oben S. 91, daß die Aprochromatobjektive eine chromatische Vergrößerungsdifferenz bestehen lassen, das blaue Bild ist stärker vergrößert als das rote. Mit diesen Objektiven kombiniert nun Abbe die sogenannten Kompensationsokulare, welche nicht hinsichtlich ihrer Brennweite, d. h. auch ihrer Vergrößerung, achromatisiert sind, sondern welche das rote Bild stärker vergrößern als das blaue.

1) Eine diesbezügliche Rechnung vgl. in Heath, geometrische Optik, deutsch von Kanthack, S. 292. Berlin 1894.

d) Der Kondensor. Damit eine hohe numerische Apertur des Objektivs voll ausgenutzt werden kann, müssen Lichtstrahlen in genügender Neigung gegen die Achse einfallen. Um solche genügend geneigte Lichtstrahlen zu erzeugen, ist der Kondensor unter dem Objekttisch des Mikroskops angebracht, welcher aus einer oder mehreren Sammellinsen kurzer Brennweite, im wesentlichen wie ein Objektiv in umgekehrter Reihenfolge der Linsen, konstruiert ist. Durch einen solchen Lichtsammler wird zwar nach früheren Auseinandersetzungen (vgl. oben S. 79) die Intensität der Lichtquelle nicht gesteigert, aber wohl wird dadurch derselbe Effekt erzielt, als ob dieselbe dem Objektiv sehr genähert würde.

e) Der Strahlengang. Wenn die Normalvergrößerung (vgl. oben S. 83) nicht erreicht ist, so ist die Pupille des Auges des Beobachters die Austrittspupille für das ganze Mikroskop, das von ihm entworfene Bild der Augenpupille ist die Eintrittspupille. Wenn aber die Normalvergrößerung überschritten wird, so ist eine Blende oder ein Linsenrand im Mikroskop die Aperturblende. Dieselbe liegt stets im Objektiv, nicht im Okular. Figur 39 bezieht sich auf den vielfach vorkommenden Fall, daß die Öffnung B_1B_2 der halbkugeligen Frontlinse des Objektivs die Aperturblende und zugleich Eintrittspupille ist. Das vom ganzen Mikroskop entworfene Bild $B_1'B_2'$ von B_1B_2 ist die Austrittspupille. Dieselbe liegt bei nicht zu kleiner Tubuslänge nahezu im hinteren Brennpunkt des Okulars. Das Okular in Figur 39 stellt ein Huygenssches dar, das vom Gegenstand P_1P_2 durch das Objektiv und die Kollektivlinse entworfene reelle Bild ist $P_1'P_2'$. An dieser Stelle wird die Gesichtsfeldblende GG angebracht. Dadurch wird das Gesichtsfeld scharf begrenzt, weil dann das von G durch Kollektivlinse und Objektiv entworfene Bild in die Objektebene P_1P_2 fällt (vgl. dazu die Bemerkungen der S. 71). Die Punkte $P_1'P_2'$ sollen in die Ränder der Gesichtsfeldblende fallen. Dann ist P_1P_2 die Größe des Gesichtsfeldes auf der Objektseite. Das durch die Augenlinse vom reellen Bilde $P_1'P_2'$ entworfene virtuelle Bild $P_1''P_2''$ ist das vom Beobachter gesehene Bild. Liegt dasselbe in der Entfernung δ von der Austrittspupille, so muß der Beobachter, dessen Augenpupille nach S. 71 an dem Ort der Austrittspupille $B_1'B_2'$ liegen soll, sein Auge auf diese Entfernung δ abkommodieren. Durch geringe Hebung oder Senkung des ganzen Mikroskops gegen das Objekt P_1P_2 kann das Bild $P_1''P_2''$ leicht in jede gewünschte Ent-

fernung δ gebracht werden. Man nimmt meist an, daß δ den Wert 25 cm (sog. deutliche Sehweite) besitze.

In der Figur 39 ist der von P_1 ausgehende Hauptstrahl und die Randstrahlen gezeichnet. Für P_2 ist nur der Hauptstrahl gezeichnet, die Randstrahlen sind hinter der Augenlinse angegeben.

f) Die Vergrößerung. Das Objekt habe die (seitliche) Größe y. Vom Objektiv wird nach Formel (7) auf S. 20 ein reelles Bild der Größe $y' = y \cdot \frac{l}{f_1'}$ entworfen, wobei f_1' die hintere[1]) Brennweite des Objektivs, l die Distanz des Bildes vom hinteren Brennpunkt des Objektivs bedeutet. Da dieses Bild y' nach Früherem dicht vor oder hinter der Kollektivlinse des Okulars liegt, so kann man näherungsweise für l die Länge des ganzen Mikroskops (Tubuslänge) setzen. Das vom Okular entworfene virtuelle Bild hat ebenfalls nach der obigen Formel (7) die Größe $y'' = y' \cdot \frac{\delta}{f_2}$, wobei f_2 die Brennweite des Okulars, und δ die Entfernung des virtuellen Bildes vom hinteren Brennpunkt des Okulars bezeichnet. Da dieser, wie oben bemerkt wurde, nahe bei der Austrittspupille, d. h. auch der Augenpupille liegt, so kann man für δ die Entfernung des Bildes vom Auge setzen.

Die ganze Vergrößerung V des Mikroskops wird demnach

$$V = \frac{y''}{y} = \frac{\delta \cdot l}{f'_1 \cdot f_2}. \tag{5}$$

Da die hintere Brennweite f' des ganzen Mikroskops nach Formel (18) auf S. 29 sich bestimmt[2]) zu

$$f' = -\frac{f_1' f_2}{l}, \tag{6}$$

weil das optische Intervall Δ zwischen Objektiv und Okular nahezu gleich der Tubuslänge l ist, so kann man (5) auch schreiben (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen):

$$V = \frac{\delta}{f'}. \tag{7}$$

Die Vergrößerung hängt also von drei Faktoren ab, über die man frei verfügen kann, nämlich von f_1', f_2 und l. Die Tubuslänge l wird, schon allein um das Mikroskop nicht unhandlich zu machen, nicht über ein gewisses Maß gesteigert; man ersetzt

1) Eine Unterscheidung der hinteren und vorderen Brennweite ist nur bei den Immersionssystemen notwendig.

2) Es ist für das Okular $f_2 = f_2'$.

praktischer die Wirkung einer Vergrößerung von l durch ein stärkeres Okular. Die Brennweite des Objektivs wird ferner stets viel kleiner als die des Okulars gewählt. Einmal werden dadurch auch bei hoher numerischer Apertur die Dimensionen der Objektivgläser verhältnismäßig klein, andererseits kann man eine bestimmte Bildqualität (in der Achse) bei einer gegebenen Gesamtvergrößerung desto leichter erreichen, je kürzer man die Brennweite des Objektivs wählt. Da aber mit der Verringerung der Objektivbrennweite die Fehler des letzten vom Okular entworfenen Bildes außerhalb der Achse zunehmen, so wird die Verringerung von f_1' auch nicht über eine gewisse Grenze (1,5 bis 2 mm bei Immersionssystemen) getrieben.

g) Die Leistungsfähigkeit. Dieselbe ist nicht mit der Vergrößerung zu identifizieren, d. h. es kann unter Umständen ein weniger vergrößerndes Mikroskop leistungsfähiger sein, d. h. mehr Details eines Objektes dem Auge enthüllen als ein stärker vergrößerndes. Die Leistungsfähigkeit ist wesentlich durch die Konstruktion des Objektivs bedingt; der Inhalt oder das Detail des von ihm entworfenen Bildes hängt (vgl. oben S. 85) einmal von der numerischen Apertur des Objektivs ab, andererseits von der Größe der Zerstreuungskreise, welche durch nicht streng homozentrische Strahlenvereinigung entstehen. Wenn nun zwei Punkte P_1 und P_2 eines Objektes betrachtet werden, für die die Zerstreuungskreise im Objektivbild nicht übereinander greifen, so können sie am Auge als zwei distinkte Punkte oder Scheibchen wahrgenommen werden, falls das Okular ihr Objektivbild mindestens auf die Grenze des Sehwinkels (1′) vergrößert hat. Wenn aber die Zerstreuungskreise im Objektivbilde übereinander greifen, so kann auch das stärkste Okular die beiden Punkte P_1 und P_2 optisch nicht trennen. Für jedes bestimmte Objektiv ergibt sich sonach eine Okularvergrößerung — die sogenannte förderliche Okularvergrößerung —, welche gerade ausreichen muß, um das im Objektivbild enthaltene Detail vollkommen zu erkennen. Eine stärkere Vergrößerung kann wohl dieses Detail noch bequemer zur Erkennung bringen, aber sie fügt kein neues Detail dem Bilde zu, man spricht daher dann von leerer Vergrößerung. — Aus der Objektivbrennweite, der Tubuslänge und der förderlichen Okularbrennweite berechnet sich nach (5) die förderliche Gesamtvergrößerung. Dieselbe ist also um so höher, je vollkommener die Leistungen des Objektivs sind.

Setzen wir ein dioptrisch vollkommenes Objektiv voraus, so ist die förderliche Gesamtvergrößerung nur abhängig von der numerischen Apertur. Dieselbe ist bisher (bei Immersionssystemen) nicht über den Wert $a=1{,}6$ gesteigert worden. Nach Formel (87) auf S. 85 ist daher die kleinste Distanz d, die optisch aufzulösen ist:

$$d=\frac{\lambda}{2a}=\frac{0{,}00053 \text{ mm}}{3{,}2}=0{,}00016 \text{ mm},$$

falls für die Wellenlänge λ der Wert für grünes Licht gesetzt wird[1]). In der Entfernung $\delta=25$ cm vom Auge erscheint nun eine Distanz $d'=0{,}145$ mm unter dem Sehwinkel 2', dem Grenzwinkel bequemer Unterscheidbarkeit. Da nun $d':d=905$, so hat die förderliche Gesamtvergrößerung des Mikroskops etwa den Wert 900. Durch die dioptrischen Fehler des Objektivs wird dieselbe noch etwas herabgedrückt. — Nach Formel (85) auf S. 83 ist in diesem Falle das Verhältnis der Bildhelligkeit zur normalen Helligkeit

$$H:H_0=\frac{\delta^2\cdot a^2}{p^2\cdot V^2}=\left(\frac{250\cdot 1{,}6}{2\cdot 900}\right)^2={}^1/_{20},$$

falls die Augenpupille zu 2 mm Radius p angenommen wird.

h) Experimentelle Bestimmung der Vergrößerung und der numerischen Apertur. Die Vergrößerung wird bestimmt, indem als Objekt eine feine, auf Glas eingeritzte Skala (Mikrometer) benutzt wird, deren Bild man auf ein in 25 cm vom Auge befindliches Papierblatt aufzeichnet mit Hilfe eines über dem Okular angebrachten Zeichenapparates. Derselbe besteht im einfachsten Falle aus einem schräg aufgestellten kleinen Spiegel, dessen Belegung in der Mitte in Form eines kleinen, etwa 2 mm großen Loches fortgenommen ist. Durch das Loch erblickt man das vom Mikroskop entworfene Bild, während die Spiegelbelegung

---

1) Man kann d noch weiter herabdrücken, wenn man als Lichtquelle ganz kurzwellige, ultraviolette Strahlen benutzt, die auf das Auge überhaupt nicht mehr wirken, sondern nur auf die photographische Platte. Dieser Weg ist in der Zeißschen Werkstätte und namentlich von A. Köhler beschritten worden. Das Objektiv (Monochromat) besteht aus Quarz, dem durch Erhitzen seine kristallinische Struktur genommen ist. Es wird Licht der Wellenlänge $\lambda=0{,}275\,\mu$ bis $0{,}280\,\mu$ benutzt ($\mu={}^1/_{1000}$ mm), welches durch Funkenentladungen zwischen Kadmium- oder Magnesiumelektroden gewonnen wird. Da bei den Monochromaten mit homogener Immersion a bis etwa auf 1,3 gebracht ist, so ergibt sich dann als Auflösungsgrenze $d=0{,}106\,\mu=0{,}000106$ mm.

das Zeichenblatt dem Auge gleichzeitig sichtbar macht.[1]) Das Verhältnis der Abstände der Teilstriche des Mikrometers in der Zeichnung zu den Abständen im Objekte selbst gibt die Vergrößerung an.

Mit Hilfe der Vergrößerung und der Ausmessung der Austrittspupille des Mikroskops kann man leicht seine numerische Apertur a finden. Da das Verhältnis der Bildhelligkeit zur normalen Helligkeit nach Früherem (vgl. oben S. 82) gleich dem Verhältnis der Austrittspupille zur Augenpupille ist, so folgt nach (85) auf S. 83

$$\frac{H}{H_0} = \frac{b^2}{p^2} = \frac{\delta^2 a^2}{p^2 V^2}, \tag{8}$$

wobei b den Radius der Austrittspupille bezeichnet. Es ergibt sich also die numerische Apertur aus:

$$a = \frac{bV}{\delta}. \tag{9}$$

Setzt man hierin für V den Wert nach (7), so folgt:

$$a = b : f', \tag{10}$$

d. h. die numerische Apertur ist gleich dem Verhältnis des Radius der Austrittspupille zu der hinteren Gesamtbrennweite des ganzen Mikroskops.

Ein von Abbe konstruiertes Apertometer gestattet die numerische Apertur des Objektivs allein direkt zu messen.[2])

4. Das astronomische Fernrohr. Dasselbe besteht ebenfalls, wie das Mikroskop, aus zwei kollektiven Teilen: dem Objektiv und dem Okular. Ersteres entwirft von einem sehr fernen Objekte ein reelles umgekehrtes Bild in der Brennebene des Objektivs, dieses Bild wird durch das Okular, das als Lupe wirkt, vergrößert. Akkommodiert das Auge des Beobachters auf Unendlich, so fällt die vordere Brennebene des Okulars mit der hinteren Brennebene des Objektivs zusammen, und wir haben die „teleskopische" Abbildung im früheren Sinne (oben S. 26), bei der unendlich entfernte Gegenstände unendlich entfernte Bilder haben. Unter der Vergrößerung Γ versteht man dann das Konvergenzverhältnis der Bildstrahlen

1) Betreffs anderer Zeichenapparate vgl. Müller-Pouillet, 9. Aufl., Optik von Lummer, S. 839—842; 10. Aufl. S. 528—530.

2) Betreffs näherer Beschreibung dieses Instrumentes vgl. die eingangs dieses Kapitels zitierten Lehrbücher.

zu den Objektstrahlen. Nach (24) auf S. 30[1]) ist aber

(11) $$\Gamma = tg\,u' : tg\,u = f_1 : f_2,$$

wobei f_1 die Brennweite des Objektivs, f_2 die des Okulars ist. Damit also eine starke Vergrößerung Γ erzielt wird, muß f_1 groß und f_2 klein sein.

Die Vergrößerung kann man experimentell bestimmen, indem man das Verhältnis der Eintrittspupille des Instrumentes zur Austrittspupille bestimmt. Denn bei der teleskopischen Abbildung ist nach Früherem (S. 26) die Lateralvergrößerung konstant, d. h. unabhängig vom Orte des Objektes, und zwar ist sie nach der dort (S. 27) gegebenen Formel (14') gleich der reziproken Angularvergrößerung. Die Eintrittspupille ist nun (ohne Rücksicht auf das Auge des Beobachters, vgl. weiter unten) der Rand des Objektiv-

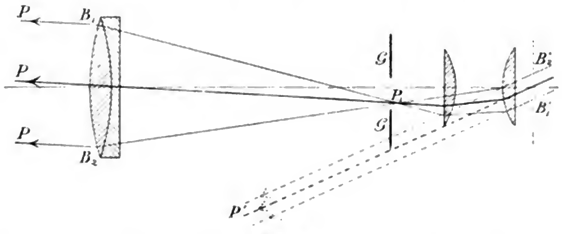


Fig. 40.

systems, die Austrittspupille daher das von diesem Rande durch das Okular entworfene reelle Bild (der Augenkreis). Mißt man daher den Durchmesser dieses Augenkreises mikrometrisch, so ist sein Verhältnis zum Objektivdurchmesser gleich der reziproken Angularvergrößerung des Fernrohres.

In Figur 40 ist der Strahlengang bei Benutzung eines Ramsdenschen Okulars (vgl. oben S. 93) gezeichnet. $B_1 B_2$ ist die Eintrittspupille (Objektivrand), $B_1' B_2'$ die Austrittspupille (innerer Rand des Okulardeckels), P_1 ist das reelle, vom Objektiv entworfene Bild eines unendlich fernen Punktes P. Sein Hauptstrahl ist stark, seine Randstrahlen sind schwach gezeichnet. P_1 liegt etwas vor der Kollektivlinse des Okulars. An gleicher Stelle ist die Gesichts-

1) Dort sind der Allgemeinheit halber die vorderen und hinteren Brennweiten (f_1 und f_1', f_2 und f_2') voneinander unterschieden. Hier ist das nicht nötig, da beim Fernrohr stets $f_1 = f_1'$, $f_2 = f_2'$ ist (vgl. oben S. 35).

feldblende GG angebracht. Da ihr Bild auf der Objektseite im Unendlichen liegt, so wird das Gesichtsfeld bei Betrachtung sehr entfernter Objekte scharf begrenzt. — P' ist das unendlich ferne Bild, welches das Okular von P_1 entwirft. — Zieht man das Auge des Beobachters in Rücksicht, so sind die zwei Fälle zu unterscheiden, ob die Austrittspupille des Instrumentes kleiner oder größer als die Augenpupille ist (d. h. ob die Normalvergrößerung überschritten ist oder nicht). Nur in ersterem Falle bleiben die bisherigen Betrachtungen unverändert bestehen, während im letzteren Falle die Augenpupille die Austrittspupille für den ganzen Strahlengang ist und das vom Fernrohr entworfene Bild der Augenpupille die Eintrittspupille ist.

Als Objektiv wird eine achromatisierte Doppellinse gewählt, die auf sphärische Aberration korrigiert ist. Für die Achromatisierung des Okulars gelten dieselben Bedingungen, die oben beim Mikroskop besprochen sind: da die auf das Okular fallenden Hauptstrahlen nahezu achsenparallel sind, so genügt die Achromatisierung der Brennweite des Okulars. Man kann daher für Mikroskop und Fernrohr dieselben Okulare benutzen, meist jedoch wird bei letzterem das Ramsdensche Okular angewandt, da es vorteilhafter bei der mikrometrischen Bildausmessung ist (vgl. oben S. 93).

Auch hier gelten, gerade wie beim Mikroskop, die Begriffe der förderlichen und leeren Okular- bezw. Gesamtvergrößerung. Die freie Öffnung des Objektivs spielt hier die Rolle der numerischen Apertur des Mikroskops (vgl. dazu S. 84, 85).

5. Das holländische Fernrohr. Wird das kollektive Okular des astronomischen Fernrohres durch ein dispansives ersetzt, so erhält man das holländische Fernrohr. Damit teleskopische Abbildung stattfindet, muß der hintere Brennpunkt des Okulars mit dem hinteren Brennpunkt des Objektivs zusammenfallen. Die Länge des Fernrohrs ist also nicht, wie beim astronomischen, gleich der Summe, sondern gleich der Differenz der Brennweiten von Objektiv und Okular.

Die Formel (11) dieses Kapitels für die Angularvergrößerung Γ gilt auch hier, da diese Formel für jede teleskopische Abbildung gilt. Das Fernrohr gibt aber im Gegensatz zum astronomischen Fernrohr aufrechte Bilder, da das vom Objektiv entworfene umgekehrte Bild durch das dispansive Okular noch einmal umgekehrt wird.

Ohne Rücksicht auf das Auge des Beobachters würde der Objektivrand stets die Eintrittspupille des Instrumentes sein. Das

Okular entwirft von demselben ein virtuelles verkleinertes Bild (Austrittspupille) vor dem Okular. Dasselbe hat den Radius

$$b = h \cdot \frac{f_2}{f_1} = \frac{h}{\Gamma}, \tag{12}$$

falls h der Radius des Objektivs ist.

Da diese Austrittspupille vor und nicht hinter dem Okular liegt, so kann die Augenpupille des Beobachters nicht mit ihr zur Deckung gebracht werden. Infolgedessen wirkt die Augenpupille als Gesichtsfeldblende, wenn die nach Formel (12) bestimmte Größe b, nämlich die Austrittspupille des Instrumentes, kleiner als die Augenpupille ist, d. h. wenn die Normalvergrößerung überschritten ist. Deshalb ist das Gesichtsfeld bei starken Vergrößerungen ein sehr beschränktes. Figur (41) bezieht sich auf diesen Fall des

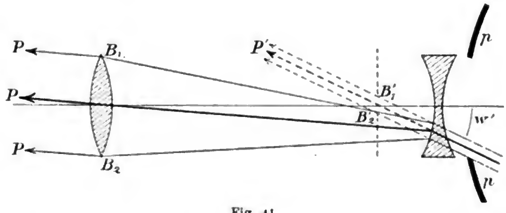


Fig. 41.

Strahlenganges. pp bedeutet die Augenpupille, w' ist der Gesichtsfeldwinkel im Bilde. Da das vom ganzen Fernrohr entworfene Bild der Gesichtsfeldblende (der Augenpupille im Endlichen, d. h. nicht am Orte des Objektes im Unendlichen liegt, so ist auch das Gesichtsfeld nicht scharf begrenzt (vgl. oben S. 71).

Wenn aber die Austrittspupille $B_1'B_2' = 2b$ des Instrumentes größer als die Augenpupille ist, d. h. wenn die Normalvergrößerung nicht erreicht ist, so ist mit Rücksicht auf das Auge des Beobachters seine Augenpupille die Austrittspupille für den ganzen Strahlengang, und die Objektivöffnung wirkt als Gesichtsfeldblende; das bildseitige Gesichtsfeld ist begrenzt durch das Bild $2b$ (in Figur 42 ist dies mit $B_1'B_2'$ bezeichnet) der Objektivöffnung. In diesem Falle kann man also durch Wahl eines recht großen Objektivs das Gesichtsfeld vergrößern. Aus demselben Grunde wie vorhin ist dasselbe aber auch hier unscharf begrenzt. Figur 42 bezieht

sich auf diesen Fall des Strahlenganges, w' ist der bildseitige Gesichtsfeldwinkel.

Nimmt man die Augenpupille zu 2 mm Radius an, so tritt nach (12) der Strahlengang der Figur 41 oder der Figur 42 ein, je nachdem

$$h \lesseqgtr 2\,\Gamma\,\text{mm}$$

ist;[1]) z. B. bei einer achtmaligen Vergrößerung ist $2h = 32$ mm die kritische Objektivgröße.

6. Das terrestrische Fernrohr. Für terrestrische Zwecke ist es von Vorteil, wenn das Fernrohr aufrechte Bilder entwirft. Wenn die Vergrößerung nicht sehr stark sein soll, so empfiehlt sich daher der Gebrauch des holländischen Fernrohres. Da dasselbe aber bei starken Vergrößerungen ein sehr kleines Gesichtsfeld hat, so ist für starke Vergrößerungen das sogenannte terrestrische Fernrohr praktischer, welches ein astronomisches Fernrohr mit bildumkehrendem Okular ist. Der Abbildungsvorgang ist dann folgender: Die Objektivlinse entwirft ein umgekehrtes reelles Bild vom Objekt. Dieses Bild wird durch ein (aus zwei Linsen bestehendes) Kollektivsystem ohne wesentliche Vergrößerungsänderung umgekehrt und das dadurch entstandene aufrechte Bild durch ein Ramsdensches oder Huygenssches Okular, das als Lupe wirkt, zu einem virtuellen aufrechten Bilde vergrößert.

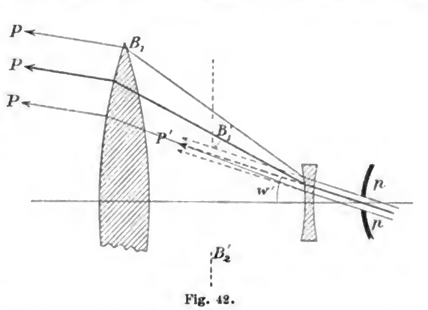


Fig. 42.

7. Prismendoppelfernrohre von C. Zeiss. Das terrestrische Okular hat eine unbequeme Länge. Diesen Übelstand kann man vermeiden, wenn man die Umkehrung des vom Objektiv entworfenen Bildes durch viermalige Totalreflexion an zwei rechtwinkligen Glasprismen bewirkt, die wie in Figur 43 angeordnet sind (Porrosche

1) Experimentell kann man diese beiden Fälle dadurch unterscheiden, daß bei teilweiser Abblendung des Objektivs durch eine vorgehaltene Blende nur die Bildhelligkeit abnimmt oder das Gesichtsfeld verkleinert wird.

Prismenkombination). Der austretende Strahl ist dem einfallenden parallel, hat aber eine seitliche Verschiebung erlitten. — Im übrigen ist die Konstruktion des Fernrohres die des astronomischen.

Durch Trennung der beiden Prismen I und II kann eine bedeutende Verkürzung des Fernrohres erzielt werden, da der Lichtstrahl die Strecke zwischen den Prismen dreimal zurückzulegen hat. — Durch etwas andere Anordnung, bezw. Zerschneidung der Prismen kann die seitliche Verschiebung des einfallenden und austretenden Lichtstrahles beliebig erhöht werden. Man kann nach diesem Prinzipe ein für beide Augen benutzbares Doppelfernrohr konstruieren, in welchem die Eintrittspupillen (Objektivlinsen) eine viel größere Distanz besitzen als die Augenpupillen. Dadurch wird der stereoskopische Effekt, der mit der Betrachtung der Landschaft durch die beiden Augen verbunden ist, sehr erhöht.

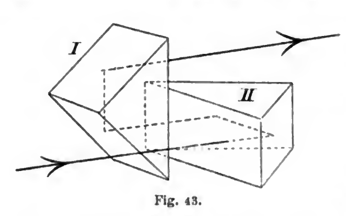


Fig. 43.

8. Spiegelteleskope. Dieselben unterscheiden sich von den dioptrischen dadurch, daß an Stelle der Objektivlinse ein Hohlspiegel ein reelles Bild des Objektes entwirft. Dasselbe wird mit dem Auge betrachtet durch Okulareinrichtungen, die bei den einzelnen Konstruktionen etwas verschieden sind.[1]) Die Spiegelteleskope hatten früher eine besonders große Bedeutung, als man noch keine achromatischen Objektive herstellen konnte, denn naturgemäß treten chromatische Bildfehler bei Hohlspiegeln nicht auf. Neuerdings scheinen sie wieder mehr in Aufnahme zu kommen. Auch parabolische Reflektoren sind neuerdings für astronomische Beobachtungen verwandt worden[2]).

Zur Erzielung möglichst starker Vergrößerungen sind große Spiegel von großem Krümmungsradius zu wählen. Herschel hatte einen Riesenhohlspiegel von 16 m Krümmungsradius gebaut. Das von ihm entworfene reelle Sonnenbild ist, da der Sehwinkel der Sonne 32′ beträgt, etwa 7 cm groß.

1) Betreffs näherer Details vgl. Heath, Geometrische Optik, deutsch von Kanthack, S. 299—310.

2) Ritchey, Astrophys. Journ. **14**, 217, 1901; Wood, ebenda **29**, 164, 1909.

PHYSIKALISCHE OPTIK.

I. Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften des Lichtes.

Kapitel I.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.

1. Methode von Römer. Die Beantwortung der Frage, ob das Licht eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitze, ist von großer prinzipieller Bedeutung. Eine terrestrische Methode, wie sie zuerst von Galilei angewandt wurde, führte wegen der außerordentlichen Schnelligkeit des Lichtes nicht zum Ziel; bei kleinen Entfernungen, wie sie in terrestrischen Methoden vorkommen, müssen die experimentellen Hilfsmittel sehr verfeinert werden.

Von besserem Erfolg waren zunächst astronomische Methoden gekrönt, da es sich bei ihnen um sehr große Distanzen für die Lichtausbreitung handelt. Die erste Bestimmung für die Lichtgeschwindigkeit lieferte Olaf Römer im Jahre 1675, welcher beobachtete, daß die Periode für die Verfinsterung eines Jupitermondes etwas größer war, wenn die Erde sich in ihrer Bahn vom Jupiter entfernt, als wenn sie sich ihm nähert. Diese Veränderung in der Verfinsterungsperiode kann durch Beobachtung zahlreicher aufeinander folgender Verfinsterungen sehr scharf bestimmt werden. Römer fand, daß die Summe der Verfinsterungsperioden, welche zwischen zwei Verfinsterungen lag, von denen die erste in Opposition der Erde zum Jupiter, die zweite in Konjunktion beider Planeten eintrat, um 996 Sekunden differierte gegenüber der Zeitsumme, die man aus der Anzahl der Verfinsterungen und der im Verlauf des ganzen Jahres im Mittel beobachteten Verfinsterungsperiode erhölt. Schon Römer deutete diese Differenz aus der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Nach dieser

Anschauung muß das Licht zum Durcheilen des Erdbahndurchmessers 996 Sekunden gebrauchen. Nach neueren Beobachtungen von Glasenapp ist die Römersche Zahl in 1002 Sekunden zu korrigieren. — Der Erdbahndurchmesser ergibt sich aus dem Erdradius, wenn man die sogenannte Sonnenparallaxe kennt, d. h. den Winkel, unter dem der Erdradius von der Sonne aus erscheint. Nach den neueren astronomischen Bestimmungen ist der wahrscheinlichste Wert der Sonnenparallaxe 8,80″, so daß sich der Erdbahndurchmesser d, da der Erdradius 6378 km beträgt, berechnet zu:

$$d = \frac{2 \cdot 6378}{8{,}80} \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = 2990 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Für die Lichtgeschwindigkeit V folgt so:

$$V = 298300\ {}^{\text{km}}/_{\text{sek.}} = 2{,}983 \cdot 10^{10}\ {}^{\text{cm}}/_{\text{sek.}}$$

Diese Zahl ist hauptsächlich noch unsicher (um etwa $^1/_2\,^0/_0$) wegen des Fehlers in der Bestimmung der Sonnenparallaxe.

2. Methode von Bradley. Wir wollen uns denken, daß ein Lichtstrahl einer unendlich entfernten Lichtquelle P durch zwei aufeinander folgende Löcher S_1 und S_2, die in der Achse eines Rohres R liegen, in das Auge eines Beobachters gelange. Wenn nun das Rohr R in eine Parallelverschiebung der Geschwindigkeit v senkrecht zur Rohrachse versetzt wird, während die Lichtquelle P in Ruhe bleibt, so wird der Lichtstrahl, wenn er durch das erste Loch S_1 getreten ist, nicht mehr genau das Loch S_2 treffen, wenn das Licht eine endliche Zeit zum Durcheilen des Rohres R gebraucht. Der Beobachter sieht daher dann die Lichtquelle P nicht mehr. Um sie wieder zu erblicken, muß er das Rohr R um einen Winkel ζ gegen die ursprüngliche Richtung drehen, so daß die Visierlinie nach P im Sinne der Bewegung des Beobachters um den Winkel ζ verschoben erscheint, und zwar muß sein

$$tg\,\zeta = v : V, \tag{1}$$

falls V die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Diese Überlegung gibt eine mögliche Erklärung[1]) für die von Bradley im Jahre 1727 entdeckte Aberration der Fixsterne, nach der der Ort derselben, falls Visierlinie und Bewegung der Erde senkrecht aufeinander stehen, im Sinne der Erdbewegung um einen kleinen Winkel verschoben ist, der sich nach neueren Bestimmungen zu 20,5″ ergeben hat. Da die Bahngeschwindigkeit v der Erde

1) Vgl. die weiter unten behandelte Erklärung von **Stokes**.

bekannt ist, wenn man die Größe der Erdbahn kennt, so ergibt sich aus der Gleichung (1) die Lichtgeschwindigkeit zu

$$V = 2{,}999 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm}/_{\mathrm{sek.}}$$

Diese Methode leidet an derselben Unsicherheit wie die Römersche und wie überhaupt alle astronomischen Methoden, die in der unsicheren Kenntnis der Sonnenparallaxe und damit der Erdbahn wurzelt.

Das Resultat stimmt mit dem nach der Römerschen Methode gewonnenen gut überein, und dies zeigt, daß eine hier stillschweigend getroffene Annahme berechtigt ist: daß nämlich den Lichtstrahlen selbst, wenn sie sich durch die mit der Erde bewegte Luft hindurch fortpflanzen, keine seitliche Geschwindigkeitskomponente mitgeteilt wird. Indes ist die Aberration in dieser einfachen Weise nicht erschöpfend zu erklären. Nach der angestellten Überlegung sollte man nämlich erwarten, daß die Aberration, wenn man nach einem Fixstern mit einem mit Wasser angefüllten Fernrohr visiert, eine größere sein müßte, da, wie wir weiter unten sehen werden, die Lichtgeschwindigkeit im Wasser kleiner ist als in Luft. Tatsächlich ist aber die Aberration unabhängig von dem Medium im Fernrohr. Um dies zu erklären, bedarf es einer genaueren Untersuchung über den Einfluß der Bewegung eines Körpers auf die in ihm stattfindende Lichtfortpflanzung. Das soll aber erst an späterer Stelle geschehen. Es mag nur hier noch bemerkt werden, daß durch die astronomische Aberration die Lichtgeschwindigkeit im Weltraum, d. h. im Vakuum, bestimmt wird.

3. Methode von Fizeau. Die erste terrestrische Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ist erfolgreich von Fizeau im Jahre 1849 angewandt worden. Von einer Lichtquelle P wird durch eine Sammellinse und eine schief gegen die Lichtstrahlen geneigte Glasplatte p (vgl. Figur 44) ein Bild in f entworfen. Die Strahlen werden sodann nach dem Durchtritt durch die Sammellinse L_1 parallel gemacht und gelangen zu der sehr weit (8,6 km) entfernten Sammellinse L_2. Es entsteht ein reelles Bild am Orte eines Hohlspiegels s, dessen Krümmungszentrum im Mittelpunkt der Linse L_2 liegt. Dieser Spiegel s reflektiert daher die Strahlen auf demselben Wege, auf welchem sie gekommen sind, so daß auch durch die reflektierten Strahlen ein reelles Bild in f entsteht. Dieses wird durch das Okular o und durch die schiefe Glasplatte p hindurch betrachtet. Am Orte des reellen Bildes f wird nun der Rand eines Zahnrades derart angebracht, daß eine Lücke desselben

die Lichtstrahlen frei passieren läßt, ein Zahn sie dagegen abschirmt. Rotiert das Zahnrad mit sehr geringer Geschwindigkeit, so wird man das Bild abwechselnd sehen und nicht sehen. Rotiert das Rad schneller, so wird man infolge der Dauer des Lichteindrucks das Bild ununterbrochen sehen. Bei weiterer Steigerung der Rotationsgeschwindigkeit des Rades verschwindet aber allmählich das Bild wieder, nämlich dann, wenn in der Zeit, welche das Licht zur Durcheilung des Hin- und Rückweges braucht, Zähne und Lücken ihre Stellung miteinander vertauscht haben. Bei doppelter Drehgeschwindigkeit tritt wieder maximale Helligkeit ein, bei dreifacher Drehgeschwindigkeit Dunkelheit, usf. Aus der

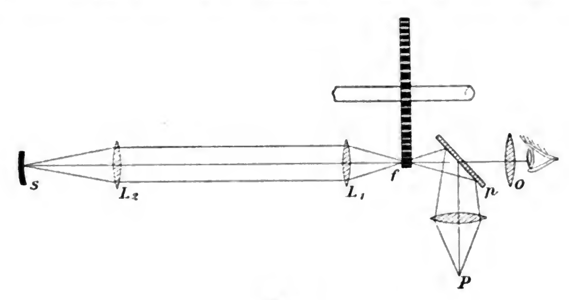


Fig. 44.

Rotationsgeschwindigkeit des Rades, der Anzahl seiner Zähne und der Distanz zwischen f und s kann man leicht die Lichtgeschwindigkeit berechnen. Fizeau wandte ein Rad von 720 Zähnen an. Die erste Verdunkelung trat bei 12,6 Umdrehungen pro Sekunde ein. Da die Entfernung zwischen L_1 und L_2 8,633 km betrug, so berechnet sich daraus die Lichtgeschwindigkeit zu

$$V = 3{,}13 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm}/_{\mathrm{sek.}}$$

Die Hauptschwierigkeit der Methode liegt in der Herstellung einer gleichmäßigen Rotationsgeschwindigkeit und der Messung derselben. — Durch verfeinerte Messungen erhielt nach dieser Methode Cornu den Wert

$$V = 3{,}004 \,.\, 10^{10}\ \mathrm{cm}/_{\mathrm{sek.}},$$

Young und Forbes den Wert:

$$V = 3{,}014 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm}/_{\mathrm{sek.}}$$

4. Methode von Foucault. Diese Methode erfordert die geringste Distanz und ist in mehrfacher Hinsicht für die Optik von hoher Wichtigkeit. Eine Lichtquelle P sendet durch eine schief gestellte Glasplatte p (vgl. Figur 45) ihre Strahlen auf einen rotierenden Spiegel m. Bei geeigneter Lage desselben reflektiert derselbe die Strahlen durch eine nahe befindliche Linse L, so daß ein reelles Bild der Lichtquelle P am Orte eines um die große Strecke D entfernten Hohlspiegels s entsteht, dessen Krümmungszentrum am Orte des Spiegels m liegt. Der Hohlspiegel s reflektiert die Strahlen auf gleichem Wege, auf dem sie gekommen sind, falls innerhalb der Zeit, welche das Licht zum Durcheilen der Strecke $2D$ gebraucht hat, der Spiegel s seine Lage noch nicht merklich geändert hat. Es würde dann durch die an den Spiegeln m und s sowie an der Glasplatte p reflektierten Strahlen ein Bild P' von der Lichtquelle P entworfen werden. Wenn aber der rotierende Spiegel innerhalb der Zeit, welche das Licht zum Durcheilen der Strecke $2D$ gebraucht, seine Lage um den Winkel α geändert hat, so ist der nach p von m reflektierte Strahl um 2α gegen die Richtung des ursprünglich einfallenden Strahles gedreht, und es entsteht durch Reflexion an p ein seitlich abgelenktes Bild P'' der Lichtquelle P. Aus der Ablenkung $P'P''$, der Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels m, und aus den Entfernungen D und Δ kann man offenbar die Lichtgeschwindigkeit finden.

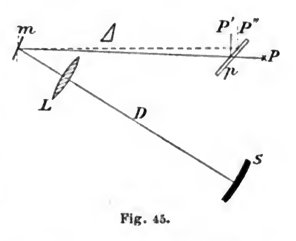


Fig. 45.

Wählt man $\Delta = 1$ m, $D = 4$ m, und macht der Spiegel m 1000 Umdrehungen in der Sekunde, so wird die Verschiebung $P'P''$ gleich 0,34 mm. Foucault vergrößerte die Entfernung D von 4 m auf 20 m durch mehrfache hin- und hergehende Reflexionen an fünf etwas gegeneinander geneigten Spiegeln s.

Im Prinzip ist diese Methode ungünstiger als die Fizeausche, da hier außer der Tourenzahl noch die Messung der kleinen Verschiebung $P'P''$ notwendig ist. Michelson hat aber durch Vergrößerung der Entfernung D (bis auf 600 m) die Genauigkeit der Methode erheblich gesteigert, indem er dadurch auch bei mäßiger Tourenzahl (etwa 200 in der Sekunde) starke Verschiebungen $P'P''$ (bis zu 13 cm) erhielt. Bei der Foucaultschen Anordnung war

eine erhebliche Vergrößerung von D nicht möglich, wenn nicht der Hohlspiegel s ungeheure Dimensionen besitzen sollte. Denn wenn auch stets ein Punkt der Lichtquelle P bei beliebig großem D und kleinem Spiegel s zur Abbildung gelangt, so würde doch ein etwas seitlich gelegener Punkt P_1 der Lichtquelle, dessen einfallender Hauptstrahl von P_1 nach der Mitte von m geht, nicht mehr zur Abbildung kommen, da der Hauptstrahl nach dem Durchgang durch die Linse L schief gegen ihre Achse verläuft, und daher bei großem D einen großen Spiegel s zur Reflexion verlangt. Die Abbildung eines einzigen Punktes P einer Lichtquelle ergibt aber eine zu geringe Lichtintensität. Diesen Übelstand hat Michelson vermieden, indem er die Linse L nicht nahe am rotierenden Spiegel aufstellte, sondern in Brennweitenabstand. Dadurch werden auch die von seitlichen Punkten der Lichtquelle herrührenden Hauptstrahlen nach ihrem Durchtritt durch L achsenparallel, man kann eine beliebige Distanz D wählen und einen planen Spiegel s senkrecht zur Achse von L zur Reflexion verwenden. Der Spiegel braucht nur die Größe der Öffnung der Linse zu besitzen. — Aus zahlreichen Messungen erhielt Michelson

$$V = 2{,}999 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sek.}$$

Auch Newcomb erhielt nach der Methode des rotierenden Spiegels einen nahe damit übereinstimmenden Wert.

Als Mittelwert der von Cornu, Michelson, Newcomb angestellten Messungen ergibt sich[1])

$$V = 2{,}999 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sek.}$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler von höchstens 1 : 1000. Das Resultat dieser terrestrischen Methoden ist viel zuverlässiger als das der astronomischen Methoden, weil bei letzteren die Fehler bei der Bestimmung der Sonnenparallaxe sich geltend machen. — Eine sehr genaue Methode zur Messung der Lichtgeschwindigkeit hat Michelson erdacht (Phil. Mag. **6**, 336, 1902). Diese besteht in einer Kombination der Methoden von Fizeau und Foucault und dürfte erlauben, die Lichtgeschwindigkeit bis auf mindestens 5 $\mathrm{km/sek.}$ genau zu bestimmen.

Trotz des außerordentlich großen Wertes der Lichtgeschwindigkeit, welche 900 000 mal so groß als die des Schalles in der Luft ist, braucht das Licht doch eine zum Teil bedeutende Zeit, um astronomische Entfernungen zu durchmessen. Dies sehen wir

1) A. Cornu (Rapp. d. Congr. intern. à Paris, 1900, II, S. 246) hält die Zahl $V = 3{,}0013 \cdot 10^{10}$ für die wahrscheinlichste.

z. B. bei der Römerschen Methode, ferner braucht das Sonnenlicht $8^1/_4$ Minuten, um zur Erde zu gelangen, das Licht selbst der nächsten Fixsterne dagegen viele Jahre (z. B. von α centauri $3^3/_4$ Jahre, vom Sirius 17 Jahre). Große Entfernungen im Weltraume pflegt man hiernach in Lichtjahren auszudrücken.

5. Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Medium und der Farbe. Die Lichtgeschwindigkeit ist von der Intensität der Lichtquelle unabhängig. Dies ist durch sehr empfindliche Interferenzversuche von Lippich und Ebert und ferner von Doubt (Phys. Rev. 18, 129, 1904) konstatiert. Nach Doubt bleibt die Lichtgeschwindigkeit mindestens bis auf 10^{-9} ihres Wertes konstant, wenn die Intensität im Verhältnis 1:290 000 verändert wird. Dagegen ist die Lichtgeschwindigkeit wohl abhängig von dem Medium, in welchem sich das Licht fortpflanzt. Foucault verglich mit seiner Methode die Lichtgeschwindigkeit in Luft und in Wasser, indem er vor dem rotierenden Spiegel m das Licht nach zwei seitlich aufgestellten Hohlspiegeln $s_1 s_2$ reflektieren ließ, wobei vor den einen s_2 eine 2 m lange, mit Wasser angefüllte Röhre eingeschaltet war. Es ergab sich nun, daß das von letzterem Hohlspiegel s_2 reflektierte Bild bei Rotation des Spiegels m eine stärkere Verschiebung erlitt als das von s_1 reflektierte Bild, und dies ist ein Beweis, *daß sich das Licht in Wasser langsamer fortpflanzt als in Luft.*

Quantitative Bestimmungen über die Lichtgeschwindigkeit im Wasser und im Schwefelkohlenstoff hat Michelson ausgeführt; für das Verhältnis der Geschwindigkeiten in Luft und in Wasser fand sich 1,33, in Luft und in Schwefelkohlenstoff bei Anwendung weißen Lichtes 1,77. Erstere Zahl stimmt genau, letztere annähernd (s. w. u.) mit dem beobachteten Brechungsexponenten. Man nimmt an (und die Wellentheorie des Lichtes erfordert es), daß dieses Resultat für alle Körper gilt. Demnach muß auch die Lichtgeschwindigkeit in der Luft, entsprechend ihrem absoluten Brechungsexponenten $n_0 = 1,00029$, etwas kleiner sein als im Vakuum. Die oben mitgeteilte Zahl der Lichtgeschwindigkeit, die sich als Mittel aus den terrestrischen Versuchen ergibt, enthält schon diese Reduktion auf das Vakuum.

Da bei allen durchsichtigen Körpern der Brechungsexponent für rote Strahlen kleiner ist als für blaue Strahlen, so ist zu erwarten, daß für die verschiedenen Farben die Lichtgeschwindigkeiten in ein und demselben Körper umgekehrt proportional mit der Änderung seines absoluten Brechungsindex sein werden, falls

die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig von der Farbe ist. Dies ist nun auch in der Tat direkt von Michelson nachgewiesen, indem er beim Wasser die Geschwindigkeit der roten Strahlen um 1,4 %, im Schwefelkohlenstoff um 2,5 % größer fand als die der blauen Strahlen. Dies stimmt annähernd mit der Dispersion dieser Körper.

Daß die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unabhängig von der Farbe ist, folgt aus dem Umstande, daß bei Eintritt oder Aufhören der Verfinsterung der Jupitersmonde dieselben nie farbig erscheinen; ferner sollten temporäre Sterne nicht in einer bestimmten Farbenfolge aufleuchten. Diesem Schluß scheinen allerdings gewisse astronomische Beobachtungen entgegen zu stehen.

In Anbetracht der geringen Dispersion der Luft besteht in ihr praktisch kein Unterschied der direkt gemessenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der verschiedenen Farben.

6. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellengruppe. Bei Untersuchung der Lichtgeschwindigkeit in einem stark dispergierenden Mittel, wie z. B. Schwefelkohlenstoff, ist indes noch eine Korrektion von Bedeutung, auf die zuerst Rayleigh hingewiesen hat. Wie wir nämlich im nächsten Kapitel sehen werden, führen die Interferenzerscheinungen zu der Vorstellung, daß das Licht in der periodischen Änderung einer gewissen Zustandsgröße s im Äther oder im betreffenden Körper bestehe, die in Anbetracht der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Form geschrieben werden kann:

$$s = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right). \tag{2}$$

Dies ist der Ansatz für sogenannte ebene Wellen, welche sich nach der x-Achse mit der Geschwindigkeit V fortpflanzen. T bedeutet die zeitliche Periode von s, und von ihr hängt die Farbe des Lichtes ab, A ist die sogenannte Amplitude, von der die Lichtstärke abhängt. Zu unterscheiden von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der einzelnen Welle ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit U einer Wellengruppe. Bei der Fizeauschen Methode z. B. wird durch die Rotation des Zahnrades an einer bestimmten Stelle g auf dem Wege der Lichtstrahlen abwechselnd das Licht abgeschnitten oder zugelassen. Fassen wir solch letzteren Moment ins Auge, so wird g trotz hoher Rotationsgeschwindigkeit des Zahnrades in Anbetracht der sehr kleinen Periode T noch von einer großen Anzahl von Wellen getroffen. Durch das Experiment wird nun die Fort-

pflanzungsgeschwindigkeit eines solchen Komplexes von Wellen gemessen. — Wir können mathematisch den Vorgang dieses Experimentes annähernd darstellen, wenn wir annehmen, daß sich zwei Wellen gleicher Amplitude, aber von etwas verschiedenen Perioden T_1 und T_2, sowie verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V_1 und V_2 übereinander lagern. Man würde dann erhalten

$$s = A \cdot \left\{ \sin \frac{2\pi}{T_1}\left(t - \frac{x}{V_1}\right) + \sin \frac{2\pi}{T_2}\left(t - \frac{x}{V_2}\right) \right\} = \tag{3}$$

$$2A \cdot \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{V}\right) \cos \pi \left[t\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) - x\left(\frac{1}{T_1 V_1} - \frac{1}{T_2 V_2}\right)\right],$$

wobei gesetzt ist:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right), \quad \frac{1}{TV} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1 V_1} + \frac{1}{T_2 V_2}\right). \tag{4}$$

Die Formel (3) stellt nämlich jetzt einen Lichtzustand der Periode T mit periodisch veränderlicher Amplitude (eine „Schwebung") dar. Die Periode T_0 der Amplitudenveränderung würde sein:

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}. \tag{5}$$

T_0 bestimmt sich aus der Rotationsgeschwindigkeit des Zahnrades und ist groß im Vergleich mit T_1 oder T_2. Daher muß T_1 nahezu gleich dem Werte von T_2 sein.

Setzt man ferner

$$\frac{1}{T_0 U} = \frac{1}{T_1 V_1} - \frac{1}{T_2 V_2}, \tag{6}$$

so geht aus (3) hervor, daß an dem Orte $x = l$ eine maximale Amplitude des Wellenzuges um die Zeit $l : U$ später eintritt als am Orte $x = 0$. Daher ist U die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellengruppe, die direkt bei der Fizeauschen Methode gemessen wird. U wird kurz als „Gruppengeschwindigkeit" zum Unterschied von der „Phasengeschwindigkeit" V bezeichnet.

Setzt man $T_2 = T_1 + dT_1$, $V_2 = V_1 + dV_1$, und entwickelt man bis auf Glieder erster Ordnung in den kleinen Werten dT_1 und dV_1, so erhält man aus (5) und (6):

$$U = V_1 \left(1 - \frac{T_1}{V_1}\frac{dV_1}{dT_1}\right). \tag{7}$$

In dieser Formel sind für T_1 und T_2 mit der gleichen Genauigkeit T und V, d. h. die Periode und Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Welle, einzusetzen.

Die Formel (7) lehrt, daß die Geschwindigkeit U der Wellengruppe, wie sie direkt beobachtet wird, etwas kleiner als die Licht-

geschwindigkeit V einer einzelnen Farbe ist, da in allen durchsichtigen Körpern V mit T wächst. Die Korrektion ist aber für Luft in Anbetracht der Kleinheit von $dV : dT$ unmerklich, dagegen wohl merklich im stark dispergierenden Schwefelkohlenstoff. Für diesen erreicht die Korrektion den Wert 7,5 %. Da nun, wie eine eingehende Analyse zeigt, auch die Methode des rotierenden Spiegels den Wert U liefert, so ist verständlich, weshalb Michelson die Lichtgeschwindigkeit in Luft 1,77 mal größer fand als in Schwefelkohlenstoff, obwohl ein Brechungsindex nur das Verhältnis 1,64 liefern würde. Vergrößert man aber 1,64 um 7,5 %, so erhält man in naher Übereinstimmung mit Michelsons Beobachtung den Wert 1,76.

Auch die Römersche Methode liefert den Wert U der Gruppengeschwindigkeit, während die astronomische Aberration direkt V liefert. Hier bestehen aber keine Unterschiede in beiden Größen, da der Weltraum, wenn überhaupt eine, dann keine beträchtliche Dispersion, d. h. keine starke Abhängigkeit des V von der Farbe besitzt.

Betreffs weiterer Erörterungen der Gruppengeschwindigkeit und der Natur des weißen Lichtes vgl. z. B. A. Schuster, Einführung in die theoretische Optik, Verlag von Teubner 1907, S. 372 ff.

Kapitel II.

Interferenz des Lichtes.

1. Allgemeines. Unter Umständen nimmt man wahr, daß die Übereinanderlagerung zweier genau oder nahezu paralleler Strahlenbündel nicht einen verstärkten Lichteffekt ergeben, sondern sich in ihrer Wirkung stören können, so daß Dunkelheit entsteht. Solche Erscheinungen werden als Interferenz des Lichtes bezeichnet.

Es sind zwei Gattungen von Interferenzerscheinungen zu unterscheiden, je nachdem die Strahlenbündel nur regelmäßige Reflexionen oder Brechungen erfahren haben, oder je nachdem sie von ihrer geraden Bahn durch sogenannte Lichtbeugung abgelenkt sind. Nur erstere Interferenzerscheinungen sollen in diesem Kapitel, letztere dagegen bei den Beugungserscheinungen besprochen werden. Indes werden auch einige Interferenzerscheinungen dieses Kapitels, nämlich die unter 3. und 4. behandelten, welche gerade die naheliegendsten Anordnungen zur Erzeugung von Interferenzen sind,

durch Beugung etwas modifiziert, während wir in 5., 7., 8. und 9. reine Interferenzerscheinungen kennen lernen werden, d. h. solche, bei welchen gar keine Lichtbeugung vorkommt.

2. Hypothesen über die Natur des Lichtes. Die Vorstellungen von der Natur des Lichtes und die daran anknüpfenden mathematischen Erörterungen haben sich im Laufe der Zeit mehrfach verändert. Solange man noch nichts von der Unzerstörbarkeit der Energie wußte, wurde jedes Agens, welches ein gewisses Vermögen zeigte, sich fortzubewegen und unter wechselnden Bedingungen fortzubestehen, als eine Substanz betrachtet. Die geradlinige Bewegung des Lichtes unterstützte diese Auffassung; denn das Licht kann in seinen Wegen zwar aufgehalten werden, geht aber, wenn kein Hindernis entgegensteht, im allgemeinen in gerader Linie weiter. Es lag nahe, dieses Verhalten als Folge der Trägheit eines materiellen Körpers aufzufassen. Daher stellte Newton die Emissionstheorie des Lichtes auf, nach der das Licht aus kleinen materiellen Teilchen besteht, die mit sehr großer Geschwindigkeit von den leuchtenden Körpern ausgestoßen werden und in gerader Linie durch den Raum hinfliegen. Zur Erklärung der Brechung mußte man annehmen, daß die stärker brechenden Körper eine größere Anziehungskraft auf die Lichtkörperchen ausüben, so daß in dem Moment, wo ein solches Teilchen in schräger Richtung an der Oberfläche eines dichteren Mediums anlangt, es eine Anziehung erleidet, welche der zur Oberfläche senkrechten Komponente seiner Geschwindigkeit einen größeren Wert gibt, und dadurch die Richtung seiner Bahn dem Einfallslot nähert. Es müßte also danach die Geschwindigkeit des Lichtes im stärker brechenden Körper größer sein als in seiner Umgebung. — Bildet dieser Punkt schon eine Widerlegung der Emissionstheorie — denn wir haben oben S. 113 gesehen, daß die Lichtgeschwindigkeit im Wasser kleiner ist als in Luft —, so häufen sich die Schwierigkeiten bei der Erklärung der Interferenzerscheinungen vom Standpunkt der Emissionstheorie noch ins Ungeheure. / Gerade die Interferenzerscheinungen sind eine, man möchte fast sagen direkte Bestätigung einer wesentlich anderen Hypothese über die Natur des Lichtes, nämlich der von Huygens ausgebildeten Undulationstheorie.

Nach dieser Theorie werden dem Lichte ähnliche Eigenschaften wie dem Schalle beigelegt. Es soll in der periodischen Änderung einer gewissen Zustandsgröße s des lichtdurchstrahlten Körpers (oder leeren Raumes) bestehen, welche sich mit endlicher Geschwin-

digkeit fortpflanzt, so daß, wenn man die Änderungen von s auf der Bahn eines Lichtstrahles geometrisch durch eine Strecke darstellt, die Endpunkte derselben zu irgend einer Zeit auf einer wellenförmigen Kurve liegen würden.

Worin diese Zustandsgröße s besteht, deren periodische Änderung das Wesen des Lichtes ausmacht, können wir vorläufig ganz unentschieden lassen. Bei den sogenannten mechanischen Lichttheorien wird der Raum mit einem feinen elastischen Stoffe, dem Äther, erfüllt gedacht, und s wird als Verrückung der Ätherteilchen aus ihrer Gleichgewichtslage interpretiert. Eine solche spezielle Annahme ist aber zunächst gar nicht nötig. Es genügt, wenn wir, um die Lichterregung durch eine Quelle Q an einer beliebigen Stelle P des durchstrahlten Raumes analytisch darzustellen, die periodische Veränderlichkeit einer Zustandsgröße s am Orte P einführen durch die Formel:

$$s = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right), \tag{1}$$

wobei t die Zeit bedeutet, während A, T und δ Konstanten sind. A ist die sogenannte Amplitude, T die Periode des Lichtzustandes s. Letztere variiert mit der Farbe des Lichtes, von ersterer hängt die Lichtwirkung J[1]) an der Stelle P, auf welche sich s bezieht, also z. B. die Beleuchtungsstärke eines dort angebrachten Schirmes, ab, und zwar können wir, schon aus Analogie mit anderen physikalischen Wellenerscheinungen, setzen

$$J = A^2. \tag{2}$$

Aus jeder Theorie des Lichtes ergibt sich nämlich, daß die Amplitude A des von einer punktförmigen Quelle ausgebreiteten Lichtes umgekehrt proportional zu der Entfernung r von der Quelle Q ist. Da nun erfahrungsmäßig die Beleuchtungsstärke umgekehrt proportional zu r^2 ist (vgl. oben S. 73), so kann die Lichtwirkung (Intensität) J durch das Quadrat der Amplitude dargestellt werden.

Wenn sich das Licht von dem Punkte P nach einem um r entfernten Punkte P' mit der Geschwindigkeit V fortpflanzt, so braucht es zum Durcheilen der Strecke r die Zeit $t' = r : V$. Wenn also der Lichtzustand in P durch (1) dargestellt ist, so wäre er in P' gegeben durch

1) Diese Lichtwirkung wird auch kurz als **Intensität des Lichtes an der Stelle P** bezeichnet. Zu unterscheiden von diesem Begriff ist der oben S. 76 definierte Begriff der Intensität i der Lichtquelle Q.

$$s' = A' \sin\left(2\pi \frac{t - r/V}{T} + \delta\right), \tag{3}$$

denn s' ist zu einer um r/V späteren Zeit allemal in demselben Schwingungszustand, z. B. Nulllage, wie s im Punkte P. Der Schwingungszustand, d. h. das Argument der periodischen Funktion, wird die Phase des Lichtes genannt.

Wenn sich von einer punktförmigen Lichtquelle Q aus das Licht gleichförmig nach allen Seiten ausbreiten kann, so gilt offenbar der Ansatz (3) für jeden Punkt P', der die Entfernung r von Q besitzt. Irgend eine um Q als Zentrum beschriebene Kugelfläche enthält also nur Punkte gleicher Phase. Solche Flächen, die Punkte gleicher Phase verbinden, heißen Wellenflächen. Die von einer punktförmigen Lichtquelle Q sich ausbreitenden Wellenflächen sind als konzentrische Kugelflächen, die von Q austretenden Lichtstrahlen sind die Radien dieser Kugelflächen, stehen also senkrecht auf ihnen. Je weiter man sich von Q entfernt, um so ebener werden die Wellenflächen und um so paralleler die Lichtstrahlen. Ein Parallelstrahlbündel hat also senkrecht zu den Strahlen verlaufende, einander parallele, ebene Wellenflächen (Wellenebenen). Solche Wellen bezeichnet man daher auch kurz als ebene Wellen. Sie entstehen, wenn die Lichtquelle Q unendlich weit entfernt ist, oder wenn sich Q in dem Brennpunkte einer Sammellinse befindet, wodurch die austretenden Strahlen parallel gemacht werden.

Führt man die Bezeichnung ein:

$$T \cdot V = \lambda, \tag{4}$$

so wird (3) zu

$$s' = A' \sin\left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \delta\right], \tag{5}$$

d. h. bei bestimmter Zeit ist s' hinsichtlich r periodisch mit der Periode λ. Diese Periode λ, mit der sich also zu irgend einer bestimmten Zeit alle möglichen Phasen stets wiederholen, wird die Wellenlänge des Lichtes genannt.

Die Tabelle auf S. 120 gibt die Wellenlängen in Luft für verschiedenes Licht und die angrenzenden Gebiete der Ätherschwingungen an. Diese Werte sind aus Interferenz- oder Beugungserscheinungen ermittelt.

Nach der Wellentheorie ergibt sich, wie wir sehen werden, die Erklärung von Interferenzerscheinungen in der einfachsten Weise. Dagegen macht es bedeutende Schwierigkeiten, die geradlinige Ausbreitung des Lichtes zu erklären; gerade die Analogie

Wellenlängen:

Lichtart	λ in mm
Äußerstes ultraviolettes Licht, in Vacuumcamera photographiert[1]	0,000100
Äußerstes ultraviolettes Licht, ohne Vacuumcamera photographiert	0,000185
Blaues Ende des sichtbaren Lichtes	0,000330
Blaue Wasserstofflinie	0,000486
Natriumlinie	0,000589
Rote Wasserstofflinie	0,000656
Rotes Ende des (ausnahmsweise) sichtbaren Lichtes	0,000812
Längste bisher nachgewiesene Wärmewellen[2]	0,313
Kürzeste elektrische Wellen[3]	6

mit dem Schall weist ja auch auf einen scheinbaren Widerspruch, denn der Schall pflanzt sich nicht geradlinig fort. Diese Schwierigkeiten sollen erst im nächsten Kapitel näher behandelt und gehoben werden. Die Analogie mit dem Schall ergibt auch noch andere Schwierigkeiten, die die Erklärung der sogenannten Polarisationserscheinungen der Wellentheorie zunächst entgegenstellt und die lange Zeit die Wellentheorie trotz ihrer einfachen Erklärung der Interferenz nicht zur allgemeinen Anerkennung haben kommen lassen, bis daß man diese Widersprüche dadurch heben konnte, daß man eine engere Analogie mit den Schallerscheinungen fallen ließ. Auf diesen Punkt soll ebenfalls erst später eingegangen werden. Hier möge aber zunächst noch kurz darauf hingewiesen werden, wie nach der Wellentheorie eine Brechung zustande kommt.

Wenn eine ebene Welle schief auf die Grenzfläche eines brechenden Körpers trifft, so muß die Wellenebene zum Einfallslot hin gebrochen werden, falls die Lichtgeschwindigkeit im Körper geringer ist als in seiner Umgebung, welche z. B. Luft sein möge. Denn wenn ein Punkt A der einfallenden Wellenebene gerade auf der Grenzfläche liegt, so möge ein anderer Punkt B der Wellenebene noch außerhalb in der Luft liegen. Wenn nun die Welle sich von A aus langsamer fortpflanzt als zunächst von B, so ist klar, daß die Wellenebenen, welche ja diejenigen Punkte mit ein-

1) V. Schumann, Wien. Ber. (II) 102, S. 415, 625; 1893. — Eders Jahrb. 10, S. 42, 1896.

2) H. Rubens u. O. v. Baeyer, Berl. Ber. 1911, 339.

3) P. Lebedew, Wied. Ann. 56, S. 1, 1895. — Neuerdings hat O. v. Baeyer sogar elektrische Wellen von nur 2 mm Länge dargestellt (noch nicht publiziert).

ander verbinden, nach denen sich das Licht in derselben Zeit fortgepflanzt hat, bei Eintritt in den brechenden Körper geknickt werden müssen, derart, daß die Normalen der Wellenebenen (die Lichtstrahlen) zum Einfallslot hin gebrochen werden. Aus der Wellentheorie ergibt sich also in Übereinstimmung mit der Erfahrung, daß die Lichtgeschwindigkeit im Wasser kleiner sein muß als in Luft. — Die genauere Bestimmung der Lage der gebrochenen Wellenebenen soll erst später bei Besprechung des Huygensschen Prinzipes und strenger im I. Kapitel des II. Abschnittes abgeleitet werden. Nur soll gleich hier ein wichtiges Resultat vorangestellt werden: Der Brechungsexponent beim Übergang des Lichtes von einem Medium A zu einem Medium B ist gleich dem Verhältnis der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeiten in A und B.

Wir hatten oben S. 9 gesehen, daß die Fundamentalsätze der geometrischen Optik sich gemeinsam in dem Prinzip vom ausgezeichneten Lichtweg zusammenfassen lassen. Dasselbe gewinnt nach den Vorstellungen der Wellentheorie eine besonders anschauliche Bedeutung: Da der Brechungsexponent n eines Körpers gegen Luft umgekehrt proportional zur Lichtgeschwindigkeit im Körper ist, so ist der optische Weg nl proportional der Zeit, welche das Licht zum Durchlaufen der Strecke l braucht. Der Satz vom ausgezeichneten Lichtweg besagt also, daß das Licht zwischen zwei beliebigen Punkten P und P' denjenigen Weg wählt, für den alle unendlich nahe benachbarten Wege vom Licht in derselben Zeit durchmessen werden. Der (speziellere) Satz vom kürzesten Lichtweg drückt sich also hier aus als Satz von der schnellsten Ankunft des Lichtes.

Man kann sich demnach die Ausbildung eines bestimmten Strahlenganges vom Standpunkte der Wellentheorie folgendermaßen denken: Von P pflanzen sich nach P' Elementarstörungen auf allen möglichen Wegen fort. Sie gelangen aber im allgemeinen in P' zu verschiedenen Zeiten an, so daß die Phasen der einzelnen Elementarstörungen in P' nicht übereinstimmen und daher keine kräftige Summenwirkung erzielen. Eine solche wird aber sofort entstehen, sowie für ein unendlich dünnes Strahlenbündel die Fortpflanzungszeit zwischen P und P' die gleiche ist, so daß die Elementarstörungen in P' die gleiche Phase besitzen. Ein solches unendlich dünnes Strahlenbündel bezeichnet daher den tatsächlich stattfindenden Strahlengang, d. h. die Lichtwirkung in P' wird

abgeschnitten durch Hindernisse, die man in den Weg eines solchen Strahlenbündels stellt.

Wenn auch diese Überlegungen sehr einleuchtend sind, so ist ihre Beweiskraft doch nicht so groß, daß man nicht die Fundamentalgesetze der geometrischen Optik, z. B. den Satz der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes, noch auf eine strengere analytische Basis stellen müßte. Es muß vor allem die Frage gelöst werden: Weshalb besteht ein Unterschied in den Ausbreitungsgesetzen des Lichtes und des Schalles, obwohl doch beide Wellenbewegungen sind? Diese Frage soll aber erst im nächsten Kapitel gelöst werden.

Anstatt daß man an den Strahlengang anknüpft, um die Lichtwirkungen bei Anwesenheit irgend welcher brechender oder reflektierender Körper zu berechnen, kann man vom Standpunkte der Wellentheorie auch an die Deformation der Wellenfläche anknüpfen, welche durch den Körper herbeigeführt wird. Bei einer punktförmigen Lichtquelle P sind z. B. die Wellenflächen in der Umgebung von P Kugelflächen. Soll eine homozentrische Strahlenvereinigung in P' durch Brechung in einer Linse erreicht werden, so müssen die Wellenflächen nach dem Durchtritt durch die Linse konzentrische Kugelflächen mit dem Zentrum P' sein.

Da die Lichtstrahlen die Normalen der Wellenfläche sind, so ergibt sich der Malussche Satz (vgl. oben S. 13) vom Standpunkt der Wellentheorie von selbst, sowie man berücksichtigt, daß irgend welche Reflexionen und Brechungen nur den Effekt haben, die Wellenflächen irgendwie zu deformieren.

3. Der Fresnelsche Spiegelversuch. Vom Standpunkte der Wellentheorie erklären sich die Interferenzerscheinungen des Lichtes sofort durch das Prinzip der Superposition mehrerer Störungen des Lichtzustandes s. Wenn eine Lichtquelle Q_1 in einem Punkte P die Lichterregung

$$s_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \tag{6}$$

hervorbringt, eine Lichtquelle Q_2 dagegen in demselben Punkte P die Lichterregung:

$$s_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right), \tag{7}$$

so ist nach dem Prinzip der Superposition, das wir versuchsweise anwenden wollen und dessen Berechtigung sich aus dem Erfolg dieses Versuchs herleitet, die resultierende Lichterregung

$$s = s_1 + s. \tag{8}$$

Man kann nun diese Summe in die Form bringen

$$s = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \delta\right), \tag{9}$$

wenn man nämlich setzt:

$$\begin{aligned} A \cos \delta &= A_1 \cos 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + A_2 \cos 2\pi \frac{r_2}{\lambda}, \\ A \sin \delta &= A_1 \sin 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + A_2 \sin 2\pi \frac{r_2}{\lambda}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Größe A bedeutet die Amplitude der resultierenden Lichterregung.

Durch Quardieren und Addieren dieser beiden Gleichungen (10) erhält man die Intentität des resultierenden Lichtes im Punkte P zu

$$J = A^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2 A_1 A_2 \cos 2\pi \left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right). \tag{11}$$

Die Größe $2\pi \frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \Delta$ bedeutet nach (6) und (7) die Phasendifferenz der Einzelerregungen und man kann den Inhalt der Formel (11) allgemein in die geometrische Form kleiden (vgl. Fig. 46): Die resultierende Amplitude A ist gleich der dritten Seite eines aus den Einzelamplituden A_1 und A_2 mit dem Einschlußwinkel $\pi - \Delta$ konstruierten Dreiecks, wobei Δ die Phasendifferenz zwischen den beiden Einzelerregungen ist.

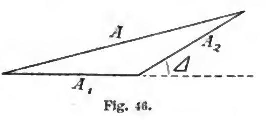


Fig. 46.

Aus diesem Satze ergibt sich, daß je nach der Phasendifferenz Δ Maxima und Minima der Lichtintensität zu erwarten sind, erstere für $\Delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ usw., letztere für $\Delta = \pm\pi, \pm 3\pi$ usw. Völlige Dunkelheit muß in den Minimis eintreten, falls noch $A_1 = A_2$ ist.

Bei dem Fresnelschen Spiegelversuch werden nun diese Verhältnisse dadurch realisiert, daß von einer Lichtquelle Q durch Reflexion an zwei sehr schwach gegeneinander geneigten Spiegeln S und S' zwei virtuelle Lichtquellen Q_2 und Q_1 abgeleitet werden. In dem von diesen beiden Lichtquellen gemeinsam erleuchteten Raume[1]) treten Interferenzen auf. Nach obiger Rechnung herrscht in einem Punkte P dann Dunkelheit, falls

$$r_1 - r_2 = \pm \frac{\lambda}{2}, \quad \pm \frac{3\lambda}{2} \text{ usw.} \tag{12}$$

1) Dieser Interferenzraum wird wesentlich kleiner, wenn ein Spiegel S etwas vorsteht vor dem anderen Spiegel S'. Daher ist darauf zu achten, daß die Spiegel mit ihren Kanten genau aneinander anschließen.

ist. Beschränken wir uns hinsichtlich der Punkte P auf eine zu $Q_1 Q_2$ parallele Linie (vgl. Figur 47) und nennen wir d die Distanz zwischen Q_1 und Q_2, a den Abstand der Linie d von der Linie der P, und p den Abstand eines Punktes P von einem, der Mitte von Q_1 und Q_2 gegenüber liegenden Punkte P_0, so ist

$$r_1{}^2 = a^2 + (\tfrac{1}{2}d + p)^2, \quad r_2{}^2 = a^2 + (\tfrac{1}{2}d - p)^2,$$

d. h.
$$r_1{}^2 - r_2{}^2 = (r_1 + r_2)\,(r_1 - r_2) = 2dp,$$

oder, da $r_1 + r_2$ sehr nahe gleich $2a$ ist, wenn p und d klein gegen a sind, so folgt:

$$r_1 - r_2 = dp : a,$$

d. h. es tritt Dunkelheit ein an den Stellen:

$$p = \pm \frac{a}{d} \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad \pm \frac{a}{d} \cdot \frac{3\lambda}{2}, \quad \pm \frac{a}{d} \cdot \frac{5\lambda}{2} \text{ usw.} \tag{13}$$

Auf einem in der Distanz a von der Linie d gehaltenen Schirme werden demnach bei homogener Beleuchtung (einheitlichem λ) Interferenzfransen auftreten, die den konstanten Abstand $a\lambda : d$ voneinander besitzen.

Bei Beleuchtung mit weißem Licht entstehen auf dem Schirme farbige Fransen, da die verschiedenen im weißen Licht enthaltenen Farben wegen der Verschiedenheit ihrer Wellenlängen an ver-

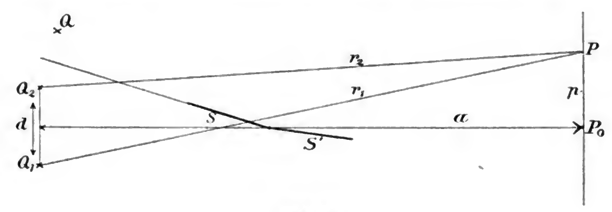


Fig. 47.

schiedenen Stellen des Schirmes maximale Helligkeit bezw. Dunkelheit erzeugen. Nur im mittleren Punkte P_0 entsteht keine Farbe, da in ihm für alle Farben maximale Lichtstärke besteht ($r_1 - r_2 = 0$).

Der Abstand d beider virtueller Lichtquellen berechnet sich aus der Lage der wirklichen Lichtquelle Q zu den Spiegeln und der Neigung derselben gegeneinander. Diese Neigung muß sehr gering sein (wenige Bogenminuten), damit d so klein wird, daß die Interferenzfransen deutlich voneinander getrennt sind. Da in

(13) nur das Verhältnis $a:d$ vorkommt, so braucht man nur den Winkel zu messen, unter dem von der Beobachtungsstelle P_0 aus die beiden Bilder Q_1 und Q_2 erscheinen.

Anstatt daß man die Interferenzfigur auf einem Schirme auffängt, kann man sie auch ohne denselben mit Hilfe einer Lupe betrachten, oder auch mit dem Auge direkt, wenn man dasselbe in den Gang der von Q_1 und Q_2 ausgehenden Strahlen bringt, und auf einen Punkt P im Abstand a von den Lichtquellen akkommodiert.[1]) Figur 48 zeigt eine Anordnung, mit deren Hilfe man quantitative Messungen, z. B. die Wellenlängenbestimmung, ausführen kann:

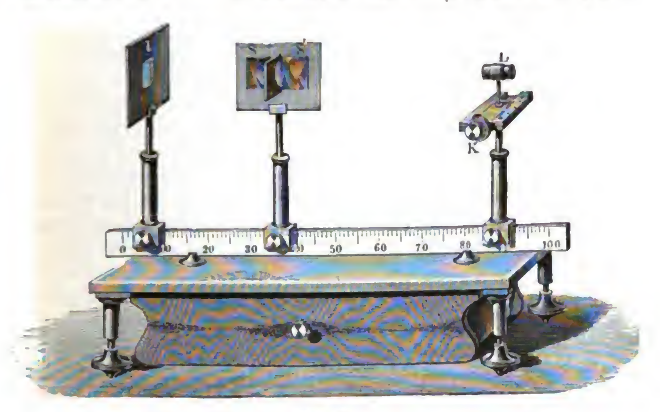


Fig. 48.

Eine Zylinderlinse l erzeugt von einer Lampe eine reelle Lichtlinie. Dieselbe dient als Lichtquelle Q und läßt Strahlen auf die beiden Spiegel S und S' fallen, deren Berührungskante parallel zur Achse der Zylinderlinse gerichtet wird. Senkrecht zu den Spiegeln ist noch

1) Wenn man nämlich mit oder ohne Lupe auf einen Punkt P akkommodiert, so gelangen die beiden interferierenden Strahlenbündel mit derselben Phasendifferenz zum Bilde des Punktes P auf der Netzhaut, wie sie in P selbst besteht, da für alle von P ausgehenden Strahlen ihre optische Länge bis zum Netzhautbilde dieselbe ist. Es ist daher auch auf der Netzhaut die Beleuchtungsstärke gleich Null, wenn sie es auf einem in P befindlichen Schirme sein würde.

ein Schirm zur Abhaltung des direkt von Q kommenden Lichtes befestigt. Die Interferenzfransen werden mit der mit Fadenkreuz versehenen Lupe L beobachtet, die Lupe ist mit Hilfe der Mikrometerschraube K verschiebbar.

Es ist die Frage, ob man, anstatt durch Spiegelung von einer Lichtquelle zwei benachbarte herzustellen, nicht Interferenzen dadurch einfacher erzeugen kann, daß man dicht vor eine ausgedehntere Lichtquelle einen Schirm mit zwei nahe benachbarten Löchern stellt, welche dann als Lichtquellen wirken.

In diesem Falle erhält man aber keine Interferenz, auch wenn man eine homogene Farbe, z. B. eine durch Kochsalz gefärbte Alkoholflamme benutzt. Wenn nämlich zwei Lichtquellen interferieren sollen, so müssen ihre Phasen zu jeder Zeit entweder genau übereinstimmen, oder mindestens eine konstante Differenz besitzen. Man pflegt solche Lichtquellen als kohärente zu bezeichnen. Man erhält dieselben stets, wenn aus einer ursprünglichen Lichtquelle durch irgend welche optische Anordnungen zwei abgeleitet werden. Bei inkohärenten Lichtquellen dagegen, wie sie zwei verschiedene Punkte einer Flamme sind, ist zwar die Phasendifferenz für eine große Anzahl von Perioden konstant, da wir weiter unten sehen werden, daß eine Lichtquelle homogener Farbe eine große Anzahl Schwingungen mit vollkommen konstanter Periode ausführt, indes treten doch Unregelmäßigkeiten der Schwingung auf innerhalb sehr kurzer Zeiten, die im Auge noch keine getrennten Lichteindrücke hervorrufen. Daher variiert bei inkohärenten Lichtquellen ihre Phasendifferenz innerhalb solcher, über viele Millionen von Schwingungen sich erstreckender Zeiten. Dies verhindert das Auftreten von stillstehenden, sichtbaren Interferenzen.

Wie schon oben (S. 116) bemerkt wurde, ist bei diesem einfachen Interferenzversuch Beugung des Lichtes nicht ganz ausgeschlossen. Sämtliche Begrenzungen der Spiegel können dazu Veranlassung geben, namentlich aber die Kante, in der sie sich berühren. Um diesen Einfluß zu vermeiden, empfiehlt sich eine erhebliche Neigung des einfallenden Lichtes gegen die Spiegel (45^0 zum Beispiel), sowie Beobachtung in größerer Distanz von denselben. Auch darf die Neigung der Spiegel gegeneinander nicht zu klein genommen werden. Man erreicht dadurch, daß von dem Beobachtungspunkte P die Randstrahlen, welche von Q_1 bezw. Q_2 nach der Berührungskante der Spiegel zielen, möglichst weit entfernt sind.

4. Modifikationen des Fresnelschen Spiegelversuches. Die

in 3. angestellten Betrachtungen sind typisch für alle Fälle, bei denen man Interferenzen erzeugt durch Herstellung zweier kohärenter Lichtquellen Q_1 und Q_2 aus einer einzigen Q. Diese Herstellung kann noch in verschiedenen anderen Arten geschehen. So verwendet Michelson[1]) zwei unter nahezu 90° gegeneinander geneigte Spiegel und erreicht dadurch den Vorteil, daß keine besondere Justierung, wie sie die Benutzung des Fresnelschen Spiegelapparates so häufig erschwert, erforderlich ist. Martens[2]) benutzt ein nahezu rechtwinkliges Prisma. — Classen[3]) verwendet zwei planparallele, gleichdicke Glasplatten, welche parallel zueinander mit etwa 45° Neigung gegen das einfallende Licht aufgestellt werden, doch wird die eine Platte um einen kleinen Winkel gedreht um eine in der Einfallsebene und Plattenebene liegende Achse. Diese Anordnung empfiehlt sich für Demonstrationen mit Hilfe der Projektion für ein größeres Auditorium.

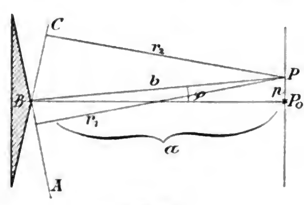


Fig. 49.

Besonders bequem ist das Fresnelsche Biprisma (vgl. Figur 49, das Biprisma ist im Querschnitt gezeichnet und schraffiert. Das Licht fällt von links ein), bei dem durch Brechung aus einer der Prismenkante B parallelen Lichtlinie Q zwei kohärente Lichtlinien Q_1 und Q_2 entstehen.

Stellt man ein solches Prisma mit vertikaler Kante B auf das Tischchen eines Spektrometers, verwendet man ein Kollimatorrohr mit vertikalem Spalt zur Beleuchtung (unendlich entfernte Lichtquelle Q), und sieht man zunächst mit dem Fernrohre des Spektrometers durch das Biprisma zum Spalt, so erblikt man zwei getrennte Spaltbilder. Der Winkel α, unter dem dieselben erscheinen,

1) A. A. Michelson, Amer. journ. of science (3) **39**, S. 216, 1890 — Ztschr. f. Instrkde. **11**, S. 141, 1891. — Journ. d. Phys. (2) **10**, S. 92, 1891. — Hierüber und überhaupt über andere Interferenzanordnungen vgl. auch Winkelmanns Handbuch der Physik, II. Aufl., Bd. VI (Optik), Kap. XXX (Interferenz des Lichtes), S. 878—1031. Autor W. Feussner.

2) F. F. Martens, Verhandl. d. deutsch. phys. Ges. **4**, S. 43, 1902.

3) J. Classen, Kasseler Naturforsch. Vers. — 12 Vorlesungen über Natur d. Lichtes, Leipzig, 1905, S. 49. Sammlg. Göschen.

wird an der Spektrometerteilung abgelesen, wenn man nacheinander beide Spaltbilder mit dem Fadenkreuz des Fernrohrs durch Drehen desselben in Koincidenz bringt. Dieser Winkel α ist der Supplementwinkel zu dem Winkel ABC (vgl. Figur 49), den die beiden gebrochenen Wellenebenen AB, BC nach dem Durchgang durch das Prisma miteinander bilden. — Nimmt man nun das Fernrohr fort, so beobachtet man mit einer auf einen Punkt P eingestellten Lupe Interferenzminima, wenn nach (12) ist $r_1 - r_2 = \pm \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda$ usw. Dabei sind r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes P von den Wellenebenen AB bezw. BC. Aus der Figur folgt

$$r_1 = b \sin (ABP), \quad r_2 = b \sin (CBP),$$

daher

$$r_1 - r_2 = 2b \cos \frac{ABC}{2} \cdot \sin \varphi.$$

Der Winkel φ ist sehr klein, daher $\sin \varphi = tg\, \varphi = p : a$. Ferner ist $ABC = \pi - \alpha$, und da, wenn wir bis auf erste Ordnung in φ gehen, $b = a$ zu setzen ist, und $\sin \alpha$ gleich α ist, so folgt schließlich

$$r_1 - r_2 = \alpha \cdot p.$$

Der relative Fransenabstand ist daher $\lambda : \alpha$, d. h. von a unabhängig. Da α mit dem Fernrohr beobachtet ist, so bietet die

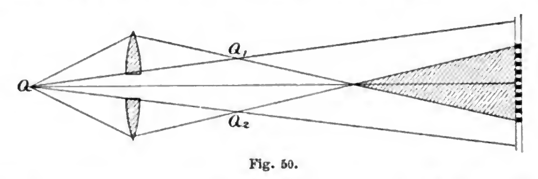


Fig. 50.

Messung des Fransenabstandes ein bequemes Mittel zur Bestimmung von λ.

Ähnlich wie das Fresnelsche Biprisma wirken die Billetschen Halblinsen (vgl. Figur 50), welche von einer Quelle Q zwei reelle oder virtuelle) Bilder erzeugen. Der Interferenzraum ist in der Figur schraffiert.

5. Newtonsche Ringe und Farben dünner Blättchen. Alle durchsichtigen Körper erscheinen lebhaft gefärbt, wenn man sie in genügend dünne Schichten bringt. Am leichtesten läßt sich dies an Seifenblasen zeigen, auch die Farben dünner Ölschichten auf Wasser, oder die Anlauffarben beim Erhitzen eines blanken Metallstückes gehören hierher.

Diese Erscheinungen lassen sich sofort erklären, sowie man sie als Interferenz des Lichtes auffaßt, welches an der Vorderfläche des Blättchens reflektiert wird, mit dem an der Hinterfläche reflektierten.

Betrachten wir zunächst homogenes Licht, welches als Strahl AB (vgl. Figur 51) auf eine dünne planparallele Platte der Dicke d schief (unter dem Einfallswinkel φ) einfällt. An der Vorderfläche der Platte wird der Strahl zerlegt in einen reflektierten BC, und in einen gebrochenen BD. Letzterer wird nun wiederum an der Hinterfläche reflektiert nach B' hin, und gelangt als Strahl $B'C'$ aus der Platte. Das Wesentliche der Erscheinung können wir diskutieren, wenn wir auf die Interferenz der beiden Strahlen BC und $B'C'$ achten. Werden dieselben in einem Netzhautpunkte vereinigt, d. h. akkommodiert man auf Unendlich, so nimmt man größte Dunkelheit wahr, wenn der Strahl BC um π, oder 3π, oder 5π usw. in der Phase verschieden ist vom Strahl $B'C'$.

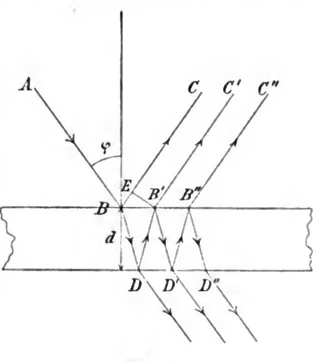


Fig. 51.

Allerdings sind für eine vollständige Berechnung der reflektierten Gesamtlichtintensität auch noch die wiederholten Reflexionen zu berücksichtigen, welche DB' wiederum an der Vorderfläche, $B'D'$ wiederum an der Hinterfläche usw. erleidet. Es soll dies aber erst später (II. Abschnitt, Kapitel II, § 11) geschehen. Man kann aber von vornherein erwarten, daß für nicht zu große Einfallswinkel durch die Berücksichtigung der wiederholt reflektierten Strahlen das Resultat nur unwesentlich geändert wird, da die Lichtstärke dieser Strahlen viel geringer ist als die der nur einmal reflektierten Strahlen BC und $B'C'$.

Wenn man nun von B' ein Lot $B'E$ auf BC fällt, so würden die beiden Strahlen BC und $B'C'$ keine Phasendifferenz gegeneinander besitzen, wenn die Phase in B' dieselbe wäre wie in E. Die Strahlen würden dann beide mit derselben Phase in einem Netzhautpunkte vereinigt werden. Die Phasendifferenz in den

Punkten E und B' ist daher identisch mit der Phasendifferenz der Strahlen BC und $B'C'$.

Die Phasendifferenz zwischen B' und E ist aber:

$$\varDelta = 2\pi\left(\frac{BD + DB'}{\lambda'} - \frac{BE}{\lambda}\right),$$

wenn mit λ' die Wellenlänge des Lichtes in der Platte, mit λ die Wellenlänge in der Umgebung bezeichnet wird. Nun ist, falls mit χ der Brechungswinkel bezeichnet wird

$$BD = B'D = d : \cos\chi, \quad BE = BB' \cdot \sin\varphi = 2d \cdot tg\,\chi \cdot \sin\varphi,$$

ferner $\lambda : \lambda' = n$ (Brechungsindex der Platte gegen Umgebung). So wird daher

$$\varDelta = \frac{2\pi \cdot 2d}{\lambda'}\left(\frac{1}{\cos\chi} - tg\,\chi\,\frac{\sin\varphi}{n}\right),$$

oder, wenn man nach dem Brechungsgesetz $\sin\varphi = n \sin\chi$ setzt:

$$\varDelta = \frac{2\pi \cdot 2d}{\lambda'}\cos\chi. \tag{14}$$

Dieser Ausdruck ist aber noch durch ein wesentliches Zusatzglied zu korrigieren. (14) gibt die Phasendifferenz an, wie sie in den beiden Strahlen BC und $B'C'$ durch verschieden lange optische Wege entstanden ist. Es besteht aber noch ein anderer Unterschied zwischen beiden Strahlen: BC hat eine Reflexion erlitten bei Übergang des Lichtes von Luft zur Platte, $B'C'$ dagegen bei Übergang von Platte zu Luft. Mit dem Vorgang der Reflexion ist im allgemeinen eine Phasenänderung verknüpft; da die Reflexion der beiden Strahlen BC und $B'C'$ nun aber unter verschiedenen Umständen erfolgt, so kommt zu der durch (14) ausgedrückten Phasendifferenz noch eine Größe $\varDelta'$ hinzu, welche lediglich durch die Reflexionen an sich, unabhängig von der Weglänge der Strahlen, entstanden ist. Wir werden demnach schreiben:

$$\varDelta = 2 \cdot \pi\frac{2d}{\lambda'}\cos\chi + \varDelta'. \tag{15}$$

Über diese Größe $\varDelta'$ können wir eine Aussage machen, ohne uns in die Theorie des Lichtes weiter vertiefen zu müssen. Nehmen wir einmal den Fall an, daß die Dicke d der Platte allmählich zur Grenze $d = 0$ übergeht. Nach (14) würden wir dann keine Phasendifferenz zwischen beiden Strahlen BC und $B'C'$ erhalten, sie müßten also sich gegenseitig verstärken. Wenn wir nun aber annehmen, daß eine Platte der Dicke $d = 0$ mit dem leeren Raum identisch ist, so würde der Gang des Lichtes durch die Platte

gar nicht mehr gestört werden, (sofern wir annehmen, was wir tun wollen, daß das Medium oberhalb und unterhalb der Platte das gleiche, z. B. Luft, ist), und daher kann dann überhaupt kein reflektiertes Licht entstehen. Denn dasselbe ist immer nur dann möglich, wenn eine Störung der Homogenität des Raumes vorhanden ist, sonst würde sich ja Licht nie ungeschwächt durch einen homogenen, durchsichtigen Raum, wie z. B. das Vacuum ist, fortpflanzen können. — Für $d = 0$ wird also völlige Interferenz der beiden Strahlen BC und $B'C'$ eintreten, so daß wir überhaupt kein reflektiertes Licht erhalten. Da in diesem Falle ($d = 0$) $\Delta = \pm \pi$ sein muß, so ergibt dies nach (15) für Δ' die Bedingung:

$$\Delta' = \pm \pi. \tag{16}$$

Ob wir $\Delta' = + \pi$, oder $- \pi$, oder $+ 3\pi$ usw. annehmen, ist für diese Betrachtungen ganz gleichgültig, da die Zufügung von 2π zu der Phase eines Strahles keinerlei Änderung in seinem Schwingungszustande und seiner Natur hervorbringt.

In Rücksicht auf (16) finden wir also nach (15) größte Dunkelheit für den Fall, daß ist:

$$\frac{2d}{\lambda'} \cos \chi = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{17}$$

Im durchgehenden Lichte muß die Platte ebenfalls Interferenzwirkung zeigen. Da durch Absorption kein Licht in der Platte verloren gehen soll, so muß das durchgehende Licht die volle Intensität des einfallenden Lichtes haben, wenn das reflektierte Licht die Intensität Null hat. Dagegen muß das durchgehende Licht maximale Schwächung zeigen, falls das reflektierte Licht ein Maximum der Intensität zeigt. Dies tritt ein für Plattendicken d, welche gerade in der Mitte zwischen den nach (17) folgenden Plattendicken liegen, dann sind nämlich die beiden reflektierten Strahlen BC und $B'C'$ von gleicher Phase. Indes ist die Schwächung des durchgehenden Lichtes nie sehr stark, weil das reflektierte Licht hinter der vollen Intensität des einfallenden Lichtes stets sehr zurückbleibt. Die quantitativen Verhältnisse hierüber können erst bei weiterem Eingehen auf die Theorie abgeleitet werden (vgl. unten II. Abschnitt, Kapitel II).

Wenn man an Stelle einer planparallelen Platte eine keilförmige verwendet, so muß dieselbe im reflektierten Licht von schwarzen Interferenzfransen, die parallel zur Keilkante verlaufen, durchzogen erscheinen und zwar liegen dieselben an den Stellen,

deren Dicke d der Formel (17) entspricht. Damit die Orte der Fransen deutlich getrennt erscheinen, muß in Anbetracht der Kleinheit von λ' der Keilwinkel sehr gering sein.

Bei gewisser Akkomodierung des Auges sieht man bei einer ausgedehnten Lichtquelle die Interferenzfransen am deutlichsten. Um die Sichtbarkeit der Interferenzfransen in diesem Falle beurteilen zu können, ist an dem schon oben ausgesprochenen Grundsatze festzuhalten, daß nur diejenigen Lichtstrahlen interferenzfähig sind, welche von ein und demselben Punkt der Lichtquelle ausgehen, da nur solche Lichtstrahlen kohärente sind. Wir wollen nun 2 Fälle unterscheiden:

1. Es ist klar, daß sich in jedem Punkte P (Fig. 52), der in dem vor der Platte oder dem Keil befindlichen Raume beliebig gelegen ist, zwei kohärente, von einem Punkte der (im Endlichen gelegenen) Lichtquelle Q ausgehende Strahlen, von denen der eine QP an der Vorderfläche, der andere QD an der Hinterfläche reflektiert ist, schneiden werden. Diese Strahlen gehen vom

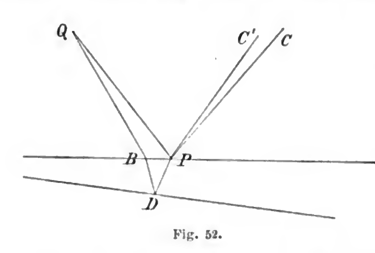


Fig. 52.

Punkte Q im allgemeinen in etwas verschiedener Richtung aus, sie werden aber auf einer Stelle der Netzhaut vereinigt, wenn das Auge auf die Schnittstelle P akkomodiert. Es kann also in diesem Falle eine Interferenz dieser beiden Strahlen wahrgenommen werden. — In demselben Punkte P schneiden sich aber auch noch beliebig viele andere kohärente Strahlenpaare, die von anderen Punkten der Lichtquelle ausgehen. Diese Strahlen durchsetzen aber im allgemeinen den Keil an verschiedenen Stellen und in verschiedener Neigung, und haben daher in P verschiedene Phasendifferenzen. Dadurch wird die Interferenzerscheinung für ein auf P akkommodiertes Auge undeutlich, oder verschwindet eventuell ganz. Die Interferenz wird nur dann mit größter Deutlichkeit wahrgenommen, wenn alle die von den verschiedenen Punkten der Lichtquelle ausgehenden, sich in P schneidenden kohärenten Strahlenpaare in P dieselbe Phasendifferenz besitzen. Dadurch bestimmen sich die Orte P der deutlichsten Sichtbarkeit der Inter-

ferenzfigur. Diese Orte P bilden eine zusammenhängende Fläche, die komplizierte Gestalt und Lage besitzt, wenn das einfallende Licht beliebig schief gerichtet ist.

Bei nahezu senkrecht einfallendem Licht ist aber die Lösung für einen dünnen Keil einfach: in diesem Falle sind ja die beiden reflektierenden Keiloberflächen an die Stelle der beiden gegeneinander geneigten Spiegel des Fresnelschen Versuches (vgl. S. 124) getreten und es ist klar, daß es keinen großen Unterschied machen kann, wenn man die beiden reflektierenden Flächen hintereinander statt nebeneinander anordnet. Man erblickt die Interferenzen auch, wenn man mit dem bloßen Auge auf den Keil selbst, z. B. seine Vorderfläche, akkommodiert. In der Tat, akkommodiert man auf einen Punkt P des Keiles (vgl. Figur 52), so sind QPC und $QBDPC'$ zwei kohärente Strahlen, die in einem Netzhautpunkte vereinigt werden. Dieselben haben eine gewisse Phasendifferenz, die nur von der Dicke d des Glaskeiles an der Stelle P abhängt, und die sich nach (15) und (16), da φ und daher (bei geringem Keilwinkel) auch χ nur wenig von Null verschieden sein soll, schreibt

$$\Delta = 2\pi \frac{2d}{\lambda'} + \pi.$$

Dieselbe Phasendifferenz besitzt aber jedes von einem anderen Punkte $Q'Q''$ usw. der Lichtquelle kommende kohärente Strahlenpaar, welches sich in P schneidet, da für alle Strahlen der Einfallswinkel φ und also auch χ genügend klein sein soll, so daß man $\cos\chi = 1$ setzen kann.[1])

Zur Beobachtung der Interferenzen bei wechselnden Dicken einer dünnen Schicht legte Newton eine schwach gekrümmte Konvexlinse auf eine ebene Glasfläche. Die dünne, zwischen beiden Gläsern befindliche Luftschicht gibt dann Anlaß zu konzentrischen Interferenzkreisen, deren Durchmesser, wie sich zeigen läßt, wie die Quadratwurzeln aus den geraden Zahlen zunehmen. Fig. 53 gibt eine Ansicht der Erscheinung bei Beleuchtung mit weißem Licht. Bei homogener Beleuchtung würden sich die Ringe bis an den Rand der Linse erstrecken.

1) Dies ist aber nur gestattet, wenn die Keildicke d nicht zu beträchtlich ist. Wenn d sehr groß wird, z. B. viele Tausende von Wellenlängen beträgt, so ist doch für die verschiedenen Strahlenpaare ihr wechselndes χ in Rücksicht zu ziehen. Dann wird aus diesem Grunde die Interferenz undeutlich.

Bei weißer Beleuchtung muß eine dünne Platte farbig erscheinen, denn es fehlen im reflektierten Licht alle diejenigen Farben, deren Wellenlänge λ der Gleichung (17) genügt. Wenn nun aber die Dicke d der Platte sehr beträchtlich ist, so erstrecken sich die fehlenden Farben in naher Reihenfolge gleichmäßig über das ganze Spektrum, die übrig bleibenden Farben ergeben daher ein von Weiß nicht zu unterscheidendes Gemisch. Ebenso ist die Färbung der Platte nicht intensiv, wenn sie zu dünn ist, weil dann



Fig. 53.

alle Farben entweder stark oder schwach vertreten sind. Für gewisse mittlere Dicken, die für eine Luftplatte etwa zwischen 0,00016 mm und 0,0008 mm liegen, sind die Färbungen am intensivsten. Diese Farben sind natürlich keine reinen Spektralfarben, sondern sie entstehen aus dem ganzen Spektrum durch Fehlen gewisser Farbenbereiche. — Bei dem Newtonschen Farbenglase zeigen die Ringe die sämtlichen Farben dünner Blättchen nebeneinander.

Wenn man eine Platte gegen das einfallende Licht schiefer neigt, so wechselt dadurch ihre Farbe. Denn wegen des in (17)

auftretenden Faktors *cos* χ muß ein schieferer Einfall des Lichtes denselben Effekt haben, als ob bei senkrechter Incidenz die Dicke d der Platte sich vermindere.

Im durchgehenden Licht ist die Farbe einer Platte komplementär zu der Farbe im reflektierten Lichte, weil beide Lichtintensitäten sich zu der einfallenden Intensität ergänzen müssen. Indes ist die Färbung im durchgehenden Lichte nie so gesättigt als im reflektierten Lichte, weil (vgl. S. 131) nicht, wie im reflektierten Licht, eine Farbe im durchgehenden Lichte völlig fehlen kann, sondern sie kann nur geschwächt erscheinen.

Die Farbe, welche ein dünnes Blättchen im reflektierten Lichte zeigt, ist ein sehr empfindliches Mittel, um seine Dicke zu bestimmen, falls man den Brechungsindex des Blättchens kennt. Man bedarf dazu nur der Kenntnis der Dicke einer Luftschicht, welche die gleiche Interferenzfarbe zeigt. Diese Kenntnis kann man sich aus den Farben der Newtonschen Ringe oder, wie wir später erkennen werden, durch kristall-optische Mittel verschaffen.

Eine Anwendung haben die hier besprochenen Interferenzen z. B. zur Bestimmung der thermischen Ausdehnung der Körper mit Hilfe des Abbe-Fizeauschen Dilatometers gefunden. Das Prinzip dieses Apparates[1]) ist, die geringen Distanzänderungen, welche zwischen den polierten Oberflächen O_1 und O_2 eines Körpers und einer Glasplatte infolge der thermischen Ausdehnung des Körpers eintreten, zu messen mit Hilfe der Veränderung der Interferenzfigur, die man zwischen beiden Flächen O_1 und O_2 zustande kommen läßt.

2. Der Strahlengang der Fig. 52 (siehe S. 132) ist ein völlig anderer als der in Fig. 51 (S. 129) für eine planparallele Platte. Man kann sich fragen, ob bei allmählichem Übergang von der planparallelen Platte zu einer keilförmigen Platte mit sehr kleinem Keilwinkel der für die erstere typische Vorgang erhalten bleiben kann; man kommt dann zu dem in Fig. 53a und b dargestellten Strahlengang in einer zur Keilkante senkrechten Einfallsebene. Derartige Interferenzen keilförmiger Platten hat im Prinzip zuerst Feussner[2]) experimentell und theoretisch näher behandelt; sie

1) Betreffs näherer Beschreibung vgl. Pulfrich, Ztschr. f. Instrumentenkunde 1893; oder Müller-Pouillet (Lummer), Optik, 9. Aufl. S. 924; 10. Aufl. S. 758.

2) Vgl. W. Feussner in Winkelmanns Handbuch der Physik, II. Aufl. Bd. VI Optik, S. 962ff. E. Gehrcke u. L. Janicki, Ann. d. Phys. 1912.

sind entweder virtuell (Fig. 53a) oder reell (Fig. 53b) und liegen an ganz bestimmten Stellen im Raume, zuweilen in beträchtlicher Entfernung von der Keilplatte.

6. Achromatisierung der Interferenzstreifen. Damit ein Interferenzstreifen achromatisch erscheint, ist notwendig, daß an seinem Orte die Phasendifferenz Δ der interferierenden Strahlen für alle Farben dieselbe ist. Ob der Streifen dann hell oder dunkel erscheint, hängt von dem Werte von Δ ab. So ist beim Newtonschen Farbenglase der zentrale Fleck farblos schwarz im reflektierten Lichte, weil für alle Farben die dort interferierenden Strahlen die Phasendifferenz $\Delta = \pi$ besitzen. Wenn man aber die

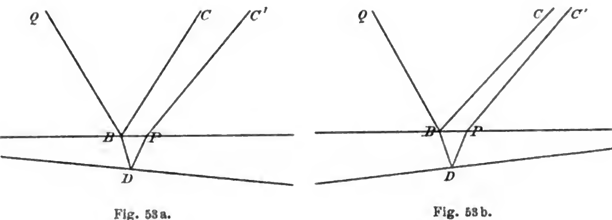


Fig. 53a. Fig. 53b.

Interferenzfigur durch ein Glasprisma betrachtet, so bleibt nicht mehr der zentrale Fleck achromatisch, sondern die achromatische Stelle liegt dort, wo Δ gar nicht oder möglichst wenig mit der Farbe variiert, d. h. wo der Differentialquotient ist

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = 0, \tag{18}$$

falls λ die Wellenlänge der Farbe in Luft ist.[1] Bei starker Dispersion des Glasprismas kann der Ort der achromatischen Stelle erheblich vom Zentralfleck abweichen.

Falls man vor die eine Seite eines Fresnelschen Biprismas eine dünne Platte, z. B. Glimmerblättchen, vorschiebt, so ändert sich ebenfalls die Interferenzfigur. Auch bei dieser Anordnung tritt ein achromatischer Streifen nicht dort auf, wo $\Delta = 0$ ist, wie es ursprünglich war ohne vorgeschobenes Blättchen, sondern an der

---

1) Strenger müßte die Gleichung geschrieben sein als $\frac{\partial \Delta}{\partial T} = 0$, wobei T die Periode ist. Wenn man aber absieht von der geringen Dispersion der Luft, so ist dies mit (18) identisch.

Stelle, die der Gleichung (18) entspricht. Es kommt hier in Betracht, daß das Blättchen infolge der Abhängigkeit seines Brechungsindex von der Farbe (Dispersion) den verschiedenen Farben verschiedene Phasenverzögerungen erteilt.

7. Der Interferentialrefraktor. Interferenzen geringen Gangunterschiedes, welche bei Anwendung weißen Lichtes sichtbar sind, kann man außer an sehr dünnen Lamellen auch an dicken Platten erzielen, wenn man Differenzwirkungen an zwei Platten hervorbringt. Die Jaminsche Konstruktion besteht darin, daß zwei gleich dicke planparallele Glasplatten P_1 und P_2 (vgl. Figur 54) in einem größeren Abstand nahezu parallel aufgestellt werden. Ein Lichtstrahl LA zerlegt sich in die Strahlen $ABCDE$ und $AB'C'D'E'$, welche zur Interferenz gelangen können, wenn die beiden austretenden Strahlen DE und $D'E'$ wieder in einem Punkte vereinigt werden. Da diese beiden Strahlen einander parallel sind, so muß also das die Strahlen DE bezw. $D'E'$ auffangende Auge auf Unendlich akkommodieren, oder sie müssen durch ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr vereinigt werden.

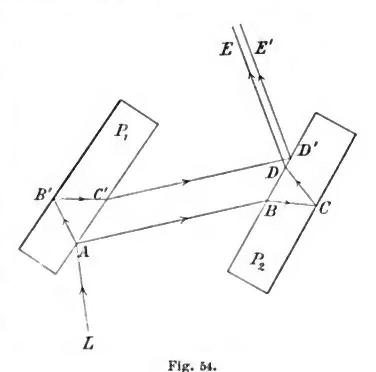


Fig. 54.

Zur Erzielung möglichster Lichtstärke stellt man die Lichtquelle in die Brennebene einer Sammellinse, so daß ein Bündel von Parallelstrahlen LA auf die Platte P_1 auffällt. Die Platten sind ferner an ihren Hinterflächen zweckmäßig versilbert. Die Phasendifferenz zwischen den Strahlen $C'D'$ und AB ist nach (15) (S. 130) $\frac{4\pi d}{\lambda'} \cos\chi_1 + \Delta'$, wobei χ_1 den Brechungswinkel in der Platte P_1 bedeutet. Die Strahlen $D'E'$ und DE erhalten nun außerdem noch die Phasendifferenz $-\left(\frac{4\pi d}{\lambda'} \cos\chi_2 + \Delta'\right)$, wobei der Brechungswinkel χ_2 in der Platte P_2 ein wenig abweicht vom Winkel χ_1, da beide Platten P_1 und P_2

nicht genau einander parallel sein sollen. Die schließliche Phasendifferenz von $D'E'$ und DE ist also:

$$\Delta = \frac{4\pi d}{\lambda'} (\cos \chi_1 - \cos \chi_2),$$

und da $\cos \chi_1 - \cos \chi_2$ etwas mit der Neigung des Strahles LA variiert, so wird das Gesichtsfeld bei E, E' von Interferenzfransen durchzogen sein.

Der Hauptvorteil dieses Interferentialrefraktors liegt darin, daß die beiden interferierenden Strahlen AB und $C'D'$ räumlich ziemlich weit voneinander getrennt sind, wenn recht dicke Glasplatten P_1, P_2 verwendet werden und das Licht schief einfällt (am besten unter einem Einfallswinkel von 50°). Man erhält dadurch ein Instrument, welches minimale Änderungen des Brechungsexponenten messen läßt. Wenn man z. B. zwei durch Glasplatten verschlossene Röhren in den Gang des Strahles AB bezw. $C'D'$ einschaltet, und man ändert in der einen Röhre durch Temperatur- oder Druckänderung den Brechungsindex der darin enthaltenen Luft, oder wenn man die Luft der einen Röhre durch ein anderes Gas ersetzt, so verschieben sich die Interferenzstreifen im Gesichtsfeld. Man kann die Differenz der Brechungsindizes in beiden Röhren berechnen, wenn man die an einer bestimmten Marke des Gesichtsfeldes vorbeigegangenen Interferenzstreifen zählt, oder wenn man die Phasendifferenz in beiden Strahlen durch irgend eine messende Vorrichtung so kompensiert, daß wieder die ursprüngliche Lage der Interferenzfransen entsteht. Als ein solcher Kompensator können zwei um eine gemeinsame Achse drehbare, gleich dicke Glasplatten p_1, p_2 dienen, welche einen geringen Winkel miteinander bilden (Jaminscher Kompensator). Der Strahl AB durchsetzt nur p_1, der Strahl $C'D'$ nur p_2. Die Phasendifferenz, welche beiden Strahlen dadurch erteilt wird, hängt von der Neigung der Platte p_1 gegen AB ab.[1]

Bei der Jaminschen Konstruktion kann man die beiden interferierenden Strahlenbündel praktisch um etwa 2 cm seitlich voneinander trennen. Eine viel größere Trennung erhält man nach Zehnder,[2] wenn man vier nahezu parallele Glasplatten ver-

---

1) Betreffs der genaueren Berechnung hiervon vgl. F. Neumann, Vorlesungen über theoretische Optik, herausg. v. Dorn, Leipzig 1885, S. 286 ff.

2) Vgl. L. Zehnder, Ztschr. f. Instrumentenkunde 1891, S. 275.

wendet. Zwei von ihnen können nach Mach[1]) zweckmäßig durch Metallspiegel S_1 und S_2 ersetzt werden. Figur 55 stellt schematisch die Machsche Anordnung dar. — Schließlich hat Mach noch eine Verbesserung zur Erhöhung der Lichtstärke angebracht. Sowohl bei Figur 54 als 55 sind die ins Auge bei E gelangenden Strahlen von geringer Intensität, weil sie einmal eine Reflexion an der Glasoberfläche erlitten haben, womit stets eine bedeutende Lichtabschwächung verbunden ist. In Figur 55 sind die Lichtstrahlen, welche von S_2 aus durch P_2 hindurch sich fortpflanzen, viel intensiver als die von P_2 nach E reflektierten Strahlen.

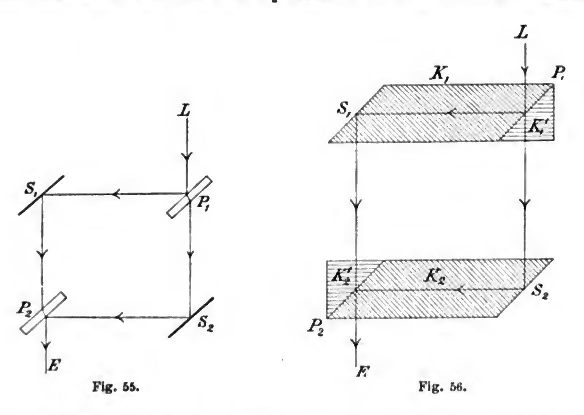


Fig. 55. Fig. 56.

Diesem Übelstande könnte man abhelfen, wenn man die Reflexionsfähigkeit der Glasoberfläche erhöhen könnte. Es gelingt dies durch schwache Versilberung oder Vergoldung der Glasoberfläche; am günstigsten ist es, wenn man die Metallschicht in solcher Dicke auf dem Glase herstellt, daß die Intensität des reflektierten Lichtes gleich der des durchgehenden Lichtes ist. Man braucht nun aber bei der Anordnung der Figur 55 gar nicht zwei Platten P_1 und P_2 von endlicher Dicke, um Interferenzen zu erzeugen, es genügt, wenn an ihren Stellen durch eine sehr dünne Metallschicht eine Spaltung der Lichtstrahlen in reflektierte und weitergehende

1) L. Mach, Ber. d. Wien. Akad. Math.-Naturw. Kl. 101 (II. A.), S. 5, 1892. — Ztschr. f. Instrumentenkunde 1892, S. 89.

hergestellt wird. Dies kann man erreichen, wenn man zwei rechtwinklige Glasprismen mit ihren schwach versilberten Hypotenusenflächen fest aufeinander legt. — Die Reflexion an den Spiegeln S_1 und S_2 kann man durch Totalreflexion an unbelegten Hypotenusenflächen rechtwinkliger Glasprismen ersetzen. Schließlich kann man diese Prismen mit den teilweise das Licht durchlassenden Doppelprismen zu einheitlichen Glaskörpern vereinigen, so daß man die in Figur 56 dargestellte Machsche Konstruktion eines Interferenzrefraktors erhält, bei der an die einander gleichen Glaskörper K_1 und K_2 zwei Glaskörper K_1' und K_2' mit Leinöl angekittet sind, die Berührungsflächen P_1, P_2 sind schwach vergoldet. An den schiefen Flächen S_1 und S_2 werden die Strahlen total reflektiert. Falls die Glaskörper K_1 und K_2 sehr nahezu parallel gestellt werden, so erblickt ein Auge bei E die Interferenzfrasen.

8. Interferenzen bei hohen Gangunterschieden. Wenn man ein Newtonsches Farbenglas in homogener Beleuchtung betrachtet, wie sie z. B. eine mit Kochsalz gefärbte Alkoholflamme bietet, so erblickt man Interferenzringe über die ganze Ausdehnung des Glases hin. Dies ist ein Zeichen dafür, daß auch noch nach einem Gangunterschiede von mehreren Hunderten von Wellenlängen die Interferenzfähigkeit des Lichtes erhalten bleibt.

Es ist nun eine Frage von großer Bedeutung, wie weit man diesen Gangunterschied steigern kann, ohne daß die Interferenzfähigkeit des Lichtes aufhört. Zur Beantwortung dieser und anderer Fragen kann man nicht einfach so verfahren, daß man die beiden Gläser der Newtonschen Anordnung sukkessive weiter voneinander entfernt, und mit dem Auge oder einer Lupe auf die Oberfläche O_1 des einen Glases akkommodiert, denn nach der Anmerkung 1) der S. 133 würden die Interferenzen bald undeutlich werden wegen der wechselnden Neigung der in einem Punkte der Oberfläche O_1 sich schneidenden, kohärenten Strahlenpaare. Man muß vielmehr dafür sorgen, daß alle kohärenten Strahlenpaare, welche zu einem und demselben Punkte auf der Netzhaut des Beobachters vereinigt werden, ein und dieselbe Phasendifferenz gegeneinander besitzen.

Dies gelingt, wenn man die Interferenzen durch die Reflexion an zwei genau parallelen Oberflächen O_1 und O_2 zustande kommen läßt, und wenn man mit einem auf Unendlich eingestellten Fernrohr (oder direkt mit dem auf Unendlich akkommodierten Auge) beobachtet. Alle zur Interferenz gelangenden, kohärenten Strahlen-

paare, welche in einem Netzhautpunkte vereinigt werden, durchlaufen dann den Zwischenraum (der Dicke d) zwischen den Flächen O_1 und O_2 in derselben Neigung gegen die gemeinsame Normale N dieser beiden Flächen und besitzen daher (bei konstantem Abstand d beider Flächen O_1 und O_2) die gleiche Phasendifferenz. Diese wechselt mit der Neigung gegen die Normale N, die Interferenzfigur besteht daher aus konzentrischen Kreisen, deren Zentrum in der Richtung der Plattennormale N liegt.[1] Die so entstehenden Interferenzringe sind also die Kurven gleicher Neigung, im Gegensatz zu den Kurven gleicher Dicke, die man an einem dünnen Keil oder dem Newtonschen Farbenglase bei Akkomodierung auf das Glas selbst wahrnimmt. Diese Interferenzen gleicher Neigung an planparallelen Platten sind in der Neuzeit von Bedeutung für die Interferenzspektrokopie und Metrologie geworden[2].

Man kann bei planparallelen Glasplatten von mehreren Millimetern Dicke solche Kurven gleicher Neigung bei homogener Beleuchtung wahrnehmen, d. h. Interferenzen bei vielen Tausenden von Wellenlängen Gangunterschied beobachten. Um den Gangunterschied stetig variieren zu können, hat Michelson[3]) folgende Anordnung als Interferometer benutzt (Fig. 57 auf folg. S.):

Der Lichtstrahl QA fällt unter 45^0 Einfallswinkel auf die schwach versilberte Vorderfläche einer planparallelen Glasplatte A und wird dann gespalten in einen zum Planspiegel D durchgehenden und in einen zum Planspiegel C reflektierten Strahl. Diese Spiegel senden die beiden Strahlen zum Punkte A zurück, von wo der erstere in das Fernrohr nach E reflektiert, der zweite nach E hindurchgesandt wird.

1) Diese Erscheinung verwendet Lummer (vgl. Müller-Pouillet, Optik, S. 916—924) zur Untersuchung von Glasplatten auf ihre Planparallelität. In der Tat müssen die Kurven gleicher Neigung von der Kreisform abweichen, sowie der Abstand d zwischen beiden reflektierenden Oberflächen O_1 und O_2 nicht genau konstant ist.

2) Vgl. hierüber E. Gehrcke, Die Anwendung der Interferenzen in der Spektroskopie und Metrologie, Braunschweig 1906, F. Vieweg & Sohn, Heft 17 der Sammlung „Die Wissenschaft".

3) A. A. Michelson, Amer. Journ. of Science (3) 34, S. 427, 1887. — Travaux et Mémoires du Bureau Internat. d. Poids et Mesures. 11, 1895, S. 1—237. In dieser zweiten Arbeit hat Michelson mit Hilfe seines Interferenzapparates für hohe Gangunterschiede das Meter in Wellenlängen ausgewertet. Vgl. auch Müller-Pouillet (Lummer) 9. Aufl. S. 935, 10. Aufl. S. 768; E. Gehrcke, l. c.

Eine zweite planparallele Glasplatte B, welche die gleiche Dicke wie die Platte A besitzt, macht den Gangunterschied der beiden, in E zur Interferenz kommenden Strahlen gleich Null, falls die beiden Spiegel D und C symmetrisch zur Platte A liegen.

Die Anordnung wirkt nun offenbar so, als ob Interferenzen durch Reflexion an den ebenen Begrenzungen O_1 und O_2 einer Luftplatte zustande kämen. O_1 ist der Spiegel C, und O_2 ist das Spiegelbild des Spiegels D in der Glasplatte A. Dieses Spiegelbild muß also parallel zu C sein, wenn die Interferenzkurven gleicher Neigung bei erheblicher Gangdifferenz gut gesehen werden sollen. Um letztere variieren zu können, ist der eine Spiegel, z. B. C, durch eine Mikrometerschraube genau parallel in der Richtung AB verschiebbar.

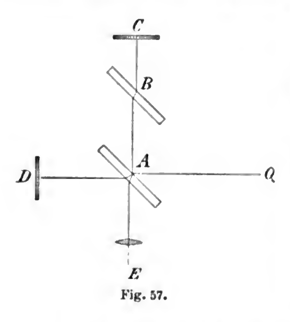


Fig. 57.

Mit diesem Apparate konnte Michelson bei Beleuchtung mit Geisslerschen Röhren Interferenzen erhalten bei einem Gangunterschied von 20 cm Luftstrecke (bei Anwendung der roten Kadmiumlinie), was etwa 300000 Wellenlängen entspricht, ja die grüne Quecksilberlinie lieferte sogar noch Interferenzen bei 540000 Wellenlängen Gangunterschied.[1])

Diese Versuche sind deshalb so instruktiv, weil sich aus der Veränderung der Sichtbarkeit der Interferenzstreifen mit wachsendem Gangunterschied schärfere Schlüsse über die Homogenität einer Lichtquelle ziehen lassen, als mit dem Spektrometer.

Schon Fizeau hatte beobachtet, daß bei Beleuchtung mit Natriumlicht die Interferenzen mit der Änderung der Dicke d der Luftschicht periodisch verschwanden und wieder auftraten. Die Interferenzen verschwinden zum ersten Male bei der Dicke $d = 0{,}1445$ mm, sind bei $d = 0{,}289$ wiederum am deutlichsten, bei $d = 0{,}4335$

1) A. Perot und Ch. Fabry (Compt. Rend. 128, S. 1221, 1899) erhielten durch Speisung der Geisslerschen Röhren mit einem Hochspannungsakkumulator Interferenzen der grünen Hg-Linie noch bei 790000 Wellenlängen Gangunterschied, Lummer u. Gehrcke schlossen, daß das Licht diese Linie bei noch höherem Gangunterschied (ca. 1200000 Wellenlängen, korrigiert von Laue) interferenzfähig ist (Literatur vgl. E. Gehrcke l. c., vorige S. Anm. 2).

wiederum am undeutlichsten u. s. f. Man kann daraus schließen, daß die Natriumlinie aus zwei nahe benachbarten Linien besteht. Die Interferenzen werden immer dann am undeutlichsten, falls die Maxima, welche die eine Natriumlinie erzeugt, auf die Minima der anderen Natriumlinie fallen. Da die mittlere Wellenlänge λ der gelben Natriumlinie 0,000589 mm beträgt, so entsprechen der Dicke $d = 0{,}289$ mm, 491 Wellenlängen. Bezeichnet man die Differenz der Wellenlängen beider Natriumlinien mit $\lambda_1 - \lambda_2$, so muß also sein:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot 491 = \frac{\lambda}{2} = 0{,}000294 \text{ mm},$$

d. h.

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0{,}0000006 \text{ mm}.$$

In allgemeiner Weise hat Michelson[1]) das Problem in Angriff genommen.

Nach Formel (11) auf S. 123 ist die Intensität des Lichtes, das aus zwei gleich intensiven, kohärenten Strahlen der Wegedifferenz $2l$ (l ist die Dicke der Luftplatte) gebildet wird, gegeben durch

$$J = 2A^2\left(1 + \cos 2\pi \frac{2l}{\lambda}\right). \tag{19}$$

Anstatt der Wellenlänge λ des Lichtes in Luft wollen wir den reziproken Wert

$$\frac{1}{\lambda} = m \tag{20}$$

einführen. m bedeutet die Anzahl von Wellenlängen, welche in der Längeneinheit enthalten sind.

Wenn wir nun nicht streng homogenes Licht, d. h. Licht einer einzigen Wellenlänge λ oder Wellenzahl m haben, so möge mit $\psi(m) \cdot dm$ die Intensität des Lichtes bezeichnet werden, deren Wellenzahlen zwischen m und $m + dm$ liegen. Es ist dann die Intensität J bei Interferenz vermittelst einer Luftplatte der Dicke l:

$$J = 2 \int_{m_1}^{m_2} \psi(m)\, [1 + \cos 4\pi lm]\, dm, \tag{21}$$

wobei die Integrationsgrenzen diejenigen Wellenzahlen sind, innerhalb deren $\psi(m)$ merklich von Null verschieden ist.

1) Außer in den oben zitierten Arbeiten sind diese Entwickelungen in Phil. Mag. (5) 31, S. 338, 1891, — 34, S. 280 und 407 (Rayleigh), 1892 enthalten.

Nehmen wir zunächst den Fall an, daß wir eine einzige Spektrallinie von geringer Breite haben, so wollen wir setzen:

$$m = \overline{m} + x, \quad m_1 = \overline{m} - a, \quad m_2 = \overline{m} + a. \tag{22}$$

Dann wird (21) zu

$$J = 2 \int_{-a}^{+a} \psi(x)\, [1 + \cos 4\pi l (\overline{m} + x)]\, dx,$$

oder, wenn man setzt:

$$4\pi l \overline{m} = \vartheta, \qquad \int \psi(x)\, dx = P,$$

$$\int \psi(x) \cos(4\pi l x) \cdot dx = C, \qquad \int \psi(x) \sin(4\pi l x) \cdot dx = S: \tag{22'}$$

$$\tfrac{1}{2} J = P + C \cos\vartheta - S \sin\vartheta. \tag{23}$$

Wenn die Dicke l der Luftplatte sich nur wenig ändert, so ändert sich damit J, weil sich ϑ ändert. Dagegen können wir C und S bei geringen Änderungen von l als unabhängig von l ansehen, falls die Breite der Sprektrallinie, d. h. die Größe a, sehr klein ist.

Daher finden nach (23) Maxima bezw. Minima der Intensität J statt bei den Werten:

$$tg\, \vartheta = -\frac{S}{C} \tag{24}$$

und zwar sind die Maxima gegeben durch:

$$\tfrac{1}{2} J_{Max} = P + \sqrt{C^2 + S^2}, \tag{25}$$

die Minima durch:

$$\tfrac{1}{2} J_{Min} = P - \sqrt{C^2 + S^2}. \tag{25'}$$

Es sind demnach keine Interferenzen sichtbar, wenn $C = S = 0$ ist. Aber auch schon wenn diese beiden Ausdrücke sehr kleine Werte haben, werden keine Interferenzen wahrnehmbar sein. Die Sichtbarkeit der Interferenzen wird zweckmäßig definiert durch

$$V = \frac{J_{Max} - J_{Min}}{J_{Max} + J_{Min}}. \tag{26}$$

Nach (25) und (25') ist daher:

$$V^2 = \frac{C^2 + S^2}{P^2}. \tag{27}$$

Diese Gleichung enthält die Abhängigkeit der Sichtbarkeit der Interferenzen von der Wegedifferenz $2l$ der beiden interferirenden

Strahlenbündel, falls l durch eine Mikrometerschraube beliebig verändert wird.

Wenn die Helligkeit der Spektrallinie symmetrisch zu ihrer Mitte verteilt ist, so ist $S=0$. Dann wird also (27) zu

$$V=C:P.$$

Nehmen wir z. B. den Fall an, daß $\psi(x)=const.=c$ sei. Dann wird

$$P=2ac, \quad C=\frac{2c \sin 4\pi la}{4\pi l}, \qquad V=\frac{\sin 4\pi la}{4\pi la}. \tag{28}$$

Die Interferenzen verschwinden also für $4la=1, 2, 3, \ldots$. Größte Deutlichkeit ($V=1$) tritt nur ein für $l=0$. Mit wachsendem l werden die Interferenzen, selbst für günstige Werte von l, immer kleiner, z. B. für $4la={}^3/_2$ ist

$$V=2:3\pi=0{,}212.$$

Ebenso tritt ein periodisches Verschwinden und kontinuierliches Abklingen maximaler Deutlichkeit der Interferenzen für das Gesetz ein:

$$\psi(x)=\cos^p \pi\frac{x}{2a}.$$

Das kleinste l, bei welchem die Interferenzen verschwinden, ist gegeben durch $4l_1a=\frac{p}{2}+1$, dann verschwinden sie für $4l_2a=\frac{p}{2}+2$, $4l_3a=\frac{p}{2}+3$ etc. Man kann also aus den Nullstellen l_1, l_2, l_3 der Sichtbarkeitskurve sowohl die Breite a der Spektrallinie als die Potenz p, welche ihre Helligkeitsverteilung ergibt, bestimmen.

Für $$\psi(x)=e^{-px^2}\ [1]$$
ergibt sich ein allmähliches Abklingen der Sichtbarkeitskurve, ohne periodische Null- und Maximalwerte.

In ähnlicher Weise läßt sich auch bei mehrfachen schmalen Spektrallinien die Sichtbarkeitskurve V aus (21) ableiten. So z. B. ergibt sich bei zwei gleich intensiven Linien ein periodisches Nullwerden von V. Sind die beiden Linien nicht gleich intensiv, so wird V nicht völlig Null, sondern nimmt periodisch nur Minima (und Maxima) an. Dies ist bei der gelben Natriumdoppellinie der Fall.

1) Dieses Intensitätsgesetz würde aus der kinetischen Gastheorie mit dem Maxwellschen Gesetz der Verteilung der Geschwindigkeiten der Moleküle folgen.

Man ersieht aus dem Vorigen, in welcher Weise aus irgend einem angenommenen Intensitätsgesetz $\psi\ (m)$ die Sichtbarkeit V der Interferenzen abzuleiten ist. Die umgekehrte Aufgabe, $\psi\ (m)$ aus V zu bestimmen, ist viel schwieriger. Abgesehen davon, daß man durch den bloßen Anblick der Interferenzen die numerischen Werte von V nur durch ein etwas willkürliches Verfahren ableiten kann[1]), ist die Aufgabe überhaupt nicht lösbar, weil man, wie aus (27) folgt, nur $C^2 + S^2$ aus V bestimmen kann, aber nicht C und S einzeln.[2]) Unter der Annahme, daß die einzelnen Spektrallinien in ihrer Helligkeit symmetrisch zu ihrer Mitte sind, gelingt allerdings die Aufgabe, da dann bei einer einzigen Linie $S = 0$ ist und bei mehrfachen Linien analoge Vereinfachungen eintreten. — Michelson hat nun in der Tat für mehrere Spektrallinien die Sichtbarkeitskurven V aufgenommen[3]) und die verschiedenartigsten Gestalten erhalten. Er hat dann probiert, mit welchem Intensitätsgesetz $\psi\ (m)$ man sich den Beobachtungen von V am besten anschließen kann. Nach dem Obigen muß man aber sagen, daß das Resultat für $\psi\ (m)$ kein zwingendes ist, wenn auch die Verteilung der Intensität und Breite der einzelnen Spektrallinien durch diese sehr wertvollen Untersuchungen Michelsons mit einer gewissen Annäherung, wie spätere Untersuchungen bewiesen haben, dargestellt werden.

Zu dieser indirekten Mothode der Interferenzspektroskopie sind nun neuerdings wieder direkte Methoden getreten, welche die Struktur der Spektrallinien im Einzelnen erkennen lassen. Zuerst haben nämlich Fabry und Perot[4]) bei ihrem Interferometer dadurch, daß sie das Licht vielfach hin und her reflek-

1) Streng würde V zu erhalten sein, wenn man J_{Max} und J_{Min} photometrisch oder bolometrisch mißt. Eine solche Messung erscheint nach neueren Untersuchungen von P. P. Koch, Ann. d. Phys. **30**, S. 841, 1909, technisch ausführbar. Man würde auf diesem Wege wohl zu der feinsten, spektroskopischen Methode gelangen, die heute herstellbar erscheint.

2) Nach dem Fourierschen Theorem könnte man $\psi\ (m)$ vollständig berechnen, wenn man C und S einzeln für alle Werte von l kennt.

3) Wie Ebert in Wied. Ann. 43, S. 790, 1891 festgestellt hat, fallen diese Sichtbarkeitskurven unter verschiedenen Bedingungen des Leuchtens eventuell sehr verschieden aus.

4) Ch. Fabry und A. Perot, Ann. Chim. Phys. (7) **22**, S. 564, 1901. — Phys. Ztschr. **3**, S. 5, 1905. — Winkelm. Handb. (W. Feussner) VI, S. 1004. E. Gehrcke, Die Interferenzen in d. Spektroskopie u. Metrologie, Die Wissenschaft Bd. 17, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1906.

tieren ließen zwischen zwei schwach versilberten Glasplatten von verhältnißmäßig großem und mikrometrisch variabelem Abstand, scharfe, schmale Interferenzmaxima an Stelle der bis dahin angewandten, breiten und ziemlich verwaschenen Streifen benutzt. Durch die Versilberung wird die Intensität der vielfach reflektierten Strahlen verstärkt, und es ergeben sich, je nachdem man in durchfallendem oder reflektiertem Lichte beobachtet, sehr scharfe helle Linien auf dunklem Grunde oder dunkle Linien auf hellem Grunde.[1] Der Ort dieser Linien hängt von der Dicke der zwischen beiden Glasplatten gebildeten, planparallelen Luftschicht und von ihrer Wellenlänge ab, und da die Linien sehr scharf sind, so kann man geringe Unterschiede in den Wellenlängen des beleuchtendes Lichtes durch Trennung der Streifensysteme wahrnehmen, d. h. das Interferometer zur feinsten Auflösung von Spektrallinien benutzen. — In dem Interferenzspektroskop von Lummer und Gehrcke[2]) wird nur eine einzige größere, exakt planparallele Glasplatte benutzt, an deren Begrenzungen die Lichtstrahlen vielfach reflektiert werden. Die Platte ist nicht versilbert, die Vergrößerung des Reflexionskoeffizienten wird hier durch sehr schiefen Einfall des Lichtes erhalten.

9. Stehende Lichtwellen. Bei den bisher besprochenen Interferenzerscheinungen haben die beiden zur Interferenz gelangenden Strahlenbündel die gleiche Fortpflanzungsrichtung. Man kann nun aber auch Interferenzen nachweisen, bei denen die beiden Strahlen-

1) Die Formeln hierfür vgl. z. B. bei W. Feussner, Winkelm. Handb. VI, S. 1000 u. P. Drude, Winkelm. Handb. VI, S. 1255. — O. Lummer u. E. Gehrcke, Ann. d. Phys. **10**, S. 461, 1903. E. Gehrcke, Anm. 4 auf voriger Seite. — Die Formeln sind leicht abzuleiten aus II. Abschn. II. Kap., § 11, Formeln (74) und (75) dieses Buches.

2) O. Lummer und E. Gehrcke, Berl. Ber. 1902, S. 11. — Ann. d. Phys. **10**, S. 457, 1903. — Um Fehler zu vermeiden, die durch Abweichungen von der Planparallelität entstehen (Vortäuschung falscher Trabanten der Spektrallinien, sogenannte „Geister"), verwendet Gehrcke (Verh. d. Deutsch. physik. Ges **7**, S. 236, 1905) „Interferenzpunkte", die man z. B. mit zwei in ihren Ebenen um 90° gegeneinander verdrehten, planparallelen Platten erhält, und hat diese gemeinsam mit v. Baeyer auf die Untersuchung der Quecksilberlinien angewandt, vgl. E. Gehrcke u. O. v. Baeyer, Berl. Ber. 1905, 7. Dez. Ann. d. Phys. **20**, 269, 1906. Über Verbesserungen des Interferenzspektroskops von Lummer und Gehrcke durch v. Baeyer vgl. Verh. Dtsch. Phys. Ges. **11**, 118, 1909; **10**, 733, 1908. Über die Struktur feinster Spektrallinien vgl. v. Baeyer, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **6**, 50, 1909; ferner L. Janicki, Ann. d. Phys. **29**, 833, 1909. E. Gehrcke, Anm. 4 auf voriger Seite.

bündel sich entgegenlaufen. Wenn man nämlich über den Wellenzug

$$s_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right),$$

welche Gleichung ebenen Wellen entspricht, die sich nach der z-Richtung fortpflanzen, den Wellenzug superponiert:

$$s_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right),$$

welcher ebene Wellen repräsentiert, die sich nach der negativen z-Achse fortpflanzen, so erhält man:

$$s = s_1 + s_2 = 2\, A \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{z}{\lambda}. \tag{29}$$

Dies stellt eine Lichtbewegung dar, deren Amplitude $2\, A \cos 2\pi\, z/\lambda$ eine periodische Funktion des Ortes ist. Für $z/\lambda = 1/4$, $3/4$, $5/4$ usw. verschwindet die Amplitude, man nennt diese Stellen Wellenknoten, für $z/\lambda = 0$, $1/2$, $2/2$ usw. ist die Amplitude ein Maximum; diese Stellen heißen Wellenbäuche. Sie haben also einen konstanten Abstand von $1/2\, \lambda$ untereinander. Diese Art von Welleninterferenz wird stehende Wellen genannt, weil es gewisse, im Raume stehende Stellen gibt, an denen keine Erregung stattfindet.

Solche stehende Lichtwellen hat Wiener[1]) nachgewiesen, indem er Licht senkrecht auf einen guten Metallspiegel fallen ließ. Das reflektierte Licht gibt dann durch Interferenz mit dem einfallenden Lichte Anlaß zur Bildung stehender Wellen. Um die Orte der Knoten deutlich getrennt von denen der Bäuche nachweisen zu können, brachte Wiener ein äußerst dünnes, auf Glas aufliegendes Chlorsilbercollodiumhäutchen, dessen Dicke nur $1/30$ Lichtwellenlänge = 20 milliontel Millimeter war, so vor die Spiegelfläche, daß es mit derselben einen sehr kleinen Winkel bildete, und beleuchtete nun mit elektrischem Bogenlichte. Die empfindliche Schicht durchschnitt also die Ebenen der Bäuche und Knoten in einem System äquidistanter Geraden, die um so größeren Abstand voneinander hatten, je kleiner der Winkel zwischen Spiegel und Collodiumhaut war. Die Schicht zeigte nun in der Tat dieses System von Geraden nach der photographischen Entwicklung. Dies ist ein Beweis dafür, daß man einerseits überhaupt noch an einer so dünnen Collodiumhaut photographische Wirkung nachweisen kann, anderer-

1) O. Wiener, Wied. Ann. 40, S. 203, 1890.

seits, daß dieselbe tatsächlich in den Knoten- und Bauchebenen verschieden ist. — Zur Demonstration dieser interessanten Interferenzerscheinung kann man auch zweckmäßig die Fluorescenzwirkung in einer dünnen Gelatineschicht, der Fluoresceïn zugesetzt ist, verwenden.[1]) Die Schicht leuchtet in äquidistanten, grünen Streifchen. — Von theoretischer Bedeutung. die wir später kennen lernen werden, ist, daß am Spiegel selbst ein Schwingungsknoten liegt. — Den stehenden Lichtwellen Wieners verwandte Interferenzen, die für das Studium der Lichtemission von besonderem Interesse sein dürften, hat neuerdings Selényi (Ann. d. Phys. **35**, 444, 1911) entdeckt.

10. Photographie in natürlichen Farben. Das Auftreten der stehenden Lichtwellen hat Lippmann dazu benutzt, um farbige Photographien herzustellen. Er wählte als lichtempfindliche Schicht eine durchsichtige und kornlose, jod- und bromsilberhaltige Collodiumalbuminschicht, die er auf Quecksilber legte, welches den Spiegel bildete.[2]) Belichtet man die Platte durch ein Spektrum, so erblickt man nach dem Entwickeln und Fixieren der photographischen Platte annähernd wiederum die Spektralfarben. Die einfachste Annahme ist, daß in der photographischen Platte an der Stelle, an welcher sie mit Licht belichtet war, welches in der photographischen Schicht die Wellenlänge λ besitzt, sehr dünne Silberschichten in der Entfernung $^1/_2\,\lambda$ entstanden sind. Betrachtet man nun diese Stelle im reflektierten weißen Lichte, so werden die Lichtwellen an jeder Silberschicht in einer gewissen Stärke reflektiert. Diese Reflexionen ergeben aber übereinstimmende Phase und daher maximale Verstärkung nur für diejenigen Wellen, deren Wellenlänge gleich λ, oder $^1/_2\,\lambda$, oder $^1/_3\,\lambda$ usw. ist. Daher wird eine z. B. grün belichtete Stelle im reflektierten weißen Lichte wesentlich grün erscheinen. Das Licht der Wellenlänge $^1/_2\,\lambda$ fällt dabei ins Unsichtbare Ultraviolette. Dagegen erscheint unter Umständen eine mit Ultrarot belichtete Stelle violett, weil hier der Wert $^1/_2\,\lambda$ zu den sichtbaren Farben gehört.

Wenn man eine solche Photographie anhaucht, so verschieben

1) Vgl. hierfür das Nähere bei P. Drude und W. Nernst, Wied. Ann. 45, S. 460, 1892.

2) Näheres über diese Photographie vgl. in Valenta, Die Photographie in natürlichen Farben. Halle, 1894. — Neuhauss, Die Farbenphotographie nach Lippmanns Verfahren. Halle, 1898. — H. Lehmann, Beiträge z. Theor. u. Praxis der Farbenphotogr. Freiburg, 1906.

sich die Farben nach dem roten Ende des Spektrums zu, weil dadurch die Collodiumschicht aufquillt und die reflektierenden Schichten größeren gegenseitigen Abstand gewinnen. — Betrachtet man die Platte unter schieferem Einfallswinkel, so verschieben sich die Farben dagegen nach dem violetten Ende des Spektrums hin. Dies hat denselben Grund wie das Verschieben Newtonscher Ringe bei schiefem Anblick nach niedrigerer Ordnung hin. Denn, wie Formel (14) auf S. 130 lehrt, ist die Phasendifferenz Δ zweier an zwei Flächen der Distanz d reflektierter Strahlen proportional mit $\cos\chi$, wobei χ den Neigungswinkel der Strahlen zwischen beiden Flächen gegen die Normale dieser Flächen bedeutet. Bei schiefer Incidenz wird also Δ kleiner, bei den Newtonschen Ringen ist dieser Einfluß aber viel stärker als bei den Lippmannschen Photographien, da bei ersteren in der die Interferenz hervorrufenden Luftplatte χ mit Änderung der Beleuchtungsrichtung viel stärker variiert als in einer Collodiumplatte, deren Brechungsindex mindestens etwa $= 1{,}5$ ist.

Beweisen die angeführten Tatsachen unzweifelhaft, daß die Farben durch Interferenz entstehen, so ist ihre Erklärung durch periodisch gelagerte Silberschichten dennoch bei näherer Prüfung wahrscheinlich nicht stichhaltig. Es hat nämlich Schütt[1]) die Größe der gebildeten Silberkörner an solchen Photographien mikroskopisch gemessen und sie zu 0,0007 bis 0,0009 mm Durchmesser gefunden, also viel größer als die halbe belichtende Wellenlänge. Nach Schütt sollen durch die stehenden Wellen und durch das Ausfixieren der lichtempfindlichen Schicht periodisch wechselnde Schichten von verschiedenem Brechungsindex (hervorgerufen durch periodisch wechselnde Silberablagerung) entstanden sein. Das Prinzip der Erklärung der Farben wird dadurch aber nicht verändert, es würde nämlich auch so die Collodiumschicht eine mit der Periode $\frac{1}{2}\lambda$ kontinuierlich sich ändernde Reflexionsfähigkeit besitzen.

Nach dieser Annahme kann man die Intensität irgend einer Farbe bei der Reflexion berechnen. Die genauere Ausführung mag aber hier unterbleiben, zumal da die Rechnung dadurch kompliziert wird, daß man keineswegs berechtigt ist, die Anzahl der Perioden in der photographischen Schicht als recht groß anzu-

1) F. Schütt, Wied. Ann. 57, S. 533, 1896.

nehmen.[1]) Die besten Farbenphotographien werden nämlich erhalten, wenn die photographische Schicht eine gewisse Dicke, etwa von 0,001 mm, nicht überschreitet. Diese Dicke entspricht aber 3—5 halben Wellenlängen von wirksamem Licht. Aber auch ohne genauere Berechnung kann man übersehen, daß die reflektierten Farben Mischfarben und keine reinen Spektralfarben sind, wie dies auch durch die Analyse der reflektierten Farben mit Hilfe des Spektroskops[2]) bestätigt wird. Denn wenn auch diejenige Farbe, deren Wellenlänge gleich der belichtenden Wellenlänge ist, besonders stark im reflektierten Licht vertreten sein muß, so können doch benachbarte Farben, und überhaupt streng genommen keine einzige Farbe vollkommen fehlen.

Nach einem Versuch von Neuhauss[3]) ändert sich durch mechanisches allmähliches Abreiben der photographischen Schicht die reflektierte Mischfarbe in gewisser periodischer Weise. Dieses Verhalten ist erklärlich, wenn man die geringe Periodenzahl in der photographischen Schicht berücksichtigt.

Eine weitere Eigentümlichkeit dieser Photographien besteht darin, daß sie im reflektierten Lichte verschiedene Farben zeigen je nach der Seite, von der man sie betrachtet. Abgesehen davon, daß die Glasauflage gewisse Verschiedenheiten beider Seiten bedingt,[4]) ist es durchaus wahrscheinlich, daß die periodischen Schwankungen im optischen Charakter der photographischen Schicht an Amplitude zunehmen nach der Seite der Schicht zu, welche am Metallspiegel lag. Wegen geringer Lichtabsorption müssen sich nämlich die stehenden Wellen bei der Exposition der Platte möglichst nahe am Metallspiegel am reinsten ausbilden.

Führt man diese Annahme in die Theorie ein, und berücksichtigt man schließlich noch eine geringe Absorption des Lichtes,

1) Die Berechnungen, welche von Meslin (Ann. de chim, et de phys. (6) 27, S. 369, 1892) und von Lippmann (Journ. de phys. (3) 3, S. 97, 1894) veröffentlicht worden sind, machen nicht nur diese unzutreffende Voraussetzung, sondern sie leiden auch an dem Widerspruch, daß unter Umständen nach diesen Rechnungen die reflektierte Intensität größer als die einfallende sein könnte.

2) Man vgl. z. B. die zitierte Arbeit von Schütt.

3) R. Neuhauss, Photogr. Rundsch. 8, S. 301, 1894. — Vgl. auch die oben zitierte Arbeit von Schütt, S. 543.

4) Vgl. hierüber Wiener, Wied. Ann. 69, S. 488, 1899.

so nähert man sich mehr den wirklichen Verhältnissen; es ergibt sich dann sowohl das Resultat von Neuhauss, als die verschiedene Farbe bei Wechsel der reflektierenden Seite der Photographie.

Kapitel III.

Das Huygenssche Prinzip.

1. Das Huygenssche Prinzip in seiner ersten Fassung. Schon oben (S. 119) wurde darauf hingewiesen, daß die Erklärung der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes vom Standpunkte der Wellentheorie Schwierigkeiten macht. Um zu einer Erklärung zu gelangen, hat Huygens das Prinzip aufgestellt, daß jeder von einer Lichtwelle getroffene Punkt P als Ausgangspunkt von elementaren Lichtwellen aufgefaßt werden könne, daß aber diese Elementarwellen nur auf der sie einhüllenden Fläche eine merkliche Wirkung hervorrufen. Wenn daher Q eine punktförmige Lichtquelle ist, deren Lichtausbreitung durch den ebenen Schirm $S_1 S_2$ mit der Öffnung $A_1 A_2$ gehindert ist, so können wir die Wellenfläche, bis zu der die Lichterregung nach Ablauf einer gewissen Zeit t gelangt ist, in folgender Weise konstruieren:

Wir fassen alle Punkte A_3 auf der Ebene zwischen der Öffnung $A_1 A_2$ als neue Erregungspunkte auf, die ihre Elementarwellen auch in den Raum hinter dem Schirme fortpflanzen können. Diese Elementarwellen sind Kugelflächen, die um die Punkte A_3 beschrieben sind, und zwar mit verschieden großen Radien, wenn wir die Orte ins Auge fassen, bis zu denen die Lichtfortpflanzung von Q aus immer dieselbe Zeit t gebraucht hat. Da z. B. in A_3 die direkte Lichterregung von Q aus früher angelangt ist, als in A_1, so ist die Elementarwelle um A_3 entsprechend dieser Zeitdifferenz größer zu zeichnen, als die Elementarwelle um A_1. Für alle Elementarwellen muß offenbar ihr Radius, vermehrt um die Distanz ihres Zentrums von Q aus, ein und denselben Wert ergeben. Auf die Weise erhält man aber als einhüllende Fläche dieser Elementarwellen eine um Q beschriebene Kugelfläche (in Figur 58

stark gezeichnet), welche durch die Punkte $B_1 B_2$ begrenzt ist, d. h. die nur innerhalb des von Q nach dem Rande des Schirmes $S_1 S_2$ gezogenen Kegels liegt. Innerhalb dieses Kegels pflanzt sich also von Q aus das Licht so fort, als ob der Schirm überhaupt nicht vorhanden wäre, außerhalb des Kegels ist aber keine Lichterregung vorhanden.

Erhält man also nach diesem Prinzip in der Tat die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes, so stehen doch der Anwendung des Prinzipes in dieser Fassung schwerwiegende Bedenken entgegen: Zunächst erkennt man aus Figur 58, daß die Elementarwellen um die Punkte A auch in dem Raume zwischen Schirm

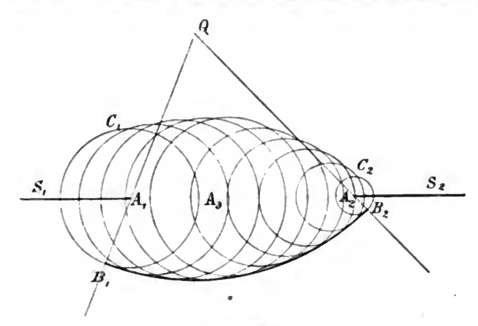


Fig. 58.

und Lichtquelle eine einhüllende Fläche ($C_1 C_2$) besitzen. Es müßte also auch nach rückwärts stets Licht fortgepflanzt werden, während in vollständig homogenem Raume solche Reflexionen tatsächlich nicht vorkommen. — Ferner müßte die angeführte Konstruktion, d. h. die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes, stets gelten, wie klein auch die Öffnung $A_1 A_2$ im Schirm gewählt wird, während, wie schon oben S. 5 hervorgehoben wurde, bei sehr kleiner Öffnung das Licht sich nicht mehr geradlinig fortpflanzt, sondern die sogenannte Lichtbeugung wahrnehmbar wird. Weshalb gelten überhaupt dieselben Überlegungen nicht auch für den Schall, bei dem stets Beugung eintritt, oder wenigstens der Schallschatten nie scharf begrenzt ist?

Bevor wir die Verbesserung des Huygensschen Prinzipes durch Fresnel besprechen, möge noch die Brechung und Reflexion nach

Huygens erklärt werden. Wenn $A_1 A_2$ die ebene Grenze zwischen zwei Medien I und II ist, in denen die Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeiten V_1, V_2 verschieden sind, so möge eine Welle, deren Wellenebene zu irgend einer Zeit t_0 die Lage $A_1 B$ haben möge, schief auf die Grenzfläche $A_1 A_2$ auftreffen. Wir fragen, welches ist die Wellenfläche der Lichterregung im Medium II zur Zeit $t_0 + t$? Wir fassen die Punkte A der Grenze als Erreger von Elementarwellen auf, die wiederum verschiedenen Radius besitzen, da die Punkte A zu verschiedenen Zeiten von der Wellenebene AB aus erregt werden. A_1 wird zur Zeit t_0 erregt, die Elementarwelle um A_1 muß also mit dem Radius $A_1 C = V_1 t$ gezeichnet werden. Die Lage des Punktes A_2 sei so gewählt, daß er zur Zeit $t_0 + t$ erregt wird. Dies tritt ein, wenn das von A_2 auf die Wellenebene gefällte Lot $A_2 B$ die Länge $V_1 t$ besitzt, da sich in einem homogenen Medium, z. B. in I, irgend ein Stück einer ebenen Wellennormale fortpflanzt. Die Elementarwelle um A_2 hat nach dieser Festsetzung den Radius Null. Für irgend einen Punkt A zwischen A_1 und A_2 hat die Elementarwelle einen Radius, der proportional der Entfernung $A_1 A$ allmählich von $V_2 t$ auf Null abnimmt. Die einhüllende Fläche der Elementarwellen im Medium II ist daher die Tangentialebene $A_2 C$ an die Kugelfläche um A_1. Der Winkel $A_2 C A_1$ ist also ein rechter. Da nun $\sin\varphi = BA_2 : A_1 A_2 = V_1 t : A_1 A_2$, $\sin\chi = CA_1 : A_1 A_2 = V_2 t : A_1 A_2$, so ist

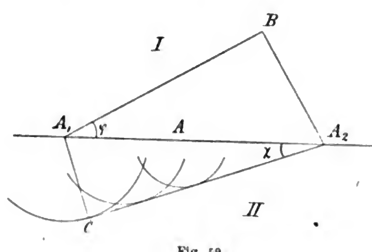


Fig. 59.

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\chi} = \frac{V_1}{V_2} = const.$$

Dies ist aber, da φ und χ gleich Einfalls- bezw. Brechungswinkel ist, die bekannte Form des Brechungsgesetzes. Der Brechungsindex n ist daher, wie oben S. 121 schon ausgesprochen, aber nicht theoretisch abgeleitet wurde, gleich dem Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in beiden Medien.

Wenn man die von den Punkten A in das Medium I fortgepflanzten Elementarwellen konstruiert, so wird man sofort auf das Reflexionsgesetz geführt.

2. Verbesserung des Huygensschen Prinzipes durch Fresnel. Fresnel ersetzt die willkürliche Annahme von Huygens, daß nur auf der einhüllenden Fläche der Elementarwellen merkliche Lichterregung stattfinden solle, durch den Grundsatz, daß die Elementarwellen sich bei ihrem Durchkreuzen gemäß dem Interferenzprinzip beeinflussen. Es soll also Licht nicht auf der einhüllenden Fläche auftreten, sondern überall da, wo sich die Elementarwellen verstärken, dagegen da Dunkelheit, wo sie sich vernichten. Durch dieses Fresnel-Huygenssche Prinzip ist nun in der Tat sowohl die Lichtbeugung, als auch die geradlinige Fortpflanzung, sowie Reflexion und Brechung abzuleiten.

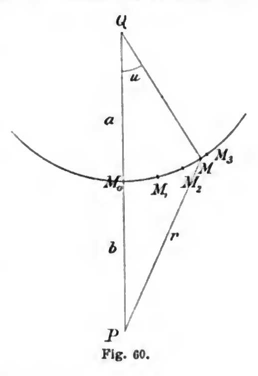


Fig. 60.

Wir wollen die Lichterregung in einem Punkte P betrachten, der von einer Lichtquelle Q erregt wird, und zwar möge zunächst kein Schirm zwischen P und Q vorhanden sein. Wir können eine um Q mit dem Radius a beschriebene Kugelfläche (Figur 60) als Wellenfläche auffassen, deren Flächenelemente die Lichterregung besitzen (vgl. oben S. 119):

$$s = \frac{A}{a} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda}\right), \tag{1}$$

wobei A die Amplitude des Lichtes in der Entfernung $a = 1$ von der Lichtquelle Q bedeutet. Fresnel teilt nun die Kugelfläche in ringförmige Zonen ein, deren Zentrum auf der Geraden QP liegt, durch folgende Konstruktion: die erste Zone (Zentralzone) reiche bis zum Punkte M_1, wobei die Entfernung $M_1P = r_1$ um $^1/_2\,\lambda$ größer sei als die Entfernung M_0P. Bezeichnen wir letztere mit b, so ist also $M_1P = r_1 = b + {^1/_2}\,\lambda$. Die zweite Zone liege zwischen M_1 und M_2, wobei $M_2P = r_2 = r_1 + {^1/_2}\,\lambda$ sei. Die dritte Zone liege zwischen M_2 und M_3, wobei $M_3P = r_3 = r_2 + {^1/_2}\,\lambda$ sei u. s. f. In irgend einer Zone, z. B. der dritten, möge nun ein ringförmiges

Element betrachtet werden, welches zwischen den Punkten M und M' liege. Es mögen die Entfernungen $MP = r$, $M'P = r + dr$ sein, ferner $\sphericalangle MQP = u$, $\sphericalangle M'QP = u + du$. Dann ist die Größe dieser Elementarzone

(2) $$do = 2\pi a^2 \sin u\, du.$$

Da die Beziehung besteht:

$$r^2 = a^2 + (a+b)^2 - 2a(a+b)\cos u,$$

so folgt durch Differentiation:

$$2r\,dr = 2a(a+b)\sin u\, du,$$

so daß man Gleichung (2) schreiben kann:

(3) $$do = 2\pi \frac{a}{a+b} r\, dr.$$

Die Lichterregung ds', welche diese Elementarzone im Punkte P hervorruft, muß mit do proportional sein, ferner umgekehrt proportional sein zu r, da (vgl. oben S. 118) die Erregung durch eine unendlich wenig ausgedehnte Lichtquelle umgekehrt proportional zur Entfernung von ihr abnimmt. Aus (1) folgt daher

(4) $$ds' = \frac{kA}{ar}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r}{\lambda}\right) do,$$

oder gemäß (3):

(4') $$ds' = 2\pi \frac{k \cdot A}{a+b}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r}{\lambda}\right) dr.$$

Hierin ist k ein Proportionalitätsfaktor, der nur noch von der Neigung des Elementes do gegen die Richtung r abhängen kann. Fresnel nimmt an, daß er um so kleiner wird, je schiefer r auf do steht. — Wenn wir nun den Winkel zwischen r und do innerhalb einer ganzen Fresnelschen Zone, z. B. zwischen M_{n-1} und M_n, konstant annehmen, was gestattet ist, wenn a und b groß gegen die Wellenlänge λ sind, so folgt nach (4') für die Wirkung dieser n^{ten} Zone, da k gleich einer Konstante k_n ist:

(5) $$s_n' = \int ds' = 2\pi \frac{k_n A}{a+b}\int_{r_{n-1}}^{r_n} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r}{\lambda}\right) dr,$$

oder $$s_n' = \frac{k_n \lambda A}{a+b}\left\{\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r_{n-1}}{\lambda}\right) - \sin 2\pi \frac{t}{T} - \frac{a+r_n}{\lambda}\right)\right\}.$$

Da nun $r_{n-1} = b + \frac{n-1}{2}\lambda$, $r_n = b + \frac{n}{2}\lambda$ ist, so folgt

(6) $$s_n' = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2k_n \lambda A}{a+b}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right).$$

Man ersieht hieraus, daß die sukzessiven Zonen abwechselndes Vorzeichen für s' ergeben. Bezeichnet man den absoluten Betrag von s_n' durch s_n, so ist daher die ganze Wirkung s', welche die ersten n Zonen in P erzeugen, nach dem Interferenzprinzip gegeben durch die Reihe:

$$s' = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots + (-1)^{n-1} s_n. \tag{7}$$

Wenn man k_n für alle Zonen als gleich annehmen wollte, so würden die s_1, s_2 ... alle einander gleich sein. Der Wert der Reihe (7) würde dann je nach der Größe von n schwanken. Nun nimmt aber k_n und daher auch s_n mit wachsendem n beständig ab, da r immer schiefer gegen do liegt, je größer n wird. In diesem Falle läßt sich die Reihe (7) in folgender Weise summieren:[1] Man kann schreiben, falls n ungerade ist:

$$s' = \frac{s_1}{2} + \left(\frac{s_1}{2} - s_2 + \frac{s_3}{2}\right) + \left(\frac{s_3}{2} - s_4 + \frac{s_5}{2}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{s_{n-2}}{2} - s_{n-1} + \frac{s_n}{2}\right) + \frac{s_n}{2}, \tag{8}$$

oder auch

$$s' = s_1 - \frac{s_2}{2} - \left\{\left(\frac{s_2}{2} - s_3 + \frac{s_4}{2}\right) + \left(\frac{s_4}{2} - s_5 + \frac{s_6}{2}\right) + \cdots\right.$$
$$\left. + \left(\frac{s_{n-3}}{2} - s_{n-2} + \frac{s_{n-1}}{2}\right)\right\} - \frac{s_{n-1}}{2} + s_n. \tag{9}$$

Wenn nun jedes s_p größer als das arithmetische Mittel der beiden benachbarten s_{p-1} und s_{p+1} ist, so schließen wir aus (8), daß ist

$$s' < \frac{s_1}{2} + \frac{s_n}{2},$$

dagegen folgt aus (9)

$$s' > s_1 - \frac{s_2}{2} + s_n - \frac{s_{n-1}}{2}.$$

Diese beiden Grenzwerte, zwischen die s' auf diese Weise eingeschlossen ist, sind aber einander gleich, wenn, wie es hier der Fall ist, jedes s_p sich nur unendlich wenig unterscheidet sowohl von s_{p-1} als von s_{p+1}. Daher ist

$$s' = \frac{s_1}{2} + \frac{s_n}{2}. \tag{10}$$

In ähnlicher Weise ist zu schließen, wenn jedes s_p kleiner als das arithmetische Mittel beider benachbarter s_{p-1} und s_{p+1}

1) Diese Betrachtungen sind von A. Schuster (Phil. Mag. (5) 31, S. 85, 1891) angestellt werden.

ist. Wenn man die s_p als sukzessive Ordinaten mit äquidistanten Abszissen aufträgt, so bildet die Verbindungslinie ihrer Endpunkte in diesem Falle eine nach der Abszissenachse konvex gekrümmte Kurve. — Im ersten Falle ist diese Kurve konkav gegen die Abszissenachse. Man kann nun auch dieselben Schlüsse, d. h. die Formel (10), gewinnen, wenn jene Kurve der s_p aus einer endlichen Anzahl konvexer und konkaver Stücke besteht. Nur wenn diese Zahl unendlich groß wäre, würde die Formel (10) eventuell ungültig werden können. Dieser Fall tritt aber offenbar mit dem Faktor k_n der Fresnelschen Zonen nicht ein.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so ergibt sich durch ähnliche Schlüsse, nur durch andere Zusammenfassung der Reihe (7):

$$s' = \frac{s_1}{2} - \frac{s_n}{2}. \tag{10'}$$

Die Fresnelschen Zonen sind nun nach Fresnel so weit zu konstruieren, bis daß der von P ausgehende Radiusvektor r die um Q beschriebene Wellenfläche berührt. Für die letzten Zonen steht daher r senkrecht auf ihnen, und k_n, d. h. auch s_n, hat dann nach Fresnel den Wert Null. Daher werden die Werte (10) und (10') identisch, und die Lichterregung s' in P hat den Wert:

$$s' = \frac{s_1}{2} = \frac{k_1 \lambda A}{a+b} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right). \tag{11}$$

Man kann sie als herrührend ansehen allein von der Wirkung der Elementarwellen der halben Zentralzone.

Wenn man nun irgend einen Schirm aufstellt, so hängt seine Wirkung auf P wesentlich davon ab, ob er die Zentralzone und die nächst benachbarten freiläßt, oder nicht. Man sollte zunächst denken, daß die Lichtwirkung in P schon vollkommen abgeschnitten wäre durch einen kreisförmigen Schirm, dessen Zentrum in M_0 liegt, und der die halbe Zentralzone verdeckt. Das ist aber nicht richtig. Wenn irgend ein kreisförmiger Schirm senkrecht zu PQ mit dem Zentrum M_0 aufgestellt wird, so kann man die Fresnelsche Zonenkonstruktion vom Rande dieses Schirmes aus beginnen. Es bleibt dann in P wiederum die halbe Wirkung der ersten, am Schirm gelegenen Zone übrig, d. h. es gilt Formel (11), wobei b jetzt die Entfernung zwischen P und dem Rande des Schirmes bezeichnet, und k_1 sich auf die Randzone am Schirm bezieht. Auf der Zentrale M_0P kann also in keinem Punkte Dunkelheit herrschen. Diesen überaschenden Schluß bestätigt nun in der Tat auch die Beobachtung. Nur für Schirme, die

sehr groß gegen die Wellenlänge und nicht klein gegen die Entfernung b sind, ist die Lichtwirkung in P gering, weil der Faktor k_n der Formel (5) dann klein wird. Ebenfalls ist die Lichtwirkung in P gering, wenn in M_0 ein nicht genau kreisförmiger Schirm S mit dem Zentrum M_0, der viele Wellenlängen groß ist, aufgestellt wird. Um dieses einzusehen, denken wir uns den Schirm S begrenzt durch unendlich kleine Kreisbögen um das Zentrum M_0 von wechselndem Radius. Der Zentriwinkel des ersten Kreisbogens sei $d\varphi_1$, die Entfernung seines Randes vom Punkte P sei b_1, von Q sei sie a_1. Dann ist nach (11) und den vorigen Bemerkungen die Wirkung der ganzen freien Öffnung, die zwischen den beiden Radienvektoren liegt, welche von M_0 nach den Endpunkten dieses ersten Kreisbogens gezogen werden, gegeben durch:

$$ds'_1 = \frac{k_1 \lambda A}{a_1 + b_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{2\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a_1 + b_1}{\lambda}\right).$$

Die Wirkung der freien, durch zwei Radien begrenzten Öffnung, die sich an einen zweiten Kreisbogen des Zentriwinkels $d\varphi_2$ anschließt, ist in analoger Bezeichnung:

$$ds_2' = \frac{k_2 \lambda A}{a_2 + b_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{2\pi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a_2 + b_2}{\lambda}\right),$$

usf. Alle diese Wirkungen haben wir zu summieren, wenn wir s' im Punkte P berechnen wollen für den Fall, daß in M_0 ein Schirm S von unregelmäßiger Gestalt aufgestellt ist. Wenn derselbe nicht zu groß ist, so können wir $k_1 = k_2 = k_3$ usw. setzen, ebenfalls können wir im Nenner $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$ usw. die Unterschiede der verschiedenen a und der verschiedenen b vernachlässigen, so daß wir erhalten:

$$s' = \frac{k_1 \lambda A}{(a+b) 2\pi} \left\{ d\varphi_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a_1 + b_1}{\lambda}\right) + d\varphi_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a_2 + b_2}{\lambda}\right) + \cdots \right\}. \qquad (11')$$

Im Argumente der *sin* dürfen wir nicht $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ usw. setzen, da diese Größen durch die sehr kleine Wellenlänge λ dividiert sind. Wenn nämlich der Durchmesser des Schirmes S viele Wellenlängen umfaßt (er braucht dabei trotzdem nur wenige Millimeter groß zu sein), so variiert auch $a + b$ um viele Wellenlängen. Im Ausdruck (11') sind daher die einzelnen Glieder bei unregelmäßiger Gestalt des Schirmes in unregelmäßig wechselnder Weise positiv und negativ, die ganze Summe wird im allgemeinen

nur unendlich klein sein, weil erst bei bestimmter regelmäßiger Gestalt des Schirmes, z. B. wenn alle a und b genau gleich sind, eine endliche Summe s' entsteht. Im allgemeinen ist daher s' bei unregelmäßiger Gestalt eines Schirmes bei M_0 unendlich klein. Man kann daher von einer geradlinigen Ausbreitung des Lichtes sprechen, indem durch genügend große Schirme von unregelmäßiger Gestalt, die in der Verbindungslinie QP liegen, Dunkelheit in P herbeigeführt wird.

Wenn zwischen Q und P ein Schirm mit kreisförmiger Öffnung, deren Zentrum M_0 ist, aufgestellt wird, so ist die Lichtwirkung in P je nach der Größe dieser Öffnung sehr verschieden. Läßt sie nur die halbe Zentralzone frei, so ist die Wirkung in P dieselbe, als ob überhaupt kein Schirm da wäre. (Natürliche Intensität.) Ist die Öffnung doppelt so groß, so daß die ganze Zentralzone freibleibt, so ist s' in P doppelt so groß als vorhin, d. h. es herrscht in P die vierfache natürliche Lichtintensität. Wird die Öffnung wiederum verdoppelt, so daß die beiden ersten Zentralzonen freibleiben, so ist nach (7) $s' = s_1 - s_2$, d. h. nahezu Null, usf. Auch diese Schlüsse hat die Beobachtung bestätigt. Anstatt daß man Schirme und Öffnungen wechselnder Größe wählt, braucht man nur den Beobachtungspunkt P auf der Geraden QM_0 zu verschieben.

Gibt also die Fresnelsche Modifikation des Huygensschen Prinzipes nicht nur Rechenschaft von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes, sondern präzisiert sie dieses Gesetz auch als gewissen Grenzfall,[1]) und behandelt die Abweichungen von diesem Gesetz, die sogenannten Beugungserscheinungen, in einer der Beobachtung entsprechenden Weise, so sind doch noch zwei Mängel in den Fresnelschen Betrachtungen vorhanden. Nämlich erstens müßte von irgend einer Wellenfläche aus das Licht sich nicht nur in einem Sinne, sondern auch allemal rückwärts (nach der Lichtquelle zu) wieder ausbreiten. Diesen Übelstand führte ja auch die ursprüngliche Fassung des Huygensschen Prinzipes mit sich (vgl. oben S. 153). Zweitens ergibt sich auch durch die Fresnelsche Berechnung eine falsche Phase der Lichterregung s' in P. Denn nach Formel (1) S. 155 müßte bei direkter Fortpflanzung sein:

---

1) Daß er bei den Schallerscheinungen so wenig erfüllt ist, liegt daran, daß in Anbetracht der hier auftretenden großen Wellenlängen die Hindernisse nicht groß gegen letztere sind.

$$s' = \frac{A}{a+b} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right),$$

während nach (11) (S. 158) durch Übermittelung der Elementarwellen einer Wellenfläche ist:

$$s' = \frac{k_1 \lambda A}{a+b} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right).$$

Um Identität der Amplituden in beiden Ausdrücken für s' zu erzielen, kann man die Annahme $k_1 = 1/\lambda$ machen, die Phasen sind aber in beiden Ausdrücken nicht in Übereinstimmung zu bringen. Diese Übelstände fallen fort, wenn man das Huygenssche Prinzip auf eine strengere analytische Basis stellt. Dieselbe ist zuerst von Kirchhoff[1]) gegeben. Nachstehende, in 5. und 6. gegebene einfachere Ableitung schließt sich an Voigt[2]) an.

3. Die Differentialgleichung für die Lichterregung. Den analytischen Ausdruck für die Lichterregung s in irgend einem Punkte P des Raumes haben wir angeben können, falls es sich um Kugelwellen oder ebene Wellen handelte. Wenn irgendwelche Hindernisse für die Lichtausbreitung vorhanden sind, so werden die Wellenflächen oft in komplizierter Weise deformiert. Um dann den analytischen Ausdruck für s zu bilden, muß man zunächst von einer allgemeineren Grundlage ausgehen, nämlich von der Differentialgleichung, der s genügt.

Jede Theorie des Lichtes, sowie überhaupt jede Theorie für einen sich wellenartig ausbreitenden Zustand führt nun zu der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) = V^2 \Delta s, \tag{12}$$

wobei t die Zeit bedeutet, x, y, z die Koordinaten eines rechtwinkligen Achsenkreuzes, V die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen. Dieses Resultat der Theorie möge hier vorausgesetzt werden, eine Ableitung der Differentialgleichung vom elektromagnetischen Standpunkte aus soll später (II. Abschnitt, Kapitel I) folgen.

Zunächst wollen wir zeigen, wie aus jener Differentialgleichung die schon oben benutzten analytischen Formen von s für ebene Wellen und für Kugelwellen folgen:

---

1) G. Kirchhoff, Ges. Werke, oder Vorlesungen über math. Optik.

2) W. Voigt, Kompendium d. theoret. Physik, II, S. 776. Leipzig 1896.

Legen wir für ebene Wellen die x-Achse in die Wellennormale (Fortpflanzungsrichtung), so kann s nur von x und t abhängen, da in jeder Ebene $x = const.$, welche eine Wellenebene ist, der Schwingungszustand für einen bestimmten Wert von t ein und derselbe sein soll. Dann reduziert sich aber (12) auf:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \tag{13}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist aber

$$s = f_1\left(t - \frac{x}{V}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{V}\right), \tag{14}$$

wobei f_1 irgend eine Funktion vom Argumente $t - \frac{x}{V}$ bedeutet, f_2 irdendeine Fuuktion vom Argumente $t + \frac{x}{V}$. In der Tat, bezeichnet man die ersten Differentialquotienten der Funktionen f_1 und f_2 nach ihren Argumenten mit f_1' und f_2', die zweiten Differentialquotienten mit f_1'' und f_2'', so ist

$$\frac{\partial s}{\partial t} = f_1' + f_2', \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = f_1'' + f_2'',$$
$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{V} f_1' + \frac{1}{V} f_2', \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = +\frac{1}{V^2} f_1'' + \frac{1}{V^2} f_2'',$$

d. h. die Gleichung (13) ist erfüllt. Ist nun die Abhängigkeit des s von der Zeit eine rein periodische $\left(\text{proportional zu } \cos 2\pi \frac{t}{T}\right)$, wie es homogenem Licht entspricht, so muß nach (14) sein

$$s = A_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{VT} + \delta_1\right) + A_2 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{TV} + \delta_2\right), \tag{15}$$

wobei A_1 und A_2, δ_1 und δ_2 Konstanten sind. Dies entspricht aber unserem früheren Ansatz für ebene Wellen der Wellenlänge $\lambda = VT$, und zwar ist A_1 die Amplitude eines Wellenzuges, der sich nach der positiven x-Achse fortpflanzt, dagegen A_2 die Amplitude einer nach der negativen x-Achse sich fortpflanzenden Welle.

Im Falle kugelförmiger Wellen, die sich vom Koordinatenanfang ausbreiten mögen, kann s nur von t und der Enfernung r vom Koordinatenanfang abhängen. Es ist also

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{x}{r},$$
$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{y}{r},$$
$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial r} \cdot \frac{z}{r}.$$

Denn da $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, so erhält man durch partielle Differentiation:

$$r \cdot \partial r = x \cdot \partial x, \text{ d. h. } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos(rx),$$

und analog
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Ferner folgt

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial r}\right) = \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{\partial s}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right),$$

analog
$$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{\partial s}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{\partial s}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right).$$

Die Differentialgleichung (12) wird daher in diesem Falle

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right), \tag{16}$$

was auch in der Form zu schreiben ist:

$$\frac{\partial^2 (rs)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 (rs)}{\partial r^2}. \tag{17}$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie (13), nur daß rs an Stelle des dortigen s tritt, und r an Stelle von x. Das Integral von (17) ist daher gemäß (14):

$$rs = f_1\left(t - \frac{r}{V}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{V}\right). \tag{18}$$

Hat man wiederum homogenes Licht der Periode T, so folgt:

$$s = \frac{A_1}{r} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{VT} + \delta_1\right) + \frac{A_2}{r} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{r}{TV} + \delta_2\right). \tag{19}$$

Dies ist unser früherer Ansatz für Kugelwellen. Ein Wellenzug geht vom Koordinatenanfang fort, einer geht nach ihm hin. Die Amplituden, z. B. A_1/r, sind umgekehrt proportional zu r. Dieses Resultat, welches schon oben S. 118 bei der Festlegung des Intensitätsmaßes benutzt wurde, folgt also aus der Differentialgleichung (12).

Bevor wir nun das Huygenssche Prinzip aus dieser Gleichung (12) ableiten, muß ein Hilfssatz vorangestellt werden.

4. Ein mathematischer Hilfssatz. Es bezeichne $d\tau$ ein Volumenelement, und F sei eine Funktion, welche innerhalb eines, von einer geschlossenen Fläche S umgrenzten Raumes überall end-

lich, stetig und eindeutig ist. Es soll betrachtet werden das über den ganzen innerhalb S liegenden Raum zu erstreckende Integral:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = \int \frac{\partial F}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Man kann die Integration partiell nach x ausführen, d. h. man kann zunächst eine Summation derjenigen Elemente $\frac{\partial F}{\partial x} d\tau$ des Integrals vornehmen, welche auf einer beliebigen, zur x-Achse parallelen Geraden $\mathfrak{G}$ liegen. Dadurch erhält man

$$dy\, dz \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = dy\, dz\, (-F_1 + F_2 - F_3 + F_4 \text{ usw.}),$$

wobei die F_1, F_2 usw. die Werte der Funktion F an denjenigen Stellen der Oberfläche S bedeuten, an welchen sie von der Geraden $\mathfrak{G}$ geschnitten wird. Der Allgemeinheit halber ist angenommen, daß diese Gerade $\mathfrak{G}$ die Fläche S mehrfach schneiden könne; jedenfalls muß die Anzahl der Schnittstellen gerade sein, weil S eine geschlossene Fläche ist. Wenn man die Gerade $\mathfrak{G}$ im Sinne der wachsenden x durchläuft, so bezeichnen F_1, F_3 usw. mit ungeradem Index die Werte von F an den Eintrittsstellen des von S umschlossenen Raumes, F_2, F_4 usw. mit geradem Index die Werte von F an den Austrittsstellen. Konstruieren wir nun über der Basis des sehr kleinen Rechtecks $dy\, dz$ eine Säule, deren Achse der x-Achse parallel ist, so schneidet diese aus der Fläche S Stücke der Größe dS_1, dS_2 usw. an den vorhin betrachteten Eintritts- resp. Austrittsstellen aus, und zwar ist stets:

$$dy\, dz = \pm dS \cdot \cos(nx),$$

falls (nx) den Winkel bezeichnet, welchen die Normale der Fläche S an der jeweilig geschnittenen Stelle mit der x-Achse bildet. Das Vorzeichen ist so zu bestimmen, daß die rechte Seite positiv ist, da die betrachteten Flächenstücke positive Größen sind. Es soll nun die positive Richtung von n nach dem Innern des von S umgrenzten Raumes weisen. Dann gilt für die Eintrittsstellen:

$$dy\, dz = + dS_1 \cdot \cos(n_1 x) = + dS_3 \cdot \cos(n_3 x) \text{ usw.},$$

für die Austrittsstellen dagegen:

$$dy\, dz = - dS_2 \cdot \cos(n_2 x) = - dS_4 \cdot \cos(n_4 x) \text{ usw.}$$

Es ist daher

$$dy\,dz \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = - F_1 \cos(n_1 x) \cdot dS_1 - F_2 \cos(n_2 x) \cdot dS_2 - \text{usw.}$$

Vollführt man nun noch eine Integration nach y und z, um das ganze betrachtete Raumintegral zu erhalten, so heißt das, man muß die Produkte $F \cos(nx)\, dS$ über die ganze Oberfläche von S summieren. Es ist daher:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = - \int F \cos(nx) \cdot dS, \tag{20}$$

wobei auf der rechten Seite F den Wert der Funktion am Oberflächenelement dS bedeutet.

Das ursprünglich über einen Raum zu erstreckende Integral ist also durch diesen Hilfssatz in ein solches verwandelt, welches über die Oberfläche des Raumes zu erstrecken ist. — Aus dem Gange des Beweises erkennt man, daß F innerhalb des betrachteten Raumes eindeutig, endlich und stetig sein muß, weil sonst bei der partiellen Integration nicht nur Oberflächenwerte F_1, F_2 von F auftreten würden, sondern auch Werte, die sich auf das Innere beziehen.

5. Zwei allgemeine Formeln. Es sei U eine Funktion, die x, y, z und r explizit enthält. r sei die Entfernung vom Koordinatenanfang, d. h. es ist $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Es bezeichne nun $\frac{\partial U}{\partial x}$ eine Differentiation allein nach der explizit vorkommenden Variabeln x, so daß y, z und r dabei als Konstante angesehen werden. Dagegen bezeichne $\frac{dU}{dx}$ den Differentialquotienten von U, der durch Fortschreiten um die Größe dx längs der x-Achse entsteht, wobei zu berücksichtigen ist, daß sich damit auch r ändert. Es ist dann:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \cos(rx), \tag{21}$$

da nach S. 163 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos(rx)$ ist. Es folgt daher auch

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) \cdot \cos(rx),$$

oder, da bei der Differentiation $\frac{\partial}{\partial x}$ die Größe r eine Konstante ist:

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial x}\cos(rx)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial x}\cos(rx).\\
&\text{Analog ist:}\\
&\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial y}\cos(ry)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial y}\cos(ry),\\
&\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial z}\cos(rz)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial z}\cos(rz).
\end{aligned}
\right.
$$

Unter $\frac{dU}{dr}$ soll der Differentialquotient von U nach r verstanden werden, der dadurch entsteht, daß man in der fest angenommenen Richtung r um dr fortschreitet. U ändert sich dadurch aus mehreren Gründen: einmal ändert sich die in U explizit vorkommende Variable r, dies gibt den Beitrag $\frac{\partial U}{\partial r}$, andererseits ändern sich auch die in U explizit vorkommenden Variabeln x, y, z und zwar, wie eine einfache geometrische Überlegung ergibt, um bezw. $dr\cdot\cos(rx)$, $dr\cdot\cos(ry)$, $dr\cdot\cos(rz)$. Es ist daher

$$
(23)\qquad \frac{dU}{dr}=\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial x}\cos(rx)+\frac{\partial U}{\partial y}\cos(ry)+\frac{\partial U}{\partial z}\cos(rz).
$$

Wenn man in dieser Gleichung anstatt U den Wert $\frac{\partial U}{\partial r}$ einsetzt, so folgt:

$$
(24)\quad \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial x}\cos(rx)+\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial y}\cos(ry)+\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial z}\cos(rz).
$$

Durch Addition der drei Gleichungen (22) entsteht daher mit Berücksichtigung von (23) und (24):

$$
(25)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}\right)=
$$

$$
\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{dU}{dr}-\frac{\partial U}{\partial r}\right).
$$

Nun ist aber

$$
(26)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{\partial U}{\partial r}\right).
$$

Multipliziert man die Gleichung (25) mit dem Volumenelement $d\tau=dx\,dy\,dz$ und integriert über einen Raum, innerhalb dessen $\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}$ eindeutig, endlich, stetig ist, so erhält man durch

dreimalige Anwendung[1]) des Hilfssatzes (20) auf S. 165 und Berücksichtigung von (26):

$$-\int \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial U}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial U}{\partial z}\cos(nz)\right\}dS=$$
$$\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)d\tau+\int \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{\partial U}{\partial r}-U\right)d\tau. \tag{27}$$

Der Raum, innerhalb dessen integriert wird, darf offenbar den Koordinatenanfang nicht enthalten, da dort $^1/_r$ unendlich groß wird. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: I. Entweder wird der Integrationsraum von einer Fläche S begrenzt, welche den Koordinatenanfang nicht umschließt, oder II. die äußere Begrenzungsfläche S des Integrationsgebietes umschließt den Koordinatenanfang.

II. Fall. In diesem Falle, den wir zunächst betrachten wollen, schließen wir den Koordinatenanfang durch eine um ihn beschriebene Kugel K von sehr kleinem Radius ϱ aus dem Integrationsgebiete aus. Dasselbe hat dann zwei Begrenzungsflächen: Eine äußere Begrenzung S und eine innere durch die Oberfläche K der Kugel. Das in (27) auftretende Oberflächenintegral ist daher sowohl über die äußere Oberfläche S, als auch über die Kugelfläche K zu erstrecken. Letzteres liefert aber keinen endlichen Beitrag, wenn ϱ unendlich klein ist, da die Oberfläche von K unendlich klein wie ϱ^2 wird, und auf der linken Seite von (27) r nur in der ersten Potenz im Nenner auftritt. Wir können ferner setzen:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial U}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial U}{\partial z}\cos(nz)=\frac{\partial U}{\partial n}, \tag{28}$$

wobei $\partial U:\partial n$ den Differentialquotienten bedeutet, den man erhält, wenn man in der Richtung der inneren Normale n auf S um ∂n fortschreitet und dabei r als eine Konstante behandelt. So wird daher die linke Seite von (27):

$$-\int \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}dS,$$

und dieses Integral ist nur über die äußere Oberfläche (nicht auch noch über die kleine Kugelfläche K) zu erstrecken.

1) Das in jener Formel (20) auftretende Zeichen $\frac{\partial}{\partial x}$ hat dieselbe Bedeutung wie hier $\frac{d}{dx}$. Jene Formel ist hier auch für eine Differentiation nach y und nach z anzuwenden.

Das letzte Glied der rechten Seite von (27) wollen wir dadurch umgestalten, daß wir schreiben

$$d\tau = r^2\, d\varphi\, dr, \tag{29}$$

indem wir ein Volumenelement uns herstellen durch den Ausschnitt eines Elementarkegels des räumlichen Öffnungswinkels $d\varphi$ aus einer Kugelschale, die zwischen den Radien r und $r + dr$ liegt. So entsteht:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial U}{\partial r} - U\right) d\tau = \int d\varphi \int_{\varrho}^{\bar r} dr \cdot \frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial U}{\partial r} - U\right) = \\ \int d\varphi \left\{\left(r\frac{\partial U}{\partial r} - U\right)_{r=\bar r} - \left(r\frac{\partial U}{\partial r} - U\right)_{r=\varrho}\right\},\end{aligned} \tag{30}$$

$\bar r$ bezeichnet die Werte von r an der äußeren Oberfläche S des Integrationsgebietes. Wenn nun ϱ unendlich klein wird, so gibt $r\frac{\partial U}{\partial r}$ für $r = \varrho$ nichts Endliches. Ferner ist für $\lim \varrho = 0$

$$\int d\varphi \cdot (U)_{r=\varrho} = 4\pi U_0, \tag{31}$$

wenn mit U_0 der Wert von U im Koordinatenanfang bezeichnet wird. Da ferner ist

$$\bar r^2 d\varphi = -\, dS \cos(nr), \tag{32}$$

wenn die positive Richtung von r vom Koordinatenanfang fortgerichtet ist, so ist:

$$\begin{aligned}\int d\varphi \left(r\frac{\partial U}{\partial r} - U\right)_{r=\bar r} &= -\int dS \cdot \cos(nr)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2}\right) \\ &= -\int dS \cdot \cos(nr)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right),\end{aligned} \tag{33}$$

wobei dieses Integral über die äußere Oberfläche S zu erstrecken ist. — Es folgt daher schließlich nach (28), (30), (31) und (33) aus (27):

$$\begin{aligned}-\int \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - \cos(nr)\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\right\} dS = \\ \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right) d\tau + 4\pi U_0.\end{aligned} \tag{34}$$

In dieser Gleichung kann die Raumintegration über das ganze Innere, welches von der Fläche S umschlossen wird, ausgedehnt werden, da die unendlich kleine Kugel K, deren Volumen propor-

tional zu ϱ^3 ist, für $lim\ \varrho = 0$ einen verschwindenden Beitrag liefert, weil r nur in der ersten Potenz im Nenner enthalten ist. —

I. Fall. Wenn die Fläche S den Koordinatenanfang nicht umschließt, so können wir alle Betrachtungen ungeändert lassen, nur daß die Konstruktion mit der Kugel K fortfällt. Um das letzte Glied der rechten Seite von (27) zu integrieren, wollen wir gerade wie vorhin setzen:

$$d\tau = r^2 d\varphi\, dr;$$

die Grenzen der Integration sind jetzt aber nicht ϱ und $\bar{r}$, sondern r_1 und r_2, nämlich diejenigen beiden Entfernungen vom Koordinatenanfang, in welchen die Achse des Elementarkegels vom Öffnungswinkel $d\varphi$ die Fläche S trifft. Daher folgt

$$\int \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U \right) d\tau = \int d\varphi \left\{ \left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U \right)_{r = r_2} - \left(r \frac{\partial U}{\partial r} - U \right)_{r = r_1} \right\}. \tag{30'}$$

Bezeichnet nun dS ein Flächenelement, welches der Elementarkegel aus S ausschneidet, so ist an der Eintrittsstelle des Elementarkegels, da n die innere Normale von S sein soll:

$$r^2{}_1\, d\varphi = + dS \cdot cos\ (nr),$$

an der Austrittsstelle dagegen

$$r_2{}^2 d\varphi = - dS \cdot cos\ (nr).$$

Man kann daher das Raumintegral (30′) als das Oberflächenintegral schreiben:

$$= - \int dS \cdot cos\ (nr) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right) = - \int dS \cdot cos\ (nr) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right). \tag{30'}$$

Folglich leitet man für diesen I. Fall aus (27) ab:

$$- \int \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - cos\ (nr) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right\} dS = \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) d\tau. \tag{34'}$$

6. Strenge Formulierung des Huygensschen Prinzipes. Von den Formeln (34) und (34′) machen wir folgende Anwendung: Es sei s die Lichterregung in irgend einem Punkte, s_0 sei der Wert von s im Koordinatenanfang. s genügt der Differentialgleichung (12) auf S. 161. Unter U wollen wir nun diejenige Funktion verstehen,

die aus s entsteht, wenn man das Argument t (Zeit) ersetzt durch $t - r/V$. Wir wollen dies formell ausdrücken durch:

$$U = s\,(t - r/V).$$

Es ist dann offenbar $U_0 = s_0$, da für den Koordinatenanfang $r = 0$ ist. Ferner ist nach der Differentialgleichung (12):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

da aber U eine Funktion vom Argument $t - r/V$ ist, so ist auch (vgl. oben S. 163 Formeln (17) und (18)):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt daher

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

Daher ergibt (34) für den Fall, daß die Fläche S den Koordinatenanfang umschließt:

$$4\pi\, s_0 = \iint \left\{ \frac{\partial \dfrac{s\,(t - r/V)}{r}}{\partial r} \cos\,(nr) - \frac{1}{r} \frac{\partial\, s\,(t - r/V)}{\partial n} \right\} dS. \tag{35}$$

Man kann den Inhalt dieser Formel in folgender Weise interpretieren: Die Lichterregung s_0 in einem beliebigen Punkte P_0 (in den wir den Koordinatenanfang gelegt haben) kann als die Superposition von Erregungen angesehen werden, welche von den Oberflächenelementen dS einer beliebigen, den Punkt P_0 einschließenden, geschlossenen Fläche S mit der Geschwindigkeit V nach P_0 hin fortgepflanzt sind. Denn die Elemente des Oberflächenintegrals (35) sind Funktionen vom Argument $t - r/V$, für eine Elementarerschütterung besteht also zu einer um r/V späteren Zeit in P_0 dieselbe Phase, wie sie vorher auf dS bestanden hat.

In dieser Fassung von (35) erkennen wir die Grundlage des ursprünglichen Huygensschen Prinzipes, aber der Schwingungszustand der einzelnen Quellen dS ist viel komplizierter, als er nach unseren früheren Betrachtungen sein müßte, nach denen die Integrationselemente einfach proportional zu $s\,(t - r/V)$ waren (vgl. Formel (4) auf S. 156).

Man kann also nach der Formel (35) die Erregung s_0 im

Punkte P_0 berechnen, falls man die Erregungen s und $\frac{\partial s}{\partial n}$ auf einer geschlossenen Fläche S kennt. In gewissen Fällen tritt dies ein, wenn z. B. eine punktförmige Lichtquelle Q und nirgends Schirme für die Lichtausbreitung vorhanden sind, überhaupt die Homogenität dns Raumes nirgends gestört ist. In diesem Falle kann man allerdings s_0 auch direkt hinschreiben. Immerhin ist es für das Folgende nützlich, zunächst auf diesen Fall die Formel (35) anzuwenden.

Die geschlossene Fläche S möge die Lichtquelle Q ausschließen. Die Erregung in irgend einem Punkte P auf S, der die Entfernung r_1 von der Lichtquelle Q besitzt, sei gegeben durch:

$$s = \frac{A}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right). \tag{36}$$

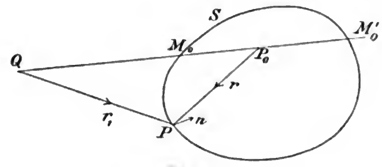


Fig. 61.

Es ist dann

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial s}{\partial r_1} \cos (nr_1), \text{ d. h.}$$

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \cos (nr_1) \left\{ -\frac{A}{r_1^2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + \frac{2\pi A}{\lambda r_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \right\}. \tag{37}$$

Nun soll r_1 sehr groß gegen λ sein, wir können daher das erste Glied gegen das zweite vernachlässigen und erhalten so:

$$\frac{\partial s\,(t - r/V)}{\partial n} = \cos (nr_1) \cdot \frac{2\pi A}{\lambda r_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda}\right). \tag{38}$$

Ferner folgt aus (36)

$$\frac{s\,(t - r/V)}{r} = \frac{A}{r r_1} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda}\right).$$

Differenziert man diesen Ausdruck nach r, so kann man, ähnlich wie in (37), wiederum ein Glied fortlassen, da auch r sehr groß gegen λ sein soll. Es ergibt sich daher:

$$\frac{\partial \frac{s\,(t - r/V)}{r}}{\partial r} = \frac{2\pi A}{\lambda r r_1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda}\right). \tag{39}$$

Durch Einsetzen der Werte (38) und (39) in (35) folgt:

$$s_0 = \frac{A}{2\lambda}\int \frac{1}{rr_1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+r_1}{\lambda}\right)[\cos(nr) - \cos(nr_1)]\,dS. \qquad (40)$$

In dieser Formel treffen wir den früheren Fresnelschen Ansatz (4) auf S. 156 wieder, aber mit folgenden Verbesserungen:

1. Der Fresnelsche Faktor k ist hier direkt aus der Grundlage der Theorie, nämlich aus der Differentialgleichung für s, bestimmt. Nehmen wir z. B. ein Element dS, welches im Punkte M_0 (vgl. Figur 61) auf der Verbindungslinie QP_0 liegt, so ist für dasselbe $\cos(nr) = -\cos(nr_1)$, da die positiven Richtungen r und r_1 gerade einander entgegenlaufen. Daher ist der Fresnelsche Strahlungsfaktor k:

$$k = \frac{\cos(nr)}{\lambda}.$$

Steht dS senkrecht auf QP_0, so ist $\cos(nr) = -1$, und abgesehen vom Vorzeichen, erhalten wir den Wert, der oben S. 161 für den Strahlungsfaktor k_1 der Zentralzone auf indirektem Wege abgeleitet ist.

2. Für ein Element dS, welches bei M'_0 liegt (vgl. Figur 61), ist r und r_1 gleichgerichtet, d. h. $\cos(nr) - \cos(nr_1) = 0$. Sein Einfluß verschwindet also in s_0, d. h. wir erhalten nicht eine Wirkung der Elementarwellen nach rückwärts, die bei der Fresnel-Huygensschen Fassung des Prinzipes stets bestehen würde. Wie man sofort sieht, ist dieses Verschwinden der nach rückwärts fortgepflanzten Wellen eine Folge davon, daß in (35) jede Elementarwirkung als Differenz zweier Größen auftritt.

3. Die Phase in P_0 wird richtig bestimmt, wie sie die direkte Ausbreitung des Lichtes von Q nach P_0 ergibt. Flächenelemente dS nämlich, welche bei M_0 senkrecht zu QP_0 liegen, besitzen in (40) den Faktor

$$-\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r+r_1}{\lambda}\right),$$

es ist also, als ob diese Flächenelemente um $\pi/2$ in der Phase beschleunigt schwingen[1]) gegenüber der direkten Fortpflanzung von Q

1) Wenn man als Lichterregung s nicht eine konvexe Kugelwelle annimmt, sondern eine konkave, die nach einem Punkte Q außerhalb S hinläuft, so modifizieren sich die Betrachtungen etwas, wie man leicht aus (35) ableiten kann. (In Mascart, Traité d'optique, I, S. 260, Paris 1889 ist dieser Fall berechnet.) Dies kann unter Umständen für Interferenzerscheinungen von

nach dS, welche gemäß (36) auf $\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+r_1}{\lambda}\right)$ führen würde. Integriert man über S, so ergibt sich wiederum für den Punkt P_0: $+\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{a+b}{\lambda}\right)$, nicht, wie bei der Fresnelschen Rechnung, $\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{a+b}{\lambda}\right)$ (vgl. oben S. 161). Dieser Widerspruch der Fresnelschen Rechnung ist also hier auch gehoben.

Wenn nun irgendwelche Schirme aufgestellt sind, so wird streng genommen die Aufgabe, s_0 zu bestimmen, außerordentlich kompliziert, da durch die Anwesenheit der Schirme die Lichterregung s in einem beliebigen Punkte P verschieden ist von der Erregung $\bar{s}$, wie sie ohne Schirme von den vorhandenen Lichtquellen bewirkt würde. Zur angenäherten Lösung der Aufgabe kann man aber die Annahme machen, daß, wenn die Schirme nicht das Licht reflektieren und vollkommen undurchsichtig sind, dicht an der von den Lichtquellen abgewandten Seite eines Schirmes s sowohl als $\frac{\partial s}{\partial n}$ verschwinden, daß dagegen an den freien Stellen, welche durch keinen vor die Lichtquellen gestellten Schirm geschützt sind, die Lichterregung s den freien Wert $\bar{s}$ besitze.

In dieser Weise wurde ja auch bei den oben angestellten Fresnelschen Überlegungen verfahren. Man kann sich dann von der Gleichung (40) aus, indem man die Fläche S möglichst an den abgewandten Seiten der Schirme entlang konstruiert, sehr angenähert Rechenschaft uber die Lichterregung s_0 in einem beliebigen Punkte P_0 geben; in (40) treten nur die ungeschützten Flächenelemente dS auf. Wie man speziell diese ungeschützte Fläche S legt, ist ganz gleichgültig, sie muß nur von den Löchern in den Schirmen umrandet sein. Dieses Resultat können wir aus der Formel (34′) auf S. 169 ableiten. Dieselbe ergibt nämlich hier, daß die rechte Seite von (40) den Wert Null hat, wenn die geschlossene Fläche S den Punkt P_0, für den s_0 berechnet werden soll (und die Lichtquelle Q) ausschließt. Erstrecken wir daher ein Integral s_0 gemäß der Gleichung (40) über eine ungeschlossene Fläche S, welche von einer Kurve C umrandet ist, und konstruieren wir noch irgend eine andere Fläche S', welche ebenfalls von C umrandet ist, so kann $S+S'$ als eine einzige geschlossene Fläche angesehen werden,

---

Wichtigkeit sein. Vgl. hierüber Gouy, Compt. Rend. 110, S. 1251; 111, S. 33, 1890. — Wied. Beibl. 14, S. 969. Reiche, Ann. d. Phys. **29**, 65, 401, 1909; Debye, ebenda **30**, 755, 1909.

welche den Koordinatenanfang P_0 nicht einschließen soll. Nach (34′) verschwindet die Summe $s_0 + s_0'$ der beiden über S und S' erstreckten Integrale. Es ist dabei aber n beständig als die innere Normale der von $S + S'$ gebildeten geschlossenen Fläche definiert, wenn also die positive Normale auf S nach der Seite hin zeigt, wo der Koordinatenanfang P_0 liegt, so zeigt die positive Normale auf S' von dieser Seite fort. Rechnen wir auch auf S' die positive Normale nach der Seite, nach welcher P_0 zu liegt, so kehrt sich dadurch das Vorzeichen des Integrals s'_0 um. Wir haben daher das Resultat: $s - s_0' = 0$, d. h. $s_0 = s'_0$, mit Worten ausgedrückt: Das Integral s_0, definiert durch die Gleichung (40), hat für alle, von einer Kurve C umrandeten, sonst beliebig gestalteten, ungeschlossenen Flächen S denselben Wert, wenn dabei die positive Normale immer in demselben Sinne gerechnet wird (von der Seite der Lichtquelle Q nach der Seite von P_0), und wenn diese verschiedenen Flächen S weder die Lichtquelle Q, noch den Punkt P_0, für den s_0 berechnet werden soll, einschließen.

Wie man nun vom Integral (40) aus die geradlinige Ausbreitung des Lichtes einerseits, gewisse Abweichungen davon aber auch gleichzeitig ableiten kann, ist schon oben in 2. mit Hilfe der Fresnelschen Zonenkonstruktion besprochen. Im folgenden Kapitel sollen genauer die Abweichungen von der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes, die sogenannten Beugungserscheinungen, besprochen werden.

Kapitel IV.

Beugung des Lichtes.

Wie aus den Entwicklungen des § 1 des vorigen Kapitels hervorgeht, treten Beugungserscheinungen (man nennt sie auch Diffraktion des Lichtes) immer auf, wenn die Schirme oder freien Öffnungen nicht sehr groß im Vergleich zur Lichtwellenlänge sind. Aber selbst in letzterem Falle treten, wie wir sehen werden, unter Umständen Beugungserscheinungen auf, z. B. am Rande des

geometrischen Schattens eines sehr großen Schirmes. Wenn wir nun die Beugungserscheinungen auf Grund der Gleichung (40) gemäß den oben S. 173 angestellten Überlegungen berechnen, so dürfen wir nicht vergessen, daß wir dadurch nur eine angenäherte Theorie erhalten, da einerseits bei vorhandenen Schirmen an den ungeschützten Stellen für s nicht genau der Wert gilt, wie er bei völlig ungestörter Lichtausbreitung sein würde, andererseits an den geschützten Stellen nicht genau s und $\frac{\partial s}{\partial n}$ verschwinden. Die Annäherung wird um so mehr die Wahrheit treffen, je größer die Öffnungen in den Schirmen sind; und in der Tat stimmt in den meisten Fällen, wenn man z. B. nicht besonders kleine Öffnungen verwendet, die angenäherte Theorie gut mit der Erfahrung. — In § 7 dieses Kapitels wird die strenge Theorie der Lichtbeugung behandelt werden.

1. Allgemeine Behandlung der Beugungserscheinungen. Wir wollen annehmen, daß zwischen Lichtquelle Q und dem Punkte P_0 ein ebener Schirm S vorhanden sei, der unendlich ausgedehnt ist und der eine beliebig gestaltete Öffnung σ besitzt, welche klein sei im Vergleich zu der Entfernung r_1 von der Lichtquelle Q und zu der Entfernung r vom Punkte P_0, für den wir die Lichterregung s_0 nach der Formel (40) des vorigen Kapitels berechnen wollen. Da bei der Kleinheit von σ bei der Integration innerhalb σ die Winkel (nr) und (nr_1) als konstant zu betrachten sind, und ebenfalls die Größen r und r_1, sofern sie nicht durch λ dividiert sind, so folgt aus (40):

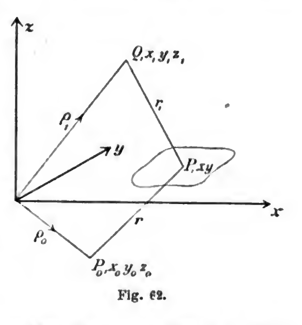


Fig. 62.

$$s_0 = \frac{A}{2\lambda} \cdot \frac{\cos(nr) - \cos(nr_1)}{rr_1} \int \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r + r_1}{\lambda}\right) d\sigma. \tag{1}$$

Wir wollen nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z zugrunde legen. Die xy-Ebene liege im Schirme S, ein beliebiger Punkt P der Öffnung σ habe die Koordination x und y. Die Lichtquelle Q habe die Koordinaten x_1, y_1, z_1 und zwar sei z_1

positiv. Der Punkt P_0 habe die Koordinaten x_0, y_0, z_0. z_0 ist negativ. Dann ist

$$r_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z_1^2, r^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2. \quad (2)$$

Die Entfernungen des Q und P_0 vom Koordinatenanfang seien ϱ_1 und ϱ_0. Dann ist

$$(3) \qquad \varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \; \varrho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Man kann nun schreiben:

$$(4) \qquad \begin{aligned} r_1 &= \varrho_1 \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 - 2(xx_1 + yy_1)}{\varrho_1^2}}, \\ r &= \varrho_0 \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 - 2(xx_0 + yy_0)}{\varrho_0^2}}. \end{aligned}$$

Die Dimensionen der Öffnung σ sollen klein sein gegen ϱ_1 und ϱ_0. Außerdem soll auch die Entfernung der Öffnung σ vom Koordinatenanfang klein sein gegen ϱ_1 und ϱ_0. Daher ist bei der Integration über σ auch x und y klein gegen ϱ. Entwickelt man nun die Ausdrücke (4) nach steigenden Potenzen von x/ϱ_1, y/ϱ_1, bzw. x/ϱ_0, y/ϱ_0 und bricht mit den zweiten Potenzen ab, so entsteht, da $(1 + \varepsilon)^{1/2} = 1 + {}^1/_2\, \varepsilon - {}^1/_8\, \varepsilon^2$ ist, falls ε klein gegen 1:

$$(5) \qquad r_1 = \varrho_1 \left\{ 1 + \frac{x^2 + y^2}{2\varrho_1^2} - \frac{xx_1 + yy_1}{\varrho_1^2} - \frac{(xx_1 + yy_1)^2}{2\varrho_1^4} \right\},$$

$$(6) \qquad r = \varrho_0 \left\{ 1 + \frac{x^2 + y^2}{2\varrho_0^2} - \frac{xx_0 + yy_0}{\varrho_0^2} - \frac{(xx_0 + yy_0)^2}{2\varrho_0^4} \right\}.$$

Nennen wir nun die Richtungskosinus, welche die Richtungen ϱ_1 und ϱ_0 mit den Koordinatenachsen bilden, α_1, β_1, γ_1, bzw. α_0, β_0, γ_0, wobei die positiven Richtungen von ϱ_1 und ϱ_0 vom Koordinatenanfang fortgehen sollen, so ist

$$(7) \qquad \alpha_1 = \frac{x_1}{\varrho_1}, \; \beta_1 = \frac{y_1}{\varrho_1}; \; \alpha_0 = \frac{x_0}{\varrho_0}, \; \beta_0 = \frac{y_0}{\varrho_0}$$

Durch Addition von (5) und (6) erhält man daher:

$$(8) \qquad \begin{aligned} r_1 + r = \varrho_1 + \varrho_0 - x(\alpha_1 + \alpha_0) - y(\beta_1 + \beta_0) + \frac{x^2 + y^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right) \\ - \frac{(x\alpha_1 + y\beta_1)^2}{2\varrho_1} - \frac{(x\alpha_0 + y\beta_0)^2}{2\varrho_0}. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in (1) ein, und schreibt zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 + r = \varrho_1 + \varrho_0 + f(x, y) \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \\ \frac{t}{T} - \frac{\varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} = \frac{t'}{T} \text{[1]} \\ \frac{A}{2\lambda} \frac{\cos(nr) - \cos(nr_1)}{rr_1} = A', \end{array}\right| \tag{9}$$

so wird (1) zu:

$$s_0 = A' \left\{ \sin 2\pi \frac{t'}{T} \int \cos [f(x, y)]\, d\sigma - \cos 2\pi \frac{t'}{T} \int \sin [f(x, y)]\, d\sigma \right\}. \tag{10}$$

Man kann daher s_0 auffassen als entstanden durch die Superposition zweier Wellen, deren Amplituden proportional sind zu:

$$\begin{aligned} C &= \int \cos [f(x, y)]\, d\sigma, \\ S &= \int \sin [f(x, y)]\, d\sigma, \end{aligned} \tag{11}$$

und welche eine Phasendifferenz von $\pi/_2$ gegeneinander besitzen. Nach dem Satze der S. 123 [vgl. auch die dortige Formel (11)] ist daher die Lichtintensität im Punkte P_0:

$$J = A'^2 (C^2 + S^2). \tag{12}$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: nämlich 1. Lichtquelle und der betrachtete Punkt P_0 liegen im Endlichen (Fresnelsche Beugungserscheinungen), 2. Lichtquelle und P_0 sind unendlich weit entfernt (Fraunhofersche Beugungserscheinungen).

2. Fresnelsche Beugungserscheinungen. Wir legen den Koordinatenanfang auf die Verbindungslinie QP_0 (und in die Ebene des Beugungsschirmes). Dann ist ϱ_1 und ϱ_0 gerade einander entgegengerichtet, und daher

$$\alpha_1 = -\alpha_0, \quad \beta_1 = -\beta_0.$$

Es wird dann, wie ein Vergleich von (8) und der Definitionsgleichung (9) für $f(x, y)$ lehrt:

$$f(x, y) = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0} \right) [x^2 + y^2 - (x\alpha_1 + y\beta_1)^2]. \tag{13}$$

Diesen Ausdruck kann man noch weiter vereinfachen, wenn man die x-Achse in die Projektion von QP_0 auf den Beugungsschirm

1) Man verlegt also den Anfangspunkt der Zeit.

legt. Es ist dann $\beta_1 = 0$. Bezeichnet man ferner den Winkel, den ϱ_1 mit der z-Achse macht, durch φ, so wird dann:

$$f(x,y) = \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)[x^2 \cdot \cos^2\varphi + y^2]. \tag{14}$$

Um den Gang der Untersuchung nicht durch längere Rechnungen unterbrechen zu müssen, schicken wir einige mathematische Betrachtungen voraus.

3. Fresnelsche Integrale. Wir wollen die Eigenschaften der als „Fresnelsche Integrale" bezeichneten Funktionen geometrisch diskutieren[1]). Es sind dies die beiden Integrale:

$$\xi = \int_0^v \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv, \quad \eta = \int_0^v \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv. \tag{15}$$

Wir wollen ξ und η für jeden bestimmten Wert des Parameters v als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes E auffassen. Bei kontinuierlicher Änderung des v beschreibt dann E eine Kurve. Die Gestalt dieser Kurve wollen wir bestimmen.

Die Kurve geht durch den Koordinatenanfang, weil für $v = 0$ auch $\xi = \eta = 0$ ist. Wenn man v in $-v$ umkehrt, so ändert sich das Integrationselement nicht, aber die obere Grenze des Integrals, und daher auch ξ und η wechseln die Zeichen. Daher ist der Koordinatenanfang ein Symmetriezentrum der Kurve, denn zu jedem $+\xi$, $+\eta$ kann man ein $-\xi$, $-\eta$ finden. Die Projektionen eines Bogenelementes ds der Kurve auf die Koordinatenachsen sind nach (15):

$$d\xi = dv \cdot \cos\frac{\pi v^2}{2}, \quad d\eta = dv \cdot \sin\frac{\pi v^2}{2}. \tag{16}$$

Daher folgt

$$ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = dv,$$

oder, wenn wir die Bogenlänge s vom Koordinatenanfang an zählen:

$$s = v. \tag{17}$$

Der Winkel τ, den die Tangente der Kurve in dem beliebigen Punkte E mit der ξ-Achse einschließt, ist gegeben durch

$$tg\,\tau = \frac{d\eta}{d\xi} = tg\,\frac{\pi v^2}{2}, \text{ d. h. } \tau = \frac{\pi}{2}v^2. \tag{18}$$

Im Koordinatenanfang verläuft also die Kurve parallel zur ξ-Achse, für $v = 1$, d. h. nach der Bogenlänge $s = 1$, ist sie parallel zur

1) Diesen Weg hat zuerst A. Cornu eingeschlagen im Journ. de Phys. 3, S. 1, 44. 1874.

η-Achse, für $s^2=2$ parallel zur ξ-Achse, für $s^2=3$ parallel zur η-Achse usf.

Der Krümmungradius ϱ in einem beliebigen Punkte E der Kurve ist gegeben durch [vgl. (17) und (18)]:

$$\varrho=\frac{ds}{d\tau}=\frac{1}{\pi v}=\frac{1}{\pi s}. \tag{19}$$

Für $v=0$, d. h. im Koordinatenanfang, hat daher die Kurve einen Inflexionspunkt, für wachsende v, d. h. für wachsende Bogen, wird ϱ beständig kleiner. Die Kurve bildet daher eine sich nicht schneidende Doppelspirale, welche sich um die beiden asymptotischen Punkte F und F', welche für $v=+\infty$ und $v=-\infty$ erreicht werden, herumwindet. Wir wollen die Koordinaten dieser Punkte berechnen. Für F ist

$$\xi_F=\int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv,\quad \eta_F=\int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv. \tag{20}$$

Um diese bestimmten Integrale auszuwerten, gehen wir aus von

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=M. \tag{21}$$

Schreibt man y als Integrationsvariabele, so ist auch

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=M.$$

Das Produkt beider bestimmten Integrale liefert:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=M^2. \tag{22}$$

Faßt man nun x und y als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P auf, so ist $x^2+y^2=r^2$, wobei r die Entfernung des P vom Koordinatenanfang ist. Ferner kann man $dx\,dy$ als Flächenelement do auffassen in der xy-Ebene. Begrenzt man aber ein Flächenelement durch zwei im Abstande dr voneinander liegende unendlich kleine Kreisbogen, welche um den Koordinatenanfang beschrieben sind und den Zentriwinkel $d\varphi$ haben, so ist ein Flächenelement do:

$$do=r\,dr\,d\varphi. \tag{23}$$

Man kann daher (22) schreiben, da über einen Quadranten der Koordinatenebene integriert wird:

$$M^2 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} \, r \, dr. \tag{24}$$

Nun ist aber

$$\int e^{-r^2} \, r \, dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2},$$

daher wird

$$M^2 = \frac{\pi}{4}, \quad M = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \tag{25}$$

Schreibt man nun in (21) für x:

$$x^2 = -i \frac{\pi v^2}{2}, \text{ d. h. } x = v \sqrt{\frac{-i\pi}{2}}, \tag{26}$$

wobei i die imaginäre Einheit bedeutet, so folgert man aus (21) und (25):

$$\sqrt{\frac{-i\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{i \frac{\pi v^2}{2}} dv = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}, \text{ oder}$$

$$\text{da } \frac{1}{\sqrt{-i}} = \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ ist:}$$

$$\int_0^{\infty} e^{i \frac{\pi v^2}{2}} dv = \frac{1+i}{2}. \tag{27}$$

Da nun ist:

$$e^{i \frac{\pi v^2}{2}} = \cos \frac{\pi v^2}{2} + i \sin \frac{\pi v^2}{2}, \tag{28}$$

so folgt durch Gleichsetzen der reellen und imaginären Bestandteile beider Seiten der Gleichung (27):

$$\int_0^{\infty} \cos \frac{\pi v^2}{2} dv = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\infty} \sin \frac{\pi v^2}{2} dv = \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Gemäß (20) hat also der asymptotische Punkt F die Koordinaten $\xi_F = \eta_F = {}^1/_2$. Es ergibt sich daher die in Figur 63 gezeichnete Gestalt der Kurve. Man kann die Kurve in folgender Weise konstruieren: Von 0 aus geht man bis zum Werte $s = 0{,}1$ auf der Abszissenachse fort. An diesen Punkt anschließend konstruiert

man nun einen Kreis mit dem Radius (nach 19) $\varrho = \frac{1}{\pi s} = \frac{10}{\pi}$. Das Zentrum des Kreises liegt vom Punkte $s = 0{,}1$ aus in einer Richtung, die [nach (18)] den Winkel $\tau = \frac{\pi s^2}{2} = 0{,}01 \frac{\pi}{2}$ mit der η-Achse einschließt. Auf dem so konstruierten Kreise trägt man den Bogen $s = 0{,}1$ ab. An den Endpunkt trägt man einen Kreisbogen mit

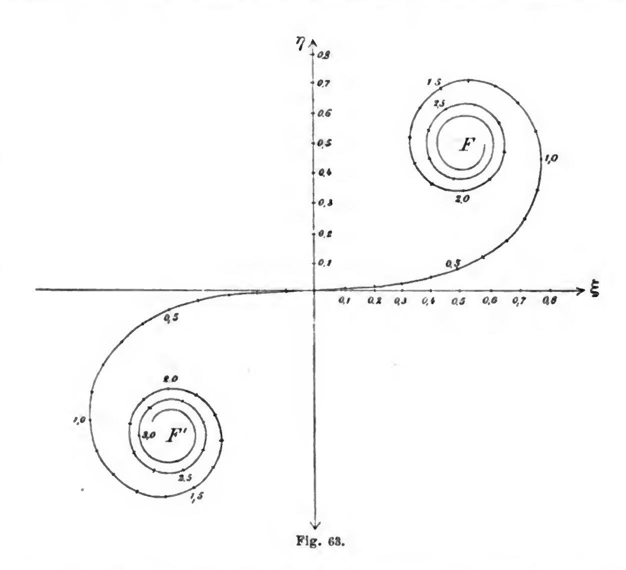


Fig. 63.

dem Radius $\varrho = \frac{1}{\pi s} = \frac{1}{\pi \cdot 0.2} = \frac{5}{\pi}$. Die Richtung nach seinem Zentrum macht den Winkel $\tau = \frac{\pi s^2}{2} = 0{,}04 \cdot \frac{\pi}{2}$ mit der η-Achse. In dieser Weise fortfahrend, kann man die ganze Kurve konstruieren.

4. Beugung am geradlinigen Rande eines Schirmes. Wir nehmen die Bezeichnungen des § 2 wieder auf. Die y-Achse möge parallel zur Schirmkante liegen, der Schirm erstrecke sich vom Werte $x = +\infty$ bis zum Werte $x = x'$ (Schirmrand). In Figur 64 ist x' positiv, d. h. P_0 liegt außerhalb des geometrischen Schattens

des Schirmes. Untersuchen wir die Lichtintensität in einer zur Schirmkante senkrechten Ebene, welche durch die Lichtquelle Q geht, so liegt QP_0 in der xz-Ebene. Es gilt daher dann die Formel (14), und wir haben nach (11) zu bilden:

$$C = \int_{-\infty}^{x'}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy \cos\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)(x^2\cos^2\varphi + y^2)\right],$$

$$(30)\qquad S = \int_{-\infty}^{x'}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy \sin\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)(x^2\cos^2\varphi + y^2)\right].$$

Zunächst haben wir es zu rechtfertigen, daß wir hier über die ganze, vom Schirm frei gelassene xy-Ebene integrieren, während wir bei unseren früheren Entwickelungen (vgl. S. 176) voraussetzten, daß nur über eine Öffnung σ integriert werden solle, deren sämtliche Punkte P in Distanzen vom Koordinatenanfang liegen, welche klein gegen ϱ_1 und ϱ_0 sein sollten. Ein derartiges Integrationsgebiet ist nun in der Tat allein für die Lichtintensität J im Punkte P_0 maßgebend, da es die Zentralzonen, und zwar noch sehr viele derselben, umfaßt. Eine Integration über anschließende, weitere Gebiete fügt aber keine weiteren Anteile zu J hinzu,

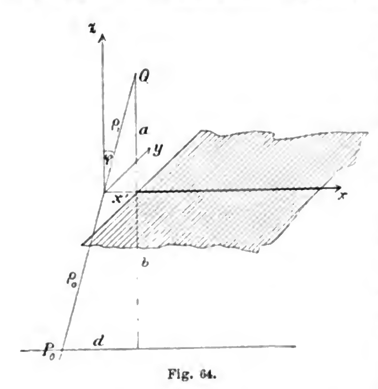


Fig. 64.

da wir früher ableiteten, daß ein Schirmrand keinen Einfluß mehr auf die Lichtintensität in einem Punkte P_0 hat, wenn er viele Zonen weit entfernt ist von der direkten Verbindungslinie von P_0 zur Lichtquelle Q. Wir können daher in (30) ohne Änderung des Resultates die Integration über die ganze, vom Schirm frei gelassene xy-Ebene vornehmen.

Setzt man in (30):

$$(31)\qquad \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)x^2\cos^2\varphi = \frac{\pi v^2}{2},\quad \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)y^2 = \frac{\pi u^2}{2},$$

so entsteht:

$$C = \frac{1}{\cos\varphi \cdot \frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{v'}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, du \cos\frac{\pi}{2}(v^2 + u^2),$$

$$S = \frac{1}{\cos\varphi \cdot \frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{v'}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, du \sin\frac{\pi}{2}(v^2 + u^2), \tag{32}$$

wobei

$$v' = x' \cos\varphi \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)}. \tag{33}$$

Löst man nun auf:

$$\cos\frac{\pi}{2}(v^2 + u^2) = \cos\frac{\pi v^2}{2}\cos\frac{\pi u^2}{2} - \sin\frac{\pi v^2}{2}\sin\frac{\pi u^2}{2},$$

und analog $\sin\frac{\pi}{2}(v^2 + u^2)$, so kann man die Integration nach u sofort vornehmen und erhält unter Rücksicht auf (29):

$$C = f \cdot \left\{\int_{-\infty}^{v'} \cos\frac{\pi v^2}{2} dv - \int_{-\infty}^{v'} \sin\frac{\pi v^2}{2} dv\right\},$$

$$S = f \cdot \left\{\int_{-\infty}^{v'} \sin\frac{\pi v^2}{2} dv + \int_{-\infty}^{v'} \cos\frac{\pi v^2}{2} dv\right\}, \tag{34}$$

$$f = \frac{\lambda}{2\cos\varphi\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right)}. \tag{35}$$

Nach (12) folgt daher

$$J = 2A'^2 \cdot f^2 \cdot \left\{\left(\int_{-\infty}^{v'} \cos\frac{\pi v^2}{2} dv\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{v'} \sin\frac{\pi v^2}{2} dv\right)^2\right\}. \tag{36}$$

Für A' gilt der Wert nach (9) auf S. 177. Da nach der Bemerkung der vorigen Seite nur diejenigen Flächenteile der xy-Ebene bei der Integration zur Bestimmung der Lichtintensität J im Punkte P_0 ins Gewicht fallen, welche in der Nähe des Koordinatenanfangspunktes liegen, so ist in A' zu setzen

$$r = \varrho_0,\ r = \varrho_1,\ \cos(nr) = -\cos(nr_1) = \cos\varphi.$$

Daher ist

$$A' \cdot f = \frac{A}{2(\varrho_0 + \varrho_1)}. \tag{37}$$

Für die beiden in (36) auftretenden Fresnelschen Integrale benutzen wir die geometrische Darstellung und Bezeichnung des § 3. Wenn die Koordinaten eines Punktes E der Kurve der Figur 63 dargestellt sind durch die früheren Gleichungen (15), d. h. durch

$$\xi = \int_0^v \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv, \quad \eta = \int_0^v \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv,$$

ferner die Koordinaten eines anderen Punktes E' der Kurve, der zum Parameter v' gehört, durch:

$$\xi' = \int_0^{v'} \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv, \quad \eta' = \int_0^{v'} \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv,$$

so ist offenbar:

$$\int_v^{v'} \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv = \xi' - \xi, \quad \int_v^{v'} \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv = \eta' - \eta.$$

Die Summe der Quadrate dieser beiden Integrale ist also gleich dem Quadrat der Entfernung zwischen den beiden Punkten E und E' der Kurve in Figur 63. — Zum Parameter $v = -\infty$ gehört der Punkt $E = F'$ in Figur 63. Bezeichnet man daher die Entfernung des Punktes F' von einem zum Parameter v' gehörenden Punkte E' durch $(-\infty, v')$, so wird nach (36) und (37)

$$J = \frac{A^2}{2(\varrho_0 + \varrho_1)^2} \cdot (-\infty, v')^2. \tag{38}$$

Aus der Gestalt der Kurve Figur 63 ergibt sich nun sofort, daß J Maxima und Minima besitzt für positive Werte v', d. h. wenn P_0 außerhalb des geometrischen Schattens des Schirmes liegt; innerhalb desselben dagegen wird die Lichtintensität beständig kleiner, wenn P_0 tiefer in den Schatten hereinrückt, denn dann ist v' negativ und der Punkt E' nähert sich beständig dem Punkte F'.

Für $v' = +\infty$ wird $(-\infty, +\infty)^2 = 2$, da die Punkte F und F' jeder die Koordinaten $\xi = \eta = \frac{1}{2}$ besitzen. In diesem Falle liegt P_0 sehr weit außerhalb des geometrischen Schattens, und die Lichtintensität wird nach (38) gleich der natürlichen, wie sie ohne Vorhandensein eines Schirmes besteht. — Für $v' = 0$ liegt P_0 gerade am Rande des geometrischen Schattens. Dann

ist $(-\infty, o)^2 = 1/2$ und die Lichtintensität ist nach (38) gleich ein Viertel der natürlichen Intensität.

Die strenge Berechnung der Maxima und Minima der Lichtstärke, falls P_0 außerhalb des Schattens liegt, wollen wir hier nicht ausführen.[1]) Näherungsweise ergibt sich aus der Figur (63), daß diese Maxima und Minima an den Schnittstellen der Linie FF' mit der Kurve liegen. Da diese Linie von der Kurve annähernd rechtwinklig geschnitten wird, so ist für die Maxima der Neigungswinkel τ der Kurve gegen die ξ-Achse gleich $(3/4 + 2h)\pi$, dagegen für die Minima: $\tau = (7/4 + 2h)\pi$, wobei $h = 0, 1, 2 \ldots$ ist. Wegen der Gleichung (18) auf S. 178 ist daher für die Maxima: $v' = \sqrt{3/2 + 4h}$ für die Minima $v' = \sqrt{7/2 + 4h}$. Um nun die Lage der Beugungsfransen zu bestimmen, denken wir uns den Beugungsschirm so um seine Kante gedreht[2]), daß er senkrecht zu der kürzesten Entfernung a der Lichtquelle Q von der Schirmkante liegt (vgl. Fig. 64). Dann ist $\varrho_1 = a : \cos\varphi$. Ferner ziehen wir durch P_0 eine Parallele zur x-Achse, und die Entfernung des P_0 vom geometrischen Schatten des Schirmes, gemessen auf dieser Parallelen, betrage d. Dann ist $x' : d = a : a + b$. Es bedeutet daher d den Abstand des Punktes P_0, für den die Lichtstärke berechnet wird, vom geometrischen Schatten in einer Ebene, die um die Größe b hinter dem Schirme liegt. Führen wir nun in (33) an Stelle von x' die Größe d ein und setzen $\varrho_1 = a$, $\varrho_0 = b$, was gestattet ist, da $\cos\varphi$ sich nur unmerkbar von 1 unterscheidet, falls wir P_0 in der Nähe des geometrischen Schattens annehmen, so wird nach (33)

$$v' = d\sqrt{\frac{2a}{\lambda b (a+b)}} = d : p, \tag{39}$$

falls p eine Abkürzung ist für

$$p = \sqrt{\frac{\lambda b (a+b)}{2a}}. \tag{40}$$

---

1) Vgl. hierüber Fresnel, Oeuvr. compl. I, S. 322. — Über Reihenentwickelungen der Fresnelschen Integrale vgl. Vorles. üb. theor. Optik von F. Neumann, herausgeg. v. Dorn, Leipzig, 1885, S. 62—69. — Am vollständigsten ist von Lommel in den Abhandl. der bayr. Akad. Bd. 15, S. 229 u. 529, II. Cl. 1886 die Beugung an kreisförmig und geradlinig begrenzten Schirmen theoretisch und experimentell behandelt worden.

2) Durch eine solche Drehung des Schirmes und dementsprechende Drehung der freien Fläche, über welche integriert wird, tritt nach dem Satze der S. 174 keine Änderung im Resultate ein.

Maxima der Lichtstärke finden daher statt für $d = p\sqrt{{}^3/_2 + 4h}$, d. h. für

$$d_1 = p \cdot 1{,}225;\ d_2 = p \,.\, 2{,}345;\ d_3 = p \cdot 3{,}082 \text{ usw.}$$

Minima finden statt für $d = p\sqrt{{}^7/_2 + 4h}$, d. h. für

$$d_1' = p \cdot 1{,}871;\ d_2' = p \cdot 2{,}739;\ d_3' = p \cdot 3{,}391 \text{ usw.}$$

Die genauen Werte weichen nur sehr wenig von diesen Annäherungswerten ab und die Beobachtungen[1]) bestätigen diese Zahlen.

Die Lichtintensität in diesen Maximis und Minimis ergibt sich nach (38) einfach durch geometrische Ausmessung der Abschnitte, welche die Linie $F'F$ in Figur 63 mit der Kurve bildet. Man erhält so für die Maxima, falls die freie Intensität $= 1$ gesetzt wird:

$$J_1 = 1{,}34:\ J_2 = 1{,}20;\ J_3 = 1{,}16;$$

für die Minima folgt

$$J_1' = 0{,}78;\ J_2' = 0{,}84;\ J_3' = 0{,}87.$$

Fresnel hat durch exaktere Berechnung seiner Integrale nur wenig davon abweichende Werte gefunden.

5. Beugung durch einen schmalen Spalt. Wir legen dasselbe Koordinatensystem und dieselben Bezeichnungen zugrunde, wie im vorigen Paragraphen, und untersuchen die Lichtintensität in einer zu den (einander parallelen) Spalträndern senkrechten Ebene, welche durch die Lichtquelle Q geht. Diese Ebene ist die xz-Ebene, vgl. Figur 65. Die x-Koordinaten der Spaltränder seien x_1 und x_2. Wenn der Punkt P_0, für den wir die Lichtintensität berechnen, im geometrischen Schatten eines der den Spalt zu beiden Seiten begrenzenden Schirme liegt, so sind x_1 und x_2 entweder beide positiv, oder beide negativ. Wenn aber die Verbindungslinie QP_0 durch den freien Spalt geht, so sind die Vorzeichen von x_1 und x_2 einander entgegengesetzt. Dieser Fall ist in Figur 65 gezeichnet. Wir wollen auch die dort gezeichnete Lage der Lichtquelle Q senkrecht über der Mitte des Spaltes festhalten. Bezeichnet man die Spaltbreite mit δ, so ist:

$$x_1 - x_2 = \delta,\ x_1 - {}^1/_2\,\delta : d = a : a + b. \tag{41}$$

---

1) Zur Beobachtung läßt man die Beugungsfransen entweder auf einem geeignet gestellten Schirme zustande kommen, oder man benutzt eine Lupe mit Glasmikrometer, vgl. oben S. 125, Anm.

Für a und b kann man annähernd ρ_1 und ρ_0 schreiben, da bei keinem δ die Neigung von ρ_1 gegen a sehr gering ist.

Führen wir wiederum die Größe v ein nach der Gleichung (31) auf S. 182 und nennen wir v_1 und v_2 die Werte des Parameters v, welche den Integrationsgrenzen x_1 und x_2 entsprechen, so wird die Lichtintensität in P_0 gerade wie nach (38):

$$J = \frac{A^2}{2(\rho_0 + \rho_1)^2}(v_1, \quad v_2)^2, \tag{42}$$

wobei (v_1, v_2) die Entfernung zwischen den zwei Punkten der Kurve in Figur 63 bezeichnet, welche den Parametern v_1 und v_2 entsprechen. Es ist nun aber nach (41) und (31):

$$v_1 - v_2 = \delta \sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}, \quad \frac{v_1 + v_2}{2} = d:p, \tag{43}$$

wobei p die Abkürzung nach Gleichung (40) bedeutet. — Wenn wir nun die Lichtverteilung in einer Ebene untersuchen wollen, welche um b hinter dem Beugungsschirm liegt, so haben wir den Ausdruck (42) in seiner Abhängigkeit von d zu diskutieren. Nach (43) bleibt die Differenz der Parameter v_1, v_2 konstant, es handelt sich also um die Frage: wie variiert der Abstand zwischen den zwei Punkten v_1, v_2 der Kurve der Figur 63, zwischen denen eine konstante Bogenlänge $s = v_1 - v_2$ der Kurve liegt?

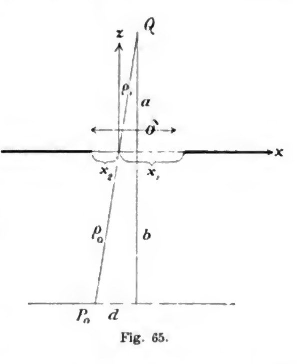


Fig. 65.

Nehmen wir zunächst einen sehr schmalen Spalt, so daß die konstante Bogenlänge s etwa den Wert 0,1 besitzt,[1]) so ergibt jene Kurve sofort, daß die Lichtintensität von $d = 0$ an bis zu sehr großen Werten des v_1, d. h. des d, konstant bleibt und dann allmählich abnimmt, wenn v_1 und v_2 beide sehr große positive oder negative Werte haben, d. h. wenn P_0 schon weit im geometrischen Schatten liegt. Bei einem sehr engen Spalte ist daher der geometrische Schatten auch nicht annähernd wahrnehmbar, überhaupt

1) Für $a = b = 20$ cm müßte dazu δ etwa $30\,\lambda$ betragen.

gibt es nirgends eine scharfe Schattengrenze, das Licht ist über einen großen Bereich nahezu konstant verteilt (Diffusion des Lichtes).[1])

Wenn die Spaltbreite δ beträchtlicher wird, aber immer noch absolut genommen sehr klein ist, so daß die konstante Bogenlänge s etwa den Wert 0,5 besitzt, so ergibt die Kurve der Figur 63, daß auch hier das Licht weit in den geometrischen Schatten hereingreift und daß Maxima und Minima der Lichtstärke nur für gleiche Vorzeichen von v_1 und v_2 eintreten, d. h. daß Beugungsfransen nur im geometrischen Schatten auftreten. Deutliche Minima bestehen (vgl. Figur 66), wenn in den beiden Punkten v_1 und v_2 der Kurve die Tangenten einander parallel sind, so daß sich die Tangentenwinkel τ_1 und τ_2 (vgl. oben S. 178) um ein ganzes Vielfaches von 2π unterscheiden. Da nun nach (18) auf S. 178 $\tau = \pi/_2 \cdot v^2$ ist, so muß für die Orte der Beugungsfransen sein:

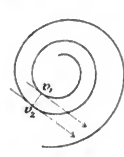


Fig. 66.

$$\frac{\pi}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \pm 2h\pi, \text{ d. h. } (v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = \pm 4h,$$

oder mit Rücksicht auf (43):

$$d \cdot \delta = \pm h\lambda b, \quad h = 1, 2, 3 \ldots \tag{44}$$

Diese Beugungsfransen sind also äquidistant und unabhängig von a, d. h. der Entfernung der Lichtquelle vom Schirm.

Wenn der Spalt noch breiter wird, oder bei derselben Spaltbreite a und b verkleinert werden, so daß die Differenz $v_1 - v_2$ wesentlich größer wird, so können, wie die Kurve Figur 63 lehrt, auch für verschiedene Vorzeichen von v_1 und v_2, d. h. außerhalb des geometrischen Schattens, Beugungsfransen auftreten; zu jedem Werte der Differenz $v_1 - v_2$ kann man den Verlauf des J als Funktion von d aus der Kurve auch numerisch angenähert richtig entnehmen. Wenn der Spalt sehr breit wird, d. h. $v_1 - v_2$ sehr groß ist, so nähert man sich dem im vorigen § 4 behandelten Falle.

Im Zentralgebiet (für $d = 0$) verschwindet J niemals. Je nach dem Werte von b bei bestimmten a und δ kann aber J Maxima und Minima erhalten. Da für $d = 0$ die Werte v_1 und v_2 ent-

1) Diffusion des Lichtes muß z. B. stets eintreten, wie man durch die Fresnelsche Zonenkonstruktion ableiten kann, falls die Spaltbreite $\delta < {}^1/_2\lambda$ ist.

gegengesetzt gleich sind, so geht die Verbindungslinie der Punkte v_1 und v_2 durch den Koordinatenanfang in Figur 63. Maxima und Minima treten daher annähernd für die Schnittpunkte der Kurve mit der Linie FF' ein, d. h. nach S. 185

$$\text{Maxima für } v_1 = \sqrt{{}^3/_2 + 4h},$$
$$\text{Minima für } v_1 = \sqrt{{}^7/_2 + 4h},$$

oder nach (43), da $v_2 = -v_1$ ist:

$$\text{Maxima für } \frac{\delta^2}{2\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = {}^3/_2 + 4h,$$
$$\text{Minima für } \frac{\delta^2}{2\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = {}^7/_2 + 4h, \tag{45}$$
$$h = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

6. Beugung durch einen schmalen Schirm[1]). Der Schirm habe die Breite δ, senkrecht über seiner Mitte liege im Abstande a die Lichtquelle Q. Wir untersuchen die Lichtintensität in einer, durch Q gehenden Ebene (xz-Ebene), welche senkrecht zu den (einander parallelen) Schirmrändern steht. — Wir gebrauchen die im Vorigen angewandten Bezeichnungen (vgl. Figur 65), x_1 und x_2 seien die x-Koordinaten der Schirmkanten, v_1 und v_2 die ihnen entsprechenden Werte des Parameters v; dieselben genügen den Gleichungen (43). Die Lichtintensität J ist proportional zu der Summe der Quadrate der Integrale (vgl. die Entwickelungen der S. 183):

$$M = \int_{-\infty}^{v_1} \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv + \int_{v_2}^{+\infty} \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv,$$

$$N = \int_{-\infty}^{v_1} \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv + \int_{v_2}^{+\infty} \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv.$$

Das erste Glied in M ist nun (vgl. die analogen Entwickelungen der S. 184) gleich der ξ-Koordinate der Strecke, welche F' und den dem Parameter v_1 entsprechenden Punkt E_1 der Kurve in Figur 67 verbindet. Das zweite Glied in M ist gleich der ξ-Koordinate der Strecke (E_2F), wobei der Punkt E_2 dem Parameter v_2 entspricht. Analoge Bedeutungen haben die beiden Glieder von N.

1) Als schmaler Schirm kann z. B. zweckmäßig ein gerade gespannter Draht verwendet werden.

Nennt man die ξ-, bezw. η-Koordinaten der Strecken $(F'E_1)$ und (E_2F): ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, so wird also:

$$M^2 + N^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2.$$

Wenn man an die Strecke $(F'E_1)$ anträgt die Strecke (E_1F'') in gleicher Richtung und Länge, wie die Strecke (E_2F), so hat die Strecke $(F'F'')$ die Koordinaten $\xi_1 + \xi_2$, $\eta_1 + \eta_2$. Die Lichtstärke J im Punkte P_0 ist also proportional dem Quadrat der

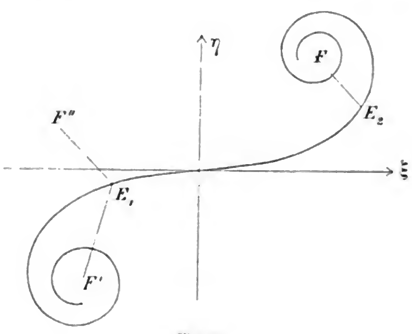


Fig. 67.

Strecke $(F'F'')$, welche man durch geometrische Addition der beiden Strecken $(F'E_1)$ und (E_2F) erhält, und hat den Wert:

$$J = \frac{A^2}{2(\varrho_0 + \varrho_1)^2} \cdot (F'F'')^2. \tag{46}$$

Hieraus ergibt sich, daß der Zentralstreifen $(d = 0)$ immer hell ist (obwohl er am tiefsten im geometrischen Schatten liegt), denn für ihn sind die Werte v_1 und v_2 entgegengesetzt gleich, die beiden Punkte E_1 und E_2 in Figur 67 liegen also symmetrisch zum Koordinatenanfang, die Strecken $F'E_1$ und E_2F sind gleich und gleichgerichtet, ihre geometrische Summe ist daher nie Null. Je breiter der Schirm ist, desto kleiner wird die Lichtstärke im Zentralstreifen.

Wenn der Schirm genügende Breite hat, so daß v_1 und v_2 ziemlich groß sind, so liegen die Punkte E_1 und E_2 in der Nähe von F' und F. Die Strecken $(F'E_1)$ und (E_2F) sind dann annähernd

einander gleich, es tritt daher nahezu vollständige Dunkelheit ein, wenn $(F'E_1)$ parallel und gleichgerichtet ist mit (FE_2). Da bei großen v_1 und v_2 die Strecken $(F'E_1)$ und (FE_2) nahezu senkrecht zur Kurve der Figur 67 stehen, so sind, falls diese Strecken gleichgerichtet sind, die Tangenten, welche in E_1 und in E_2 an die Kurve gelegt werden, einander annähernd parallel, und zwar laufen ihre positiven Richtungen, welche nach wachsenden Bögen s hinweisen, einander entgegen. Es ist also die Differenz der Tangentenwinkel $\tau_1 - \tau_2$ ein ungerades Vielfaches von π, d. h. da nach (18) $\tau = \pi/_2 \cdot v^2$ ist, so treten dunkle Beugungsfransen auf, falls

$$\tfrac{1}{2}\,(v_1{}^2 - v_2{}^2) = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5 \text{ usw.}$$

Unter Rücksicht auf (43) wird dies:

$$2d\delta = \pm h\lambda b,\ h = 1,\ 3,\ 5 \text{ usw.} \tag{47}$$

Diese Beugungsfransen nehmen an Dunkelheit mit wachsendem h ab. Sie sind äquidistant und von der Entfernung a der Lichtquelle vom Schirm unabhängig. Die ganze Betrachtung gilt nur innerhalb des geometrischen Schattens, d. h. solange $d < \frac{1}{2}\,\delta\,\frac{a+b}{a}$ ist, und auch dann nur mit einiger Strenge, falls die beiden Schirmrändern entsprechenden Werte von v_1 und v_2 hinreichend groß sind, d. h. bei genügend breitem Schirm in genügender Nähe an ihm in der Umgebung des Zentralstreifens.

Rückt P_0 an den Rand des geometrischen Schattens oder aus ihm heraus, so treten auch dann noch je nach der Lage von P_0 Maxima und Minima der Lichtstärke auf, die für jeden speziellen Fall durch die angegebene Konstruktion aus der Figur 67 erhalten werden können. Die hier auftretenden Beugungsfransen gehorchen aber keinem leicht übersichtlichen Gesetze.

Diese Beispiele mögen genügen, um die Brauchbarkeit der von Cornu benutzten geometrischen Methode zu zeigen[1]). Die Beobachtungen entsprechen allen hier gezogenen Folgerungen.

7. Strenge Behandlung der Beugung am geradlinigen Rande eines Schirmes. Wie schon im Eingange dieses Kapitels hervorgehoben wurde (S. 174), ist die bisherige Behandlung der Beugungserscheinungen auf Grund des Huygensschen Prinzipes nur eine angenähert richtige vom Standpunkt der elektromagne-

1) Diese Methode ist noch auf kompliziertere Fälle angewendet in dem Lehrbuch von Mascart, Traité d'Optique, Paris 1893, T. 1. S. 283.

tischen Lichttheorie. Es ist nun wichtig, daß man in dem Falle der Beugung durch den geradlinigen Rand eines Schirmes, das Problem nach Sommerfeld[1]) in Strenge für einen idealen Schirm[2]) durchführen kann; man kann einerseits dadurch prüfen, welche Fehler die angenäherte Behandlung der Beugung ergibt, andererseits kann man dadurch auch die Erscheinungen bei sehr großen Beugungswinkeln, d. h. in sehr großem Abstand von der geometrischen Schattengrenze, theoretisch behandeln, was bei der bisher angewandten Methode, ohne gewisse Erweiterungen wenigstens, nicht möglich wäre.

Die strenge Behandlung der Beugungserscheinungen hat die Differentialgleichung (12) der S. 161 für die Lichterregung:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)$$

zu integrieren unter Rücksicht auf gewisse Randbedingungen, welche an der Oberfläche der Beugungsschirme zu erfüllen sind. Die Form dieser Rand- oder Grenzbedingungen werden wir erst später im II. Abschnitt, Kapitel I, II und IV ableiten, hier wollen wir die dort abzuleitenden Resultate vorwegnehmen. — Zunächst wollen wir die Betrachtungen dadurch vereinfachen, daß wir annehmen, daß die Lichtquelle eine unendlich lange Linie ist, welche parallel zur y-Achse liegt. Ebenfalls soll der Rand des ebenen Beugungsschirmes parallel zur y-Achse liegen, wir wollen ihn direkt als y-Achse wählen, die positive x-Achse soll im Beugungsschirm verlaufen, die positive z-Achse sei von der Lichtquelle abgewandt. (Vgl. Figur 68.) — In diesem Falle kann s offenbar nicht mehr von der Koordinate y abhängen, die obige Differentialgleichung vereinfacht sich daher zu

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right). \tag{48}$$

Den Schirm setzen wir voraus als unendlich dünn und unendlich stark absorbierend. Es kann dann kein Licht durch ihn hindurchgehen, er reflektiert aber vollkommen, wie im II. Abschnitt gezeigt werden wird; eine sehr dünne, hochpolierte Silber-

1) A. Sommerfeld, Math. Annalen, Bd. 47, S. 317, 1895.

2) Da in der Natur kein absolut vollkommen schwarzer Schirm (vgl. S. 193) existiert, entsteht die Frage, wie sich die Beugung an natürlichen, mit endlichem Leitvermögen und Dielektrizitätskonstante ausgestatteten Schirmen verhält. Vgl. hierzu Rubens u. Du Bois, Verhandl. D. Phys. Ges. **13**, S. 431, 1911 und Schäfer und Reiche, Ann. d. Phys. **32**, S. 577, 1910.

schicht würde etwa unserem Schirm entsprechen. Der Schirm entspricht also nicht dem Begriff: „vollkommen schwarz“,[1]) sondern er ist vollkommen blank. Die Grenzbedingung an einem solchen Schirm lautet:

$s = 0$, falls das einfallende Licht senkrecht zur Schirmkante polarisiert ist, (49)

$\frac{\partial s}{\partial z} = 0$, falls das Licht parallel zur Schirmkante polarisiert ist[2]). (50)

Die Bedeutung dieser Bezeichnungen und des Wortes „Polarisation“ soll erst im nächsten Kapitel erörtert werden. Hier genügt es, zu wissen, daß die Differentialgleichung (48) entweder unter Rücksicht auf die Randbedingung (49), oder (50) zu integrieren ist. Die Randbedingungen gelten an der Oberfläche des Schirmes, d. h. für $z = 0$, $x > 0$, d. h. für $\varphi = 0$, bezw. $\varphi = 2\pi$, wenn man Polarkoordinaten einführt durch die Gleichungen:

$$x = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi. \quad (51)$$

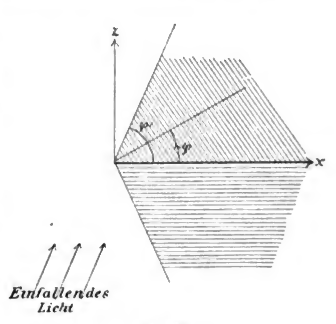


Fig. 68.

Wenn man die Differentialgleichung (48) auf diese Polarkoordinaten transformiert, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} \right). \quad (52)$$

1) Ein vollkommen schwarzer Schirm, der kein Licht durchläßt, aber auch kein Licht reflektiert, ist nur durch einen Körper zu realisieren, dessen Brechungsindex nach seiner Oberfläche zu stetig in den Wert des Brechungsindex der Umgebung übergeht und dessen Absorptionsindex nach der Oberfläche zu stetig in den Wert Null übergeht. Jede Unstetigkeit in den optischen Eigenschaften eines Mediums bewirkt notwendig Reflexion des Lichtes. Daher ist überhaupt kein ideal schwarzer Schirm als scharf begrenzter, dünner Körper denkbar, für den man gewisse Grenzbedingungen aufstellen könnte. — Über die Ausdehnung der Sommerfeldschen Behandlung der Beugung auf einen vollkommen schwarzen Schirm vgl. W. Voigt, Compend. d. theoret. Phys. II, S. 768.

2) Wie später bei Besprechung der elektromagnetischen Theorie erörtert werden wird, hat s in beiden Grenzbedingungen nicht dieselbe Bedeutung: in

Eine Lösung dieser Differentialgleichung und der Grenzbedingung (49), bezw. (50), welche dem Falle entspricht, daß die Lichtquelle im Unendlichen liegt und ihre Strahlen den Winkel φ' mit der x-Achse bilden (vgl. Figur 68) ist nun:

$$(53) \qquad s = A \cdot \frac{1+i}{2} \cdot e^{i\,2\pi\frac{t}{T}} \left\{ e^{-i\gamma} \cdot \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}} dv \mp e^{-i\gamma'} \cdot \int_{-\infty}^{\sigma'} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}} dv \right\},$$

wobei ist:

$$(54) \qquad \gamma = \frac{2\pi r}{\lambda} \cos(\varphi - \varphi'), \quad \gamma' = \frac{2\pi r}{\lambda} \cos(\varphi + \varphi')$$

$$(55) \qquad \sigma = \sqrt{\frac{8r}{\lambda}} \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi'), \quad \sigma' = -\sqrt{\frac{8r}{\lambda}} \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi').$$

In (53) gilt das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem die Grenzbedingung (49) oder (50) erfüllt werden soll. Der Buchstabe i bedeutet dabei die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$. Die Lösung von s tritt also zunächst als komplexe Größe auf. Um ihre physikalische Bedeutung zu geben, braucht man unter s nur den reellen Teil der komplexen Größe zu verstehen. Wenn wir also z. B. den Ansatz machen

$$(56) \qquad s = (A + Bi)\, e^{i\,2\pi\frac{t}{T}},$$

so ist die physikalische Bedeutung von s der reelle Teil, d. h.

$$(57) \qquad s = A \cos 2\pi \frac{t}{T} - B \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die Intensität des Lichtes würde in diesem Falle sein (vgl. den analogen Schluß von S. 177):

$$(58) \qquad J = A^2 + B^2.$$

Wir können dieses Resultat aus (56) direkt ableiten, wenn wir s mit seiner konjugiert komplexen Größe multiplizieren, d. h. mit derjenigen Größe, welche sich nur durch das Vorzeichen von

(49) bedeutet s die der Schirmkante parallel schwingende elektrische Kraft, in (50) die der Schirmkante parallel schwingende magnetische Kraft. Die Lichtintensität berechnet sich aber in beiden Fällen in gleicher Weise, wenigstens auf der von der Lichtquelle abgewendeten Schirmseite.

i von der rechten Seite von (56) unterscheidet, also mit $(A - Bi)$ $e^{-i2\pi\frac{t}{T}}$. Dieses Resultat mag auch für später bemerkt werden. Es lautet also: Wenn die Lichterregung s in Form einer komplexen Größe dargestellt wird (wobei s selbst nur die Bedeutung des reellen Teiles jener komplexen Größe besitzt), so wird die Lichtintensität durch Multiplikation mit der konjugiert komplexen Größe erhalten.

Daß die Formeln (53), (54), (55) wirklich eine Lösung der Differentialgleichung (52) sind, erkennt man durch Bildung der Differentialquotienten nach r und φ.[1]) Ferner wird durch das obere Vorzeichen in (53) die Grenzbedingung (49) erfüllt, da für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, $\gamma = \gamma'$, $\sigma = \sigma'$ wird. Ferner wird durch das untere Vorzeichen in (53) die Grenzbedingung (50) erfüllt, da $\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial \varphi}$ ist für $\varphi = 0$, und da die Differentialquotienten nach φ von den beiden Summanden, die in der Klammer von (53) enthalten sind, entgegengesetzte Werte für $\varphi = 0$ oder $\varphi = 2\pi$ annehmen. Daß außerdem die Lösung (53) tatsächlich den angenommenen ebenen Wellen einer in der vorgeschriebenen Richtung liegenden unendlich entfernten Lichtquelle Q entspricht, werden wir bei näherer Diskussion einsehen. Zunächst mag aber noch ein wichtiger Punkt erörtert werden. Wenn wir einen beliebigen Punkt P_0 in der xz-Ebene, für den wir s berechnen wollen, eine volle Umkreisung um die Schirmkante (bei festem Abstande r von ihr) machen lassen, so ist φ um 2π gewachsen. Es nimmt dann s nicht den ursprünglichen Wert wiederum an, sondern einen anderen, weil σ und σ' wegen der Faktoren $\sin\frac{1}{2}(\varphi \mp \varphi')$ bei Änderung von φ um 2π ihr Vorzeichen gewechselt haben. s ist daher nicht eine eindeutige Funktion des Ortes. Der physikalische Sinn erfordert aber Eindeutigkeit. Wir können dieselbe nun sofort erhalten, wenn wir bei der Veränderung von φ nie durch den Schirm selbst hindurchgehen. Dies wollen wir festhalten, indem φ nur zwischen 0 (Schattenseite des Schirmes) und 2π (Lichtseite des Schirmes) variieren soll.

Es sind nun drei Räume zu unterscheiden, in denen sich s wesentlich verschieden verhält:

1. **Der Schattenraum:** $0 < \varphi < \varphi'$. Nach (55) sind σ und σ' negativ. Für unendlich großes r wird daher $s = 0$.

1) Der Weg, auf welchem Sommerfeld in konsequenter Weise zu dieser Lösung geführt wurde, kann hier nicht dargestellt werden, da dies zuviel Hilfsmittel beanspruchen würde.

2. Der unbeschattete Raum $\varphi' < \varphi < 2\pi - \varphi'$. Es ist σ positiv, σ' negativ. Da nach Formel (29) auf S. 180

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}} dv = 2\int_{0}^{\infty} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}} dv = 1 - i, \tag{59}$$

so ist daher für unendlich großes r:

$$s = A\, e^{i\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\cos(\varphi - \varphi')\right)}.$$

Der reelle Teil hiervon entspricht ebenen Wellen der Amplitude A, deren Fortpflanzungsrichtung den Winkel φ' mit der x-Achse macht. Die Lösung entspricht also tatsächlich für sehr große r dem einfallenden Lichte einer in der Richtung φ' liegenden, unendlich entfernten Lichtquelle Q.

3. Der Reflexionsraum $2\pi - \varphi' < \varphi < 2\pi$. Es ist σ und σ' positiv. Für unendlich großes r wird daher

$$s = A \cdot e^{i\, 2\pi \frac{t}{T}} \left\{ e^{-i\frac{2\pi r}{\lambda}\cos(\varphi - \varphi')} \mp e^{-i\frac{2\pi r}{\lambda}\cos(\varphi + \varphi')} \right\}.$$

Der reelle Teil hiervon entspricht der Superposition der einfallenden ebenen Wellen und der nach dem Reflexionsgesetz am Schirm reflektierten ebenen Wellen. Die reflektierte Amplitude ist dem absoluten Betrage nach gleich der einfallenden Amplitude.

In anschaulicher Form erhalten wir die Lösung (53), wenn wir wiederum die Kurve der Figur (63) benutzen. Denn nach S. 184 ist

$$\int_{-\infty}^{\sigma} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}} dv = \xi - i\eta, \tag{60}$$

wobei ξ und η die Projektionen der Strecke $(F'E)$ auf die ξ- und η-Achse sind, und wobei E den dem Parameter σ entsprechenden Punkt der Kurve bedeutet. — Analog ist

$$\int_{-\infty}^{\sigma'} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}} dv = \xi' - i\eta', \tag{61}$$

wobei ξ' und η' die Projektionen der Strecke $(F'E')$ sind, und E' ein Punkt der Kurve ist, welcher dem Parameter σ' entspricht.

Betrachten wir zunächst die von der Lichtquelle abgewendete Seite des Schirmes, d. h. $0 < \varphi < \pi$, so bemerken wir, daß σ' wegen des kleinen Nenners λ (Wellenlänge) beständig sehr groß und negativ ist, falls man r nicht sehr klein wählt. Für einigermaßen große r kann man daher nach (61) sehr annähernd $\xi' = \eta' = 0$ setzen, und erhält dann aus (53) und (60):

$$s = A \frac{1+i}{2} e^{i 2\pi \frac{t}{T}} \cdot e^{-i\gamma} (\xi - i\eta),$$

und nach dem Lehrsatze (58) für die Lichtintensität:

$$J = \frac{A^2}{2} \cdot (F'E)^2. \tag{62}$$

Zu nahezu derselben Formel würden wir aber auch nach der früheren Näherungsrechnung in § 4 gelangt sein. Wenn nämlich die Lichtquelle unendlich entfernt ist, so würde die dortige Formel (38) ergeben

$$J = \frac{A^2}{2} (-\infty, v')^2, \tag{63}$$

und nach (39): $v' = d \sqrt{\frac{2}{\lambda b}}$.

Die Bedeutung von d ist aus Figur 64 zu entnehmen. Führt man die Entfernung r des Punktes P_0 von der Schirmkante ein, so ist $d = r \sin (\varphi - \varphi')$, wenn $\varphi - \varphi'$ der Beugungswinkel ist, d. h. die Neigung der gebeugten Strahlen gegen die einfallenden Strahlen. Da in der Nähe der Schattengrenze $b = r$ zu setzen ist, so folgt $v' = \sqrt{\frac{2r}{\lambda}} \sin (\varphi - \varphi')$; denselben Wert besitzt σ nach (55) für genügend kleine Beugungswinkel, d. h. der Punkt E in Formel (62) entspricht dem Parameter v' in Formel (63). Beide Formeln führen daher zu demselben Werte von J in der Nähe der Schattengrenze. In größerem Abstand von ihr weicht allerdings die strengere Formel (62) ab von derjenigen, die sich nach dem früheren Näherungsverfahren ergeben würde. — Der früher gezogene Schluß, daß nur außerhalb des Schattenraumes Beugungsfransen auftreten, gilt natürlich ebenso hier, nach der strengeren Betrachtung.

Auf der der Lichtquelle zugewendeten Seite des Schirmes $\pi < \varphi < 2\pi$, nimmt innerhalb des Reflexionsraumes $(\varphi > 2\pi - \varphi')$ auch das Integral (61) bedeutende Werte an.

Will man daher eine allgemein gültige strenge Formel für die Lichtintensität ableiten, so darf man das Integral (61) nicht gegen das Integral (60) vernachlässigen. Dies ist sowohl für den Reflexionsraum als auch für die anderen Räume bei sehr kleinem r oder sehr großen Beugungswinkeln $\varphi - \varphi'$ geboten.

Man erhält diese strenge Formel für die Lichtintensität J, indem man die rechte Seite von (53) mit ihrem konjugiert komplexen Ausdrucke multipliziert. Durch Benutzung der Bezeichnungen (60) und (61) erhält man dadurch folgende **völlig strenge Formel:**

$$J = \frac{A^2}{2}\left\{ \xi^2 + \eta^2 + \xi'^2 + \eta'^2 \mp 2\cos(\gamma - \gamma')\cdot(\xi\xi' + \eta\eta') \right.$$
$$\left. \pm 2\sin(\gamma - \gamma')\cdot(\eta\xi' - \eta'\xi) \right\},$$

oder

$$(64)\quad J = \frac{A^2}{2}\left\{ (F'E)^2 + (F'E')^2 \mp 2\,(F'E)\,(F'E')\cos(\gamma - \gamma' + \chi) \right\},$$

wobei χ den Winkel bezeichnet, welchen die Strecken $(F'E)$ und $(F'E')$ miteinander bilden. χ ist positiv gerechnet, wenn die Drehung, welche auf dem kürzesten Wege $F'E$ in $F'E'$ überführt, in demselben Sinne erfolgt wie eine Drehung der η-Achse zur ξ-Achse. — Nach (54) ist

$$(65)\qquad \gamma - \gamma' = \frac{4\pi r}{\lambda}\sin\varphi\,\sin\varphi'.$$

Nach (64) ist J proportional zu dem Quadrat der geometrischen Differenz bezw. Summe zweier Strecken der Länge $(F'E)$ und $(F'E')$, welche den Winkel $\chi + \gamma - \gamma'$ miteinander bilden. Die geometrische Differenz ist zu bilden, falls das einfallende Licht senkrecht zur Schirmkante polarisiert ist, die geometrische Summe, falls es parallel zur Schirmkante polarisiert ist.

Den Ausdruck (64) kann man noch wesentlich vereinfachen, wenn die Lichtintensität J nicht in der Nähe des geometrischen Schattens berechnet werden soll, d. h. wenn nicht φ sehr nahe gleich φ' ist.

Im **Schattenraume** ist dann nämlich σ und σ' sehr groß negativ, wir können daher nach den Betrachtungen, welche in § 3 an die Gestalt der Kurve der Figur (63) angeknüpft sind, $F'E$ gleich dem Krümmungsradius ϱ der Kurve im Punkte E, $F'E'$ gleich dem Krümmungsradius im Punkte E' setzen, und den Winkel χ, welchen diese beiden Strecken miteinander bilden,

gleich dem Winkel, welchen die in den Punkten E und E' an die Kurve gelegten Tangenten miteinander einschließen. Nach den dortigen Formeln (18) und (19) der S. 178, 179 ist also zu setzen:

$$F'E = \frac{1}{\pi\sigma},\quad F'E' = \frac{1}{\pi\sigma'},\quad \chi = \frac{\pi}{2}(\sigma^2 - \sigma'^2).$$

Unter Rücksicht auf (55) und (65) wird nun $\gamma - \gamma' + \chi = 0$, daher nach (64):

$$J = \frac{A^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{\sigma} \mp \frac{1}{\sigma'}\right)^2. \tag{66}$$

Setzt man hierin die Werte (55) für σ und σ' ein, so gilt für das obere Vorzeichen, d. h. falls das einfallende Licht senkrecht zur Schirmkante polarisiert ist:

$$(\perp)\ J = \frac{A^2}{\pi^2}\cdot\frac{\lambda}{r}\cdot\frac{\sin^2 {}^1\!/_2\,\varphi \cdot \cos^2 {}^1\!/_2\,\varphi'}{(\cos\varphi - \cos\varphi')^2} \tag{67}$$

dagegen für das untere Vorzeichen, d. h. wenn das einfallende Licht parallel zur Schirmkante polarisiert ist:

$$(\parallel)\ J = \frac{A^2}{\pi^2}\cdot\frac{\lambda}{r}\cdot\frac{\cos^2 {}^1\!/_2\,\varphi \cdot \sin^2 {}^1\!/_2\,\varphi'}{(\cos\varphi - \cos\varphi')^2}. \tag{68}$$

Diese Formeln für den Schattenraum gelten also nur, falls λ/r sehr klein und φ nicht in unmittelbare Nähe von φ', d. h. an die Grenze des Schattenraumes, kommt. Es geht aus den Formeln hervor, daß am Schirm selbst (für $\varphi = 0$) das Licht vollständig parallel zur Schirmkante polarisiert ist, daß ferner für wachsende φ die Intensität J nach beiden Formeln beständig zunimmt und dabei stets die Intensität (67) des senkrecht zur Schirmkante polarisierten Lichtes kleiner ist als die Intensität (68) des parallel zur Kante polarisierten Lichtes. Der Unterschied zwischen beiden Intensitäten nimmt beständig ab bei Annäherung an die Grenze des geometrischen Schattens.

Die Lichtbeugung am geradlinigen Rande eines Schirmes bei sehr großen Beugungswinkeln ist von Gouy[1]), W. Wien[2]) und Maey[3]) beobachtet worden. Bei abgerundetem Rande des Schirmes ergaben sich Färbungen, welche von der Natur des Schirmes abhingen. Die hier entwickelte Theorie ergibt, daß unabhängig von der Natur des Schirmes die Farben größerer Wellenlänge im stark gebeugten Lichte überwiegen müßten. Um eine Abhängigkeit von

1) Gouy, Ann. d. Chim. et de Phys. [6], 8. S. 145, 1886.
2) W. Wien, Wied. Ann. 28, S. 117, 1886.
3) E. Maey, Wied. Ann. 49, S. 69, 1893.

der Natur des Schirmes zu ergeben, müßten die Grenzbedingungen (49) und (50) die optischen Konstanten des Schirmes enthalten.[1])

Außerhalb des Schattenraumes (und außerhalb des Reflexionsraumes) ist in genügendem Abstande von der Grenze des Schattenraumes und des Reflexionsraumes σ sehr groß positiv, σ' sehr groß negativ. Daher ist $F'E'$ sehr klein und hat den Wert (abgesehen vom Vorzeichen) $1:\pi\sigma'$, während $F'E$ annähernd gleich $\sqrt{2}$ ist. Ferner ist, da $F'E$ annähernd den Winkel $\frac{1}{4}\pi$ mit der ξ-Achse einschließt: $\chi = -\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\sigma'^2$, so daß wird

$$\chi + \gamma - \gamma' = -\tfrac{1}{4}\pi - \frac{4\pi r}{\lambda} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi').$$

Mit Vernachlässigung von $(F'E')^2$ erhält man daher aus (64):

$$J = A^2 \left\{ 1 \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{4r}} \cdot \frac{\cos\left[\frac{1}{4}\pi + \frac{4\pi r}{\lambda}\sin^2 \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\right]}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')} \right\}. \tag{69}$$

Bei veränderlichem φ treten also Beugungsfransen auf, die allerdings nur wenig deutlich sind. Die Fransen werden um so deutlicher, je näher φ an $2\pi - \varphi'$ heranrückt. Dann gilt aber schließlich die Formel (69) nicht mehr, und dicht am Übergang zum Reflexionsraum muß das Resultat aus (64) und der Kurve der Figur (63) abgelesen werden, da nun $F'E'$ größer wird.

Im Reflexionsraum in genügendem Abstande von seiner Grenze $\varphi = 2\pi - \varphi'$ ist sowohl $F'E$ als $F'E'$ annähernd gleich $\sqrt{2}$, $\chi = 0$. Daher ergibt sich aus (64) und (65) periodisch wechselnd volle Dunkelheit oder die vierfache Intensität des einfallenden Lichtes, je nachdem $\frac{2r}{\lambda} \sin\varphi \sin\varphi'$ eine ganze Zahl oder die Hälfte einer ungeraden Zahl ist. Wir stoßen so auf die oben S. 148 studierte Erscheinung der stehenden Wellen, die allemal eintritt, wenn die einfallenden Wellen sich über die reflektierten superponieren. Hier ist nun aber der in Anm. 2 auf S. 193 angedeutete Unterschied in der Bedeutung von s je nach dem Polarisationszustande des einfallenden Lichtes zu beachten. Es soll davon in einem späteren Kapitel noch die Rede sein.

---

1) Die Polarisation des gebeugten Lichtes in komplizierteren Fällen ist theoretisch schwierig zu behandeln. Literaturzusammenstellung hierüber vgl. in Winkelm. Hdb. d. Phys. VI (Optik), S. 1111—1113 (Autor F. Pockels).

Auf die Sommerfeldsche Lösung des Beugungsproblems für eine vollkommen reflektierende Halbebene hat Schwarzschild[1]) eine Methode gegründet, um die Beugung durch einen geraden Spalt in einem unbegrenzt ebenen, vollkommen reflektierenden Schirm durch sukzessive Annäherung zu behandeln. Die Lage der Maxima und Minima ändert sich nach der strengen Theorie nicht merklich gegenüber der hier im § 5 gegebenen annähernden Berechnung, auch das Intensitätsgesetz der Maxima bleibt (bei nicht zu großen Beugungswinkeln) nach beiden Behandlungen das gleiche, das der Minima aber nicht. Bei einfallendem natürlichen Licht muß das durch einen gegen die Wellenlänge breiten Spalt gebeugte Licht auch unter beträchtlichen Beugungswinkeln unpolarisiert sein, dagegen muß einfallendes linear polarisiertes Licht zu elliptisch polarisiertem werden.

8. Frauenhofersche Beugungserscheinungen. Wie oben S. 177 erwähnt wurde, bezeichnet man als Frauenhofersche Beugungserscheinungen diejenigen, bei denen Lichtquelle Q und betrachteter Punkt P_0 im Unendlichen liegen. Man kann diese Erscheinungen beobachten, wenn eine punktförmige Lichtquelle Q in den Brennpunkt einer Sammellinse (Kollimatorlinse) gestellt wird, da dann die austretenden Strahlen parallel sind, und wenn man hinter dem Beugungsschirm ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr benutzt.

Wir gehen von den Entwickelungen des § 1 aus, d. h. vom Huygensschen Prinzip. Die Behandlung ist also nicht eine völlig strenge wie im vorhergehenden Paragraphen. Wie wir aber dort sahen, ergibt das Huygenssche Prinzip bei nicht sehr großen Beugungswinkeln eine sehr gute Annäherung. Nach den Formeln (8) und (9) auf S. 176, 177 ist für $\varrho_1 = \varrho_0 = \infty$ zu setzen:

$$f(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda}\left\{x(\alpha_1 + \alpha_0) + y(\beta_1 + \beta_0)\right\}, \tag{70}$$

und dabei bezeichnen α_1, β_1, α_0, β_0 die Richtungskosinus, welche die Richtungen vom Koordinatenanfang nach der Lichtquelle Q und nach dem betrachteten Punkte P_0 mit der x- und y-Achse bilden. (Vgl. Fig. 62 auf S. 175.)

1) K. Schwarzschild, Math. Ann. 55, S. 177, 1902. — Vgl. auch Winkelmann, Hdb. VI, S. 1106. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **23**, S. 875, 1907; **25**, S. 99, 1908; **26**, S. 1031, 1908.

Nach den Formeln (11) und (12) der S. 177 ist daher mit Benutzung der Abkürzungen:

$$(71)\qquad \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_1 + \alpha_0) = \mu, \qquad \frac{2\pi}{\lambda}(\beta_1 + \beta_0) = \nu$$

die Lichtintensität im Punkte P_0:

$$(72)\qquad J = A'^2 (C^2 + S^2),$$

wobei

$$(73)\qquad C = \int \cos(\mu x + \nu y)\, d\sigma, \qquad S = \int \sin(\mu x + \nu y)\, d\sigma,$$

und die Integration über die Öffnung im Schirm zu erstrecken ist.

Die Konstante A' hat eine anschauliche Bedeutung, wenn wir die Lichtintensität J' einführen, welche hinter dem Beugungsschirm beobachtet wird, falls wir das Fernrohr in die Richtung der einfallenden Strahlen bringen. Dann ist nämlich für alle Stellen des Beugungsschirmes, die nicht unendlich weit vom Koordinatenanfang entfernt liegen, $\mu = \nu = 0$, so daß die Beziehung besteht:

$$J' = A'^2 \cdot \sigma^2,$$

falls mit σ die Größe der ganzen beugenden Öffnung verstanden wird. Daher folgt für eine beliebige Richtung des Fernrohrs:

$$(74)\qquad J = \frac{J'}{\sigma^2}(C^2 + S^2).$$

9. Beugung durch ein Rechteck. Wenn die Schirmöffnung ein Rechteck ist, lassen sich die Integrale (73) am einfachsten berechnen. Legen wir den Koordinatenanfang in den Mittelpunkt des Rechtecks, die Koordinatenachsen parallel zu den Rechteckseiten, und hat das Reckteck die Seitenlängen a (parallel zur x-Achse) und b (parallel zur y-Achse), so wird

$$C = \frac{4}{\mu\nu} \sin\frac{\mu a}{2} \sin\frac{\nu b}{2}, \quad S = 0,$$

daher nach (74), da $\sigma = ab$ ist:

$$(75)\qquad J = J' \cdot \left[\frac{\sin\frac{\mu a}{2}}{\frac{\mu a}{2}}\right]^2 \cdot \left[\frac{\sin\frac{\nu b}{2}}{\frac{\nu b}{2}}\right]^2.$$

Es tritt daher völlige Dunkelheit ein in den Richtungen, welche dadurch bestimmt sind, daß entweder μa oder νb ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.

Wenn das Licht der Quelle Q senkrecht auf den Beugungsschirm fällt, so ist $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Die optische Achse des beobachtenden Fernrohrs sei parallel dem einfallenden Licht gerichtet, d. h. ebenfalls senkrecht zum Beugungsschirm. Die Lichtintensität J in der durch α_0 und β_0 bestimmten Richtung wird dann beobachtet in einem Punkte P der Brennebene des Fernrohrobjektivs, welcher die Koordinaten:

$$x' = f\alpha_0, \quad y' = f\beta_0 \qquad (76)$$



Fig. 69.

besitzt in einem Koordinatensystem $x'y'$, welches den Brennpunkt F des Objektivs zum Anfang hat und den Seiten des beugenden Rechtecks parallel ist. Es bedeutet f die Brennweite des Objektivs. — In (76) ist vorausgesetzt, daß α_0 und β_0 kleine Größen sind, d. h. daß der Beugungswinkel nicht erheblich ist.

Nach (71) ist nun:

$$\mu = \frac{2\pi x'}{\lambda f}, \quad \nu = \frac{2\pi y'}{\lambda f}. \qquad (77)$$

Es tritt daher völlige Dunkelheit ein für

$$\mu a = \pm 2h\pi, \text{ d. h. } x' = \pm h\frac{\lambda f}{a}, \; h = 1, 2, 3 \ldots$$

und für

$$\nu b = \pm 2h\pi, \text{ d. h. } y' = \pm k\frac{\lambda f}{b}, \; k = 1, 2, 3 \ldots$$

In der Brennebene des Objektivs entsteht daher (bei homogener Beleuchtung) eine von schwarzen Linien durchzogene Figur, wie sie in beistehender Zeichnung angedeutet ist. Die Linien haben konstanten Abstand voneinander, nur in der Mitte der Beugungsfigur ist dieser Abstand der doppelte. — Oben links ist die beugende Öffnung O gezeichnet. Die Beugungsfransen bilden daher Rechtecke, welche dem beugenden Rechteck ähnlich sind, aber invers zu ihm liegen.

Im Brennpunkt F des Objektivs erreicht die Intensität J den größten Wert, $J = J'$. Für $\mu = 0$ ist nämlich der Grenzwert des Quotienten $\sin {}^{\mu a}/_2 : {}^{\mu a}/_2 = 1$. — Andere, aber kleinere Maxima nimmt J annähernd in den Mittelpunkten der von den Beugungsfransen der Figur 69 umgrenzten Rechtecke an. Diesen Mittelpunkten entsprechen die Werte:

$$\mu a = \pi\,(2h+1),\ \nu b = \pi\,(2k+1),\ h,\ k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots.$$

Auf der x'-Achse ist aber für die Mittelpunkte jener Rechtecke:

$$\mu a = \pi\,(2h+1),\ \nu = 0,\ h = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

Daher sind die Maxima auf der x'-Achse (oder y'-Achse):

$$J_1 = J' \frac{4}{\pi^2 (2h+1)^2},$$

während sie in der Mitte eines beliebigen anderen Rechtecks, für welches weder x' noch y' verschwindet, den Wert haben:

$$J_2 = J' \frac{16 : \pi^4}{(2h+1)^2\,(2k+1)^2}.$$

Die J_2 sind daher wesentlich kleiner als die J_1, so daß die ganze Beugungsfigur, roh betrachtet, den Eindruck eines nach der Mitte zu heller werdenden Kreuzes macht, dessen Balken den Seiten der Beugungsöffnung parallel liegen. (In Figur 69 ist die Lichtverteilung durch die Schraffierung angedeutet.)

Den Fall, daß das Licht unter schiefem Winkel auf den Beugungsschirm auffällt, hat Raman behandelt (Phil. Mag. January 1909, May 1911). Er kommt, wie hier nur kurz erwähnt sei, zu dem Schluß, daß die Huygensschen Elementarwellen von halbkugelförmiger Gestalt in irgend einem Punkte der Einfallsebene eine Amplitude haben, die proportional ist dem Cosinus des Winkels zwischen der Verbindungslinie des Punktes mit dem betreffenden Element der beugenden Öffnung und seiner Normale.

10. Beugung durch ein schiefwinkliges Parallelogramm. Diesen Fall kann man sofort aus dem vorigen ableiten auf Grund der Bemerkung, daß nach (73) die Integrale C und S und daher auch die Lichtintensität J ungeändert bleibt, wenn man die Koordinaten x, y der beugenden Öffnung mit den Faktoren p, q multipliziert, während man gleichzeitig die Größen μ und ν, d. h. die Koordinaten x', y' der Beugungsfigur, durch die gleichen Faktoren p, q dividiert. Geht man von einem rechtwinkligen beugenden Parallelogramm aus, dessen Seiten den Koordinatenachsen $x\,y$ nicht

parallel sind, so erhält man durch jene Anwendung zweier Faktoren p, q ein schiefwinkliges Parallelogramm als Beugungsöffnung, während die Beugungsfransen ebenfalls schiefwinklige Parallelogramme einschließen; die Beugungsfransen verlaufen senkrecht zu den Seiten des beugenden Parallelogramms.

11. Beugung durch einen Spalt. Ein Spalt läßt sich auffassen als ein Rechteck, dessen eine Seite (b) sehr groß ist. Die Beugungsfigur reduziert sich daher auf einen schmalen Lichtstreifen in der x'-Achse, der von Dunkelflecken durchschnitten ist, entsprechend der Formel:

$$J = J' \left[\frac{\sin \frac{\mu a}{2}}{\frac{\mu a}{2}} \right]^2 . \tag{78}$$

Dabei ist, falls das Licht senkrecht gegen die Ebene des Spaltes einfällt:

$$\mu = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi, \tag{78'}$$

falls φ den Beugungswinkel (Winkel der gebeugten Strahlen gegen die einfallenden Strahlen) bezeichnet. Wenn die Lichtquelle Q eine Lichtlinie ist, die zum Spalt parallel ist, so wird auch die Beugungsfigur ein breites Lichtband, das von parallelen Fransen durchschnitten ist an den Stellen $\mu a = 2h\pi$. Bedeutendere Lichtintensität findet sich nur zwischen den Grenzen $\mu a = \pm 2\pi$. — Die Lage der dunklen Fransen hätte man auch aus folgender Überlegung direkt ableiten können:

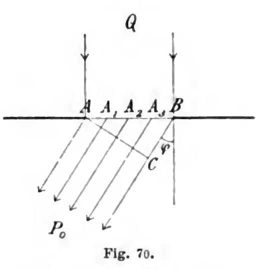


Fig. 70.

Um die Intensität für einen beliebigen Beugungswinkel (vgl. Figur 70) zu finden, teile man den Beugungsspalt AB in derartige Streifen AA_1, A_1A_2, A_2A_3 etc., daß die Lichtwege von A, A_1, A_2 ... nach dem unendlich fernen Punkte P_0 um je $\frac{1}{2}\lambda$ voneinander verschieden sind. Die Wirkung je zweier benachbarter Zonen heben sich dann auf. Es besteht daher Dunkelheit, wenn AB in eine gerade Anzahl solcher Zonen geteilt werden kann, d. h. wenn im rechtwinkligen Dreieck ACB die Kathete BC gleich $h \cdot \lambda$ ist, wo

$h = 1, 2, 3 \ldots$ Da nun $BC = a \sin \varphi$, falls a die Spaltbreite ist, so tritt Dunkelheit ein für die Beugungswinkel

$$\sin \varphi = \pm h \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot \tag{79}$$

Dies ist aber (nach (78')) identisch mit der Bedingung $\mu a = 2h\pi$. Hieraus ergibt sich, daß für $a < \lambda$ für keinen Beugungswinkel Dunkelheit eintritt, es besteht daher Diffusion des Lichtes (vgl. die analogen Betrachtungen oben auf S. 188).

Fällt weißes Licht ein und bezeichnet man die Intensität J', welche einer bestimmten Farbe oder Wellenlänge λ angehört, mit J_λ', setzt ferner zur Abkürzung $\pi a \sin \varphi = a'$, so ist für einen bestimmten Wert a' die ganze Lichtintensität:

$$J = \Sigma J_\lambda' \cdot \frac{\sin^2 a'/\lambda}{(a'/\lambda)^2} \cdot \tag{79'}$$

Wenn a' nicht sehr klein ist, z. B. falls a' etwa bei $3\pi\lambda$ liegt, so ist in (79') $\sin {a'}/{\lambda}$ von λ viel stärker abhängig als ${a'}/{\lambda}$. Betrachtet man ${a'}/{\lambda}$ annähernd als konstant, so geht (79') in eine Form über, wie sie die an einem dünnen Blättchen reflektierte Lichtintensität besitzt (vgl. II. Abschnitt, Kapitel II, § 11). Annähernd treten also in einiger Distanz vom Zentralfelde Newtons Farben dünner Blättchen auf.

12. Beliebige Gestalt der Beugungsöffnung. Bei beliebiger unsymmetrischer Gestalt der Beugungsöffnung sind beide Integrale C und S von Null verschieden. Die Nullstellen der Intensität im Beugungsbilde sind durch die beiden, gleichzeitig zu erfüllenden Bedingungen $C = 0$, $S = 0$ charakterisiert. Im allgemeinen sind dies daher diskrete Punkte, nicht, wie beim Reckteck, zusammenhängende Linien. Betreffs der Durchführung der Theorie für spezielle Gestalten der Beugungsöffnung vgl. man Schwerd, Die Beugungserscheinungen, Mannheim 1835.

13. Mehrere gleichgestaltete und gleichorientierte Beugungsöffnungen. Die Koordinaten eines Punktes einer Beugungsöffnung in bezug auf einen in jeder Öffnung gleich liegenden Punkt A seien mit ξ und η bezeichnet. Die Koordinaten der Punkte A in bezug auf das beliebige im Beugungsschirm liegende Koordinatensystem x, y seien $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ etc. Dann ist also für einen Punkt irgend einer Beugungsöffnung, z. B. der dritten, zu setzen

$$x = x_3 + \xi, \quad y = y_3 + \eta,$$

und nach (73) wird:

$$C = \sum_i \int \cos\left[\mu (x_i + \xi) + \nu (y_i + \eta)\right] d\xi d\eta,$$
$$S = \sum_i \int \sin\left[\mu (x_i + \xi) + \nu (y_i + \eta)\right] d\xi d\eta. \tag{80}$$

Die ξ und η variieren bei allen Beugungsöffnungen in den gleichen Grenzen. Bezeichnet man daher die Beugungsintegrale C und S, wenn sie nur über eine einzige Beugungsöffnung erstreckt werden, durch c und s, d. h. setzt man

$$c = \int \cos(\mu\xi + \nu\eta)\, d\xi d\eta, \quad s = \int \sin(\mu\xi + \nu\eta)\, d\xi d\eta, \tag{81}$$

und setzt man zur Abkürzung:

$$c' = \sum_i \cos(\mu x_i + \nu y_i), \quad s' = \sum_i \sin(\mu x_i + \nu y_i), \tag{82}$$

so wird nach (80):

$$C = c' \cdot c - s' \cdot s, \quad S = s' \cdot c + c' \cdot s,$$

daher nach (72):

$$J = A'^2 (c'^2 + s'^2)(c^2 + s^2). \tag{83}$$

Aus dieser Formel ersieht man, daß diejenigen Stellen des Beugungsbildes, welche Dunkelstellen für eine einzige Beugungsöffnung sind, auch in diesem Falle bei mehreren gleichliegenden Beugungsöffnungen Dunkelstellen bleiben. Dies ist auch direkt leicht abzuleiten. Die Lichtstärke wird für eine beliebige Stelle im Verhältnis $c'^2 + s'^2$ vermehrt im Vergleich zu der Lichtstärke bei einer Öffnung. Dieses Verhältnis $c'^2 + s'^2$ kann sehr verschiedene Werte haben. Es läßt sich schreiben in der Form:

$$c'^2 + s'^2 = \sum_i \cos^2(\mu x_i + \nu y_i) + 2 \sum_{i,k} \cos(\mu x_i + \nu y_i) \cos(\mu x_k + \nu y_k)$$
$$+ \sum_i \sin^2(\mu x_i + \nu y_i) + 2 \sum_{i,k} \sin(\mu x_i + \nu y_i) \sin(\mu x_k + \nu y_k), \tag{84}$$

d. h. $$c'^2 + s'^2 = m + 2 \sum_{i,k} \cos\left[\mu (x_i - x_k) + \nu (y_i - y_k)\right],$$

wobei m die Anzahl der Öffnungen bezeichnet. — Bei ganz unregelmäßiger Anordnung sehr vieler Beugungsöffnungen kommt das zweite Glied der rechten Seite in (84) gegen das erste nicht in Betracht, da die einzelnen Summanden unter dem Zeichen Σ regellos zwischen -1 und $+1$ schwanken. Daher ist die Intensität im Beugungsbilde überall m mal größer als bei einer einzigen Beugungsöffnung. Diese Erscheinung kann

man z. B. studieren, wenn man in ein Staniolblatt mit einer Nadel regellos verteilte, gleich große Löcher stößt (vgl. auch S. 209). Man nimmt ein konzentrisches Ringsystem wahr, welches auch schon ein einziges Loch, nur in weniger intensiver Weise, hervorruft.

Völlig anders werden die Resultate, wenn man regelmäßig verteilte, oder nur wenige Öffnungen hat. Betrachten wir z. B. den Fall zweier Offnungen, setzen wir z. B.

$$x_1 = 0, \; x_2 = d, \; y_1 = y_2 = 0,$$

so wird

$$c'^2 + s'^2 = 4 \cos^2 \frac{\mu d}{2}.$$

Die Beugungsfigur, welche eine einzige Öffnung hervorruft, ist also noch durchzogen von dunkeln Fransen der Gleichung $\mu d = (2h + 1)\pi$, d. h. von Fransen, welche senkrecht zur Verbindungslinie zweier korrespondierender Punkte der Beugungsöffnungen stehen und nach (77) den konstanten relativen Abstand $\lambda f : d$ in der Brennebene des Fernrohr-Objektivs besitzen.

14. Das Babinetsche Theorem. Bevor wir auf den Fall der Gitter, d. h. sehr zahlreicher, regelmäßig verteilter Beugungsöffnungen eingehen, wollen wir zwei komplementäre Beugungsschirme betrachten. Wenn ein Beugungsschirm σ_1 irgend welche Löcher besitzt, und ein anderer Schirm σ_2 gerade die Stellen bedeckt hat, an welchen σ_1 frei ist, während die Stellen in σ_2 frei sind, welche in σ_1 bedeckt sind, so heißen σ_1 und σ_2 komplementäre Beugungsschirme. Die Lichtintensität J_1 bei Anwendung des Schirmes σ_1 ist proportional zu $C_1{}^2 + S_1{}^2$, wobei C_1, S_1 Integrale sind, welche über die freien Öffnungen in σ_1 zu erstrecken sind. Die Lichtintensität J_2 bei Anwendung des Schirmes σ_2 ist proportional zu $C_2{}^2 + S_2{}^2$, wobei die Integrale C_2, S_2 über die freien Öffnungen in σ_2 zu erstrecken wären. Die Lichtintensität J_0 bei ganz fehlendem Beugungsschirme ist daher proportional zu $(C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2$. An einer Stelle des Beobachtungsfeldes, welche einem von Null verschiedenen Beugungswinkel entspricht, ist aber in letzterem Falle $J_0 = 0$, d. h. es ist $C_1 = -C_2$, $S_1 = -S_2$. Daher ist auch $J_1 = J_2$ und wir erhalten den Satz: Bei zwei komplementären Beugungsschirmen ist die Lichtstärke an allen Stellen des Beugungsbildes die gleiche, abgesehen vom Zentralfleck, welcher dem Beugungswinkel Null entspricht. Dies ist das Babinetsche Theorem.

Wir machen eine Anwendung dieses Satzes auf die Beugungsfigur. welche durch unregelmäßig verteilte, gleich große kreisförmige Schirme hervorgebracht wird. Die Beugungsfigur muß dieselbe sein, welche gleich große, unregelmäßig verteilte, kreisförmige Öffnungen hervorrufen. (Vgl. vorige Seite.) Man erhält also ein konzentrisches Ringsystem. Die Erscheinung läßt sich durch Lykopodiumsamen hervorrufen, den man auf eine Glasplatte streut. Auch die Höfe um Sonne und Mond erklären sich durch die Beugungswirkung gleich großer Wassertröpfchen.[1])

15. Beugungsgitter. Ein Beugungsgitter besteht aus sehr vielen parallelen Spalten in konstantem Abstand. In der Bezeichnung des § 13 können wir setzen:

$$x_1 = 0,\ x_2 = d,\ x_3 = 2d,\ x_4 = 3d, \text{ etc.}$$
$$y_1 = y_2 = y_3 \text{ etc.} = 0,$$

falls d den Abstand korrespondierender Punkte in zwei benachbarten Spalten bedeutet, die sogenannte Gitterkonstante. Es ist daher nach (82):

$$c' = 1 + \cos\mu d + \cos 2\mu d + \cos 3\mu d + \ldots$$
$$s' = \quad \sin\mu d + \sin 2\mu d + \sin 3\mu d + \ldots$$

Um $c'^2 + s'^2$ zu finden, kann man zweckmäßig imaginäre Größen benutzen, indem man schreiben kann, falls m Öffnungen vorhanden sind:

$$c' + is' = 1 + e^{i\mu d} + e^{2i\mu d} + e^{3i\mu d} + \ldots + e^{i(m-1)\mu d}.$$

Diese Summation kann man sofort ausführen. Man erhält:

$$c' + is' = \frac{e^{im\mu d} - 1}{e^{i\mu d} - 1}.$$

Durch Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit ihren konjugierten komplexen Ausdrücken folgt:

$$c'^2 + s'^2 = \frac{1 - \cos m\mu d}{1 - \cos\mu d} = \frac{\sin^2 \frac{m\mu d}{2}}{\sin^2 \frac{\mu d}{2}}$$

1) Betreffs der Berechnung der Größe derselben aus den Durchmessern der Ringe der Höfe vgl. Vorles. über theoret. Optik von F. Neumann, herausgeg. von Dorn, Leipzig 1885, S. 105.

so daß aus (83) und (78) folgt:

$$J = J'_1 \frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{m \mu d}{2}}{\sin^2 \frac{\mu d}{2}}. \tag{85}$$

Hierin bedeutet J'_1 die Lichtintensität für den Beugungswinkel 0 ($\mu = 0$), wie sie bei einem Spalt bestehen würde. Aus dieser Formel geht hervor, daß das Beugungsbild eines Spaltes, welches durch die beiden ersten Faktoren dargestellt ist, durchzogen ist von sehr eng aufeinander folgenden Dunkelfransen der Gleichung $\frac{m \mu d}{2} = h \pi$. Diese Fransen folgen um so enger aufeinander, je größer die Anzahl m der Spalten ist. Zwischen den Fransen erreicht die Lichtstärke J Maxima, welche aber höchstens gleich der an gleicher Stelle des Beugungsbildes stattfindenden Lichtstärke bei einem Spalt sind. Sehr viel stärkere Maxima treten aber ein, falls $\sin \frac{\mu d}{2}$ verschwindet, d. h. für

$$\mu = \frac{2 h \pi}{d}, \text{ d. h. } \sin \varphi = h \frac{\lambda}{d}, \tag{86}$$

falls φ den Beugungswinkel bezeichnet. (Das Licht soll senkrecht auf das Gitter einfallen.)

Für diese Beugungswinkel φ ist nämlich

$$\frac{\sin^2 \frac{m \mu d}{2}}{\sin^2 \frac{\mu d}{2}} = m^2,$$

so daß die Intensität m^2 mal so groß ist als bei einem Spalt an der betreffenden Stelle des Beugungsfeldes. Wenn m sehr groß ist, so sind diese Maxima überhaupt allein wahrnehmbar.[1]) Es fällt ein solches Maximum nur dann aus, wenn an der gleichen Stelle gerade eine Nullstelle des Beugungsbildes eines Spaltes liegen würde, d. h. falls gleichzeitig mit (86) die Relation bestünde:

$$\mu = \frac{2 k \pi}{a}.$$

---

1) Wenn die Gitterkonstante $d < \lambda$ ist, so ist kein Beugungsmaximum wahrnehmbar, da nach (86) $\sin \varphi > 1$ würde. Man kann daher die Konstitution durchsichtiger Körper auffassen als Einlagerungen undurchsichtiger ponderabeler Teile im durchsichtigen Äther. Wenn die Distanzen der ponderabelen Teile kleiner als die Lichtwellenlänge ist, so geht nur das ungebeugte Licht hindurch.

Dies ist nur möglich, wenn die Spaltbreite a ein rationales (aus dem Quotienten zweier ganzer Zahlen bestehendes) Verhältnis zu der Gitterkonstante d hat. Sehr feine Gitter stellt man her durch Einritzen sehr feiner Linien auf Glas oder Metall (Reflexionsgitter) mit Hilfe eines Diamanten. Die Striche, welche der Diamant reißt, wirken als undurchsichtige oder nicht reflektierende Stellen, d. h. als Schirme. Nach dem Babinetschen Theorem (vgl. oben S. 208) kann man die Strichbreite auch als Spaltbreite a auffassen. Dieselbe ist dann sehr viel kleiner als die Gitterkonstante d, so daß jedenfalls die ersten Maxima, welche in (86) nur mäßig großen Werten von h entsprechen, nicht ausfallen. Diese Maxima haben auch nahezu konstante Intensität, da bei sehr geringer Spaltbreite a das Beugungsbild, welches ein Spalt hervorruft, einen großen Teil des Beugungsfeldes mit nahezu gleichmäßiger Intensität beleuchtet.

Bei genügend großer Spaltenzahl m besteht daher das Beugungsbild bei Beleuchtung durch eine feine Lichtlinie Q von einheitlicher (homogener) Farbe aus feinen hellen Linien, welche bei den Beugungswinkeln φ_0, φ_1, φ_2, etc. erscheinen, die dem Gesetz gehorchen:

$$\varphi_0 = 0,\ \sin\varphi_1 = \pm\frac{\lambda}{d},\ \sin\varphi_2 = \pm\frac{2\lambda}{d},\ \sin\varphi_3 = \pm\frac{3\lambda}{d}\ \text{u. s. w.}$$

Bei Beleuchtung des Gitters mit einer weißen Lichtlinie Q müssen daher reine Spektren erscheinen, da die verschiedenen Farben bei verschiedenen Beugungswinkeln auftreten. Diese Gitterspektren werden normale Spektren (im Gegensatz zu den durch Brechung in einem Prisma entstehenden Dispersionsspektren) genannt, weil jede Farbe entsprechend ihrer Wellenlänge abgelenkt ist aus der Richtung des einfallenden Lichtes, wenigstens solange die Beugungswinkel φ so klein bleiben, daß man $\sin\varphi = \varphi$ setzen kann. Da jede Farbe, entsprechend den verschiedenen Werten des h in (86), vielfach auftritt, so entstehen auch vielfache Spektren. Das dem Werte $h = 1$ entsprechende Spektrum heißt Spektrum erster Ordnung, dem Werte $h = 2$ entspricht das Spektrum zweiter Ordnung u. s. w. Am wenigsten abgelenkt erscheint das Violett des ersten Spektrums, dann folgen die Farben bis zum Rot. Nach einem dunkeln Zwischenraum folgt das Violett des zweiten Spektrums. Das Rot des zweiten Spektrums wird aber schon überdeckt vom blauen Ende des dritten Spektrums, da $3\lambda_v < 2\lambda_r$,

falls λ_v und λ_r die Wellenlängen des sichtbaren violetten und roten Lichtes, welches im weißen Licht enthalten ist, bezeichnen. Diese Überdeckung mehrerer Farben häuft sich nun immer mehr, wenn man zu größeren Beugungswinkeln fortschreitet.

Daß hier beim Gitter reine Spektralfarben auftreten im Gegensatz zu einem Spalt, der annähernd die Newtonschen Interferenzfarben ergibt (vgl. oben S. 206), liegt daran, daß beim Gitter die Orte der Lichtmaxima scharf bestimmte sind, bei einem Spalt dagegen die Orte der Lichtminima, d. h. der Dunkelstellen.

Die Gitter bildeten bis vor einigen Jahren das beste Hilfsmittel, um die Wellenlänge genau zu bestimmen, aus Gitterkonstante d und Beugungswinkel φ; durch die neuere Entwicklung der Interferenzspektroskopie (vgl. S. 146 u. 147) ist die Anwendung der Gitterspektren zur absoluten Messung von optischen Wellenlängen etwas in den Hintergrund getreten. Die Messung mit dem Gitter wird um so genauer, je feiner das Gitter geteilt ist, da dadurch die Beugungswinkel wachsen. Rutherford stellte Gitter auf Glas oder Metall her, bei denen bis 700 Linien auf ein Millimeter kommen. Wesentlich für die Güte eines Gitters ist vor allem die Teilmaschine, welche das Reißerwerk (den Diamanten) bewegt. Die Striche müssen genau parallel sein und konstanten Abstand haben. Von Rowland wurden Gitter hergestellt mit einer Teilmaschine, die bis zu 1700 Linien pro Millimeter zu reißen erlaubt. Neuerdings hat Michelson die technische Herstellung vorzüglicher Beugungsgitter weiter verbessert.

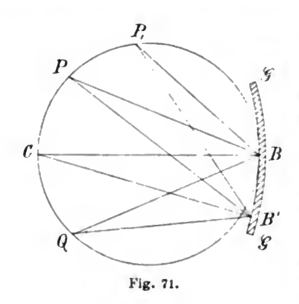


Fig. 71.

16. Konkavgitter.[1]) Ein weiterer wichtiger Fortschritt ist von Rowland dadurch erzielt worden, daß das Gitter auf einer konkaven, sphärischen, gut reflektierenden Metallfläche hergestellt wurde. Diese Konkavgitter erzeugen von einer leuchtenden Linie Q ein reelles Bild P ohne Hilfe von Linsen, und auch die

1) Zur Erzielung eines möglichst hohen Auflösungsvermögens sind Konkavgitter weniger gut geeignet als ebene Gitter.

Beugungsmaxima P_1, P_2 usw. der verschiedenen Ordnungen sind reelle Bilder. Um die Lage derselben zu finden, konstruiere man einen Kreis, der den Krümmungsradius r des Gitters als Durchmesser hat und das Gitter GG berührt (vgl. Figur 71). Wenn die Lichtlinie auf diesem Kreise in Q liegt, so entsteht durch Reflexion das ungebeugte reelle Bild in P ebenfalls auf demselben Kreise, und zwar liegen P und Q symmetrisch zu C, falls C das Krümmungszentrum des Gitters GG ist. Denn im Punkte B ist CB die Hohlspiegelnormale, daher ist Einfallswinkel QBC gleich Reflexionswinkel PBC. Aber auch ein in einem beliebigen anderen Punkte B' des Spiegels reflektierter Strahl muß stets durch P gehen, denn in B' ist CB' die Spiegelnormale, da C das Krümmungszentrum des Konkavspiegels ist, und da nun sehr annähernd $\sphericalangle QB'C = \sphericalangle PB'C$ ist (es wäre streng der Fall, wenn B' auf dem Kreise selbst läge, da die Winkel dann Peripheriewinkel über gleichen Kreisbögen wären), so ist $B'P$ die Richtung des reflektierten Strahles. P ist also der Ort des ungebeugten Bildes, welches der Spiegel von Q durch Reflexion entwirft.[1])

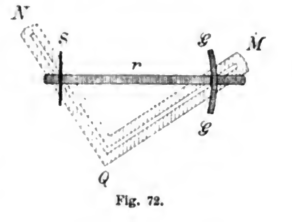


Fig. 72.

Der Ort eines Beugungsbildes P_1 ist nun der Schnitt zweier Strahlen BP_1 und $B'P_1$, welche gleiche Winkel einschließen mit BP und $B'P$. Man erkennt daher, daß P_1 ebenfalls auf dem durch $PCQB$ gehenden Kreise liegt, da die Winkel $PB'P_1$ und PBP_1 als Peripheriewinkel über demselben Bogen streng einander gleich wären, wenn B' ebenfalls auf jenem Kreise läge.

Wenn man in P_1 das reelle Beugungsspektrum auf einem Schirme S auffangen wollte, so müßte derselbe sehr schief gegen die das Bild hervorrufenden Strahlen stehen. Es ist günstiger, wenn der auffangende Schirm senkrecht zu ihnen steht. Daher bringt man den Schirm S im Punkte C parallel zum Gitter an.

1) Dasselbe würde folgen aus der zweiten der Formeln (34) auf S. 48, die bei der astigmatischen Abbildung durch Reflexion abgeleitet wurde. Es ist zu setzen $\sphericalangle CBQ = \varphi$, $CB = -r$, daher $QB = s = -r \cos\varphi$. Aus jener Formel folgt daher $s_1 = -s$, d. h. bei Berücksichtigung der dort positiv gerechneten Richtung s_1 muß der symmetrisch zu C gelegene Punkt P auf dem Kreise das Bild von Q sein.

Die Lichtquelle Q muß jedenfalls auf dem Kreise liegen, der CB als Durchmesser hat, d. h. $\sphericalangle\, CQB$ muß stets ein rechter sein. Um praktisch geeignete Lagen von Q zu finden, bei welchen ein Beugungsspektrum auf S entsteht, sind bei vielen Gitterspektrographen das Gitter G und der Schirm S auf einer Leiste der Länge r (Krümmungsradius des Gitters) befestigt, die auf den rechtwinkligen Schienen QM und QN gleiten kann, wie es Figur 72 andeutet. In Q befindet sich die Lichtquelle. Durch Entfernung des S von Q erhält man sukzessive die Spektren höherer Ordnung. — Es sind auch noch andere, praktisch sehr brauchbare Autojustiervorrichtungen von Gitterspektrographen ausgeführt worden, auf deren Beschreibung hier nicht eingegangen werden kann.

17. Brennpunktseigenschaften ebener Gitter. Wenn der gegenseitige Abstand d der Gitterstriche nicht konstant ist, so sind die Beugungswinkel φ, welche einem Lichtmaximum, z. B. dem ersten, nach der Formel $\sin\varphi = \lambda : d$ entsprechen, für die verschiedenen Partien des Gitters verschiedene. Bei einer geeignet gewählten Variabilität des d können diese Richtungen, welche dem Lichtmaximum entsprechen, sich alle in einem Punkte F schneiden. Dieser Punkt ist dann ein Brennpunkt des Gitters, da er dieselben Eigenschaften hat wie der Brennpunkt einer Linse.[1]

18. Das Auflösungsvermögen eines Gitters. Die Fähigkeit eines Gitters, zwei benachbarte Spektrallinien voneinander zu trennen, muß proportional zu der Strichzahl m des Gitters sein, da wir oben gesehen haben, daß das Beugungsmaximum, welches eine bestimmte Wellenlänge λ hervorbringt, eine um so schmälere Lichtlinie ist, je größer m ist. Nach Formel (86) der S. 210 liegt das Beugungsmaximum der h-ten Ordnung bei den Werten

$$\mu = 2h\pi : d, \quad \text{d. h.} \quad \sin\varphi = h\lambda : d.$$

Wenn μ von diesem Werte aus wächst oder abnimmt, so erhält man nach (85) eine erste Nullstelle der Intensität, wenn sich μ derartig geändert hat, daß $m\mu d/2$ um π geändert ist, d. h. wenn die Änderung von μ beträgt:

$$d\mu = 2\pi : md.$$

1) Näheres über das Verteilungsgesetz der Gitterstriche vgl. bei Cornu, Compt. rend. 80, S. 645, 1875. — Pogg. Ann. 156, S. 114, 1875. — Soret, Arch. d. scienc. phys. 52, S. 320, 1875. — Pogg. Ann. 156, S. 99, 1875. — Winkelmanns Handb. II. Aufl. VI (Optik) S. 1081 (Autor F. Pockels).

Daher muß sich der Beugungswinkel φ, der mit μ nach der Gleichung (78') S. 205 zusammenhängt, um

$$d\varphi = \lambda : m\, d \cos \varphi \tag{87}$$

geändert haben. Diese Größe $d\varphi$ mißt daher die halbe Winkelbreite des Beugungsbildes.

Für eine benachbarte Spektrallinie der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ ist der Ort ihres h-ten Beugungsmaximums gegeben durch

$$\sin(\varphi + d\varphi') = h(\lambda + d\lambda) : d,$$

d. h. der Winkel $d\varphi'$, um den die Beugungsmaxima der Linie λ und $\lambda + d\lambda$ verschieden liegen, ist

$$d\varphi' = h \cdot d\lambda : d \cos \varphi.$$

Damit das Gitter nun diese beiden Spektrallinien trennt, muß dieser Winkel $d\varphi'$ größer sein als die halbe Breite des Beugungsbildes der einen Linie, d. h. es muß sein:

$$d\varphi' > d\varphi, \quad h \cdot d\lambda > \lambda : m, \quad \frac{d\lambda}{\lambda} > \frac{1}{hm}. \tag{88}$$

Die auflösende Kraft eines Gitters ist daher proportional zur Gesamtstrichzahl m und der Ordnung h des Spektrums, dagegen von der Gitterkonstante d (Strichabstand) unabhängig. Bei zu kleinem Strichabstand d kann es allerdings eintreten, daß die Trennung der Spektrallinien noch besonderer Okularvergrößerung bedarf, durch eine solche läßt sich dann aber auch wirklich die Trennung stets erreichen, sobald nur das nach (88) definierte Auflösungsvermögen des Gitters nicht überschritten ist.

Zur Trennung der Doppellinie D des Natriumlichtes, für welche $d\lambda : \lambda = 0{,}001$ ist, bedarf man also eines Gitters von mindestens 500 Strichen, wenn man im Spektrum zweiter Ordnung beobachtet.

19. Michelsons Glasplattenstaffeln.[1]) Um das Auflösungsvermögen zu steigern, muß es nach den obigen Auseinandersetzungen günstig sein, die Ordnungszahl h des Spektrums möglichst hoch zu wählen. Bei den meisten der bisher betrachteten Gitterkonstruktionen kann man nun aber praktisch etwa über die dritte Ordnung ($h = 3$) nicht hinausgehen, da diese Gitter in den höheren Ordnungen, wenn solche überhaupt da sind, keine guten Beugungsbilder mehr geben. Man kann nun aber schon bei sehr kleinen

1) A. Michelson, Astrophysical Journ. 1898, S. 37, Bd. 8.

Beugungswinkeln eine bedeutende Phasendifferenz der interferierenden Strahlen erzielen, d. h. denselben Effekt erreichen, den Spektra hoher Ordnungszahl ergeben, wenn man die interferierenden Strahlenbündel Glas von verschiedener Dicke durchsetzen läßt. Wir kommen damit zu einer Konstruktion eines Gitters, dessen Auflösungskraft derjenigen der Interferenzspektroskope (vgl. S. 146 u. 147) fast gleichkommt. Gehen wir z. B. nur von zwei parallelen Spalten aus und legen wir hinter den einen Spalt eine mehrere Millimeter dicke Glasplatte, so gelangen bei minimalen Beugungswinkeln Strahlen zur Interferenz, welche mehrere Tausend Wellenlängen Gangunterschied besitzen. Dieser Gedanke liegt den Michelsonschen Glasplattenstaffeln zugrunde. Es werden m Platten der Dicke δ in der aus Figur 73 ersichtlichen Weise staffelartig aufeinandergelegt, die Breite des Staffelschrittes sei a. Das Licht falle von oben (in der Figur) senkrecht auf die Platten. Für die parallelen Strahlen AA' und CC', welche den Winkel φ mit dem einfallenden Lichte machen, ist ihre Gangdifferenz, wenn $CD \perp$ zu AA' ist und der Brechungsindex der Glasplatten mit n bezeichnet wird:

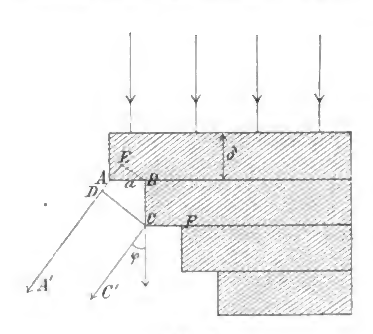


Fig. 73.

$$n \cdot BC - AD = n\delta - \delta \cos \varphi + a \sin \varphi,$$

da $AD = DE - AE$ und $DE = \delta \cos \varphi$, $AE = a \sin \varphi$ ist. Wenn diese Gangdifferenz ein ganzzahliges Vielfaches einer Wellenlänge ist, d. h. falls ist

$$h \cdot \lambda = n\delta - \delta \cos \varphi + a \sin \varphi, \tag{89}$$

so muß in der Richtung φ maximale Lichtwirkung eintreten, da dann alle von AB unter dem Winkel φ austretenden Strahlen in ihrer Wirkung unterstützt werden durch die von CF austretenden parallelen Strahlen. Die Gleichung (89) gibt also die Richtung φ der Beugungsmaxima an.

Bei einer nur geringen Änderung von λ um $d\lambda$ ist die Änderung $d\varphi'$ des Beugungsmaximums bedeutend, denn aus (89) folgt durch Differentiation:

$$h\,d\lambda = \delta \cdot dn + (\delta \sin \varphi + a \cos \varphi)\,d\varphi',$$

d. h. wenn φ klein gewählt wird, so ist

$$d\varphi' = \frac{h \cdot d\lambda - \delta \cdot dn}{a}. \tag{90}$$

Da bei kleinem φ nach (89) $h\lambda = (n-1)\delta$ ist, so läßt sich (90) schreiben:

$$d\varphi' = \frac{\delta}{a}\left[(n-1)\frac{d\lambda}{\lambda} - dn\right]; \tag{90}$$

es ist daher $d\varphi'$ bei großem $\delta : a$ erheblich groß. Es ist zu berücksichtigen, daß in dieser Formel in Wirklichkeit eine Summe und keine Differenz auftritt, weil n mit wachsendem λ beim Glase und überhaupt allen durchsichtigen Körpern abnimmt.

Ein Übelstand dieser Anordnung liegt darin, daß die Beugungsmaxima verschiedener Ordnung, welche demselben λ entsprechen, sehr nahe aufeinanderfolgen. Denn aus (89) folgt für den Beugungswinkel $\varphi + d\varphi''$ der Ordnung $h+1$ für die Wellenlänge λ die Beziehung:

$$\lambda = (\delta \sin \varphi + a \cos \varphi)\,d\varphi'',$$

d. h. bei kleinem φ:

$$d\varphi'' = \lambda : a. \tag{91}$$

So folgt z. B. für 5 mm dicke Flintglasplatten, daß die beiden Natriumlinien D_1 und D_1 10 mal weiter getrennt sind als zwei aneinandergrenzende Spektra (der Ordnung h und $h+1$) einer der beiden Natriumlinien. Infolgedessen muß die Lichtquelle sehr schmal begrenzte, d. h. homogene, Spektrallinien besitzen, wenn nicht die Spektren verschiedener Ordnung übereinander fallen sollen, d. h. falls $d\varphi'' > d\varphi'$ sein soll. So hat z. B. Michelson ein Instrument mit 20 Platten der Dicke $\delta = 18$ mm, $a = 1$ mm konstruiert, welches eine Lichtquelle fordert, deren Spektrallinien $^1/_{15}$ der Distanz der beiden Natriumlinien höchstens als Breite haben dürfen.

Um das Auflösungsvermögen der Glasplattenstaffel zu finden, müssen wir die Breite des Beugungsmaximums $h$ter Ordnung berechnen, d. h. diejenigen Beugungswinkel $(\varphi \pm d\varphi)$ berechnen,

welche Nullstellen ergeben, die dem der Gleichung (89) entsprechenden Lichtmaximum am nächsten benachbart sind. Um diese Nullstellen zu finden, denken wir die Staffel der Plattenzahl m in zwei gleiche Teile I und II der Plattenzahl $^m/_2$ zerlegt. Es tritt Dunkelheit für diejenigen Beugungswinkel $\varphi + d\varphi$ ein, für welche der Gangunterschied zweier Strahlen, von denen der eine durch den Teil I der Staffel, der andere durch einen homolog liegenden Punkt des Teiles II der Staffel geht, ein ungerades Vielfaches von $^1/_2\lambda$ beträgt. Gerade wie die rechte Seite von (89) den Gangunterschied zweier Strahlen angibt, von denen der eine eine Glasplatte mehr durchsetzt hat als der andere, so würde der Gangunterschied in unserem Falle, wo der eine Strahl $^m/_2$ Glasplatten mehr passiert hat als der andere, durch Multiplikation der rechten Seite von (89) mit $^m/_2$ zu erhalten sein.

Für eine Nullstelle, welche dem Beugungswinkel $\varphi \pm d\varphi$ zugehört, muß also sein:

$$(k \pm \tfrac{1}{2})\,\lambda = \frac{m}{2}\,[n\delta - \delta \cos(\varphi \pm d\varphi) + a \sin(\varphi \pm d\varphi)].$$

Damit $d\varphi$ möglichst klein sei, d. h. um die beiden Nullstellen zu erhalten, welche dem der Gleichung (89) entsprechenden Lichtmaximum am nächsten benachbart sind, haben wir, wie eine Vergleichung mit (89) lehrt, in der letzten Gleichung $k = h \cdot {}^m/_2$ zu setzen. Es ergibt sich dann aus der letzten Gleichung und aus (89):

$$\pm \tfrac{1}{2}\,\lambda = \frac{m}{2}\,(\delta \sin\varphi + a \cos\varphi)\, d\varphi\,,$$

oder für Winkel φ:

$$d\varphi = \pm \frac{\lambda}{ma}. \tag{92}$$

Dieser Winkel $d\varphi$ mißt also die halbe Winkelbreite des Beugungsbildes der Spektrallinie λ. Damit eine Doppellinie der Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ noch aufgelöst werde, muß der der Gleichung (90) entsprechende Dispersionswinkel $d\varphi'$ größer sein als $d\varphi$, d. h. es muß sein

$$\frac{d\lambda}{\lambda} > \frac{1}{m\delta\left(\frac{n-1}{\lambda} - \frac{dn}{d\lambda}\right)}. \tag{93}$$

Das Auflösungsvermögen hängt also nur von der Gesamtdicke $m\delta$ der Staffel ab, einerlei, ob man sie aus vielen Platten kleiner Dicke oder wenig Platten von größerer Dicke aufbaut. Nur zum Zwecke einer weiteren Trennung $d\varphi''$

der Spektren verschiedener Ordnungen und zur Vergrößerung des Dispersionswinkels $d\varphi'$ empfiehlt sich eine größere Plattenzahl, damit a klein wird [vgl. dazu die Formeln (90) und (91)].

Für Flintgläser hat $-\frac{dn}{d\lambda}$ etwa den Wert 100, wenn man λ in Millimeter ausdrückt. Bei einer Plattendicke δ von 18 mm und Plattenzahl $m=20$ wird daher das Auflösungsvermögen nach (93):

$$m\delta\left(\frac{n-1}{\lambda}-\frac{dn}{d\lambda}\right)=0{,}46\cdot 10^6,$$

was man nach (88) mit einem Strichgitter erst bei etwa einer Halbmillion Strichen in der ersten Ordnung erreichen könnte.

Obgleich, wie wir oben sahen, die Beugungsmaxima verschiedener Ordnung sehr nahe beieinander liegen, so sind doch nur wenige, nämlich höchstens zwei, sichtbar. Es ist ist nämlich zu berücksichtigen, daß nach S. 210 für die Lichtintensität in der Beugungserscheinung eines Gitters die von einem einzelnen Spalt hervorgebrachte Intensität als Faktor auftritt. Als einzelner Spalt wirkt bei der Glasplattenstaffel der unbedeckte Teil der Breite a je einer Glasplatte, die Intensität ist daher nach S. 206 nur zwischen den Beugungswinkeln $q=\pm\frac{\lambda}{a}$, welche den ersten Nullstellen der Beugungsfigur des Spaltes entsprechen, wesentlich von Null verschieden, d. h. auf einem Winkelbereich $2\lambda:a$. Da nach (91) die Winkeldistanz zweier Maxima aufeinanderfolgender Ordnungen den Wert $\lambda:a$ hat, so werden also nur zwei solcher Maxima sichtbar.

Damit eine solche Plattenstaffel gute Resultate gibt, müssen die einzelnen Platten genau gleiche Dicke δ überall besitzen. Sie werden mit Hilfe der Interferenzkurven gleicher Neigung (vgl. oben S. 141, Anm. 1) daraufhin kontrolliert. bezw. durch Abschleifen korrigiert.

20. Das Auflösungsvermögen eines Prismas. Im Anschluß an die vorangegangenen Betrachtungen ist die Frage von Interesse, ob ein Gitter einem Prisma an Auflösungsvermögen überlegen ist oder nicht. Das Trennungsvermögen eines Prismas hängt nicht nur von der Dispersion des Prismas ab, sondern auch von seiner Breite (senkrecht zur brechenden Kante gerechnet). Denn wenn diese Breite ziemlich klein ist, so wird jede einzelne Spektrallinie durch Beugung verbreitert.

Der kombinierte Einfluß von Dispersion und Büschelquerschnitt auf das Auflösungsvermögen eines Prismas oder irgend eines Prismen-

systems ist nach **Rayleigh**[1]) in folgender Weise einfach abzuleiten: Wird durch Brechung im System P (vgl. Fig. 74) die ebene Wellenfläche A_0B_0 des einfallenden Lichtes der Wellenlänge λ in die Lage AB gebracht, so sind die Lichtwege (vgl. oben S. 9) von A_0 bis A und B_0 bis B einander gleich. Eine Welle von anderer Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ wird in der gleichen Zeit in eine andere Lage $A'B'$ gebracht. Die Differenz zwischen den Lichtwegen $(A_0A') - (A_0A)$, d. h. die Strecke AA', können wir setzen

$$(A_0A') - (A_0A) = A'A = dn \cdot e_1,$$

falls dn der Unterschied des Brechungsindex des Prismas für die Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ bedeutet,[2]) und e_1 den von den Randstrahlen im Prisma zurückgelegten Weg. (Wir setzen denselben als gleich voraus für die beiden verschiedenen Farben, was annähernd gestattet ist, da AA' den kleinen Faktor dn enthält.)

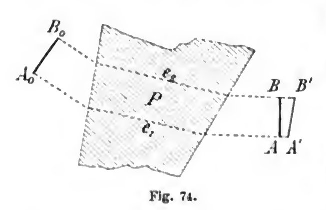


Fig. 74.

Ebenso ist die Differenz zwischen den Lichtwegen $(B_0B') - (B_0B)$, d. h. die Strecke BB':

$$(B_0B') - (B_0B) = B'B = dn \cdot e_2,$$

wobei e_2 den von den anderen Randstrahlen des Büschels im Prisma zurückgelegten Weg bedeutet. — Nun ist der Winkel di, welchen die Wellenebene $A'B'$ mit der Wellenebene AB macht, d. h. die Dispersion des Prismas, offenbar

$$di = \frac{BB' - AA'}{b} = dn\,\frac{e_2 - e_1}{b},$$

falls b die Breite des austretenden Lichtbüschels, d. h. die Strecke AB, bedeutet. Wenn die Randstrahlen A_0A durch die Prismenkante gehen, so ist $e_1 = 0$, und es ist

$$di = dn \cdot \frac{e}{b}, \tag{94}$$

wobei e die Prismendicke an der Basis bedeutet, falls das Prisma auf Minimum der Ablenkung, d. h. symmetrischen Durchgang der Lichtstrahlen, eingestellt ist und das einfallende Lichtbündel die

1) L. **Rayleigh**, Phil. Mag. (5) 9, S. 271, 1879. — **Winkelmanns** Handbuch, Optik, S. 166, I. Aufl.

2) Von der Dispersion der Luft wird abgesehen.

Prismenöffnung ganz ausfüllt. Dieselben Betrachtungen gelten bei einem Prismensatze: falls alle Prismen auf Minimum der Ablenkung eingestellt sind, bedeutet e die Summe der Prismendicken an der Basis.

Damit ein solcher Prismensatz eine Doppellinie im Spektrum auflösen könne, deren angularer Abstand di sei, müssen die Beugungsbilder, welche von jeder Spektrallinie infolge des begrenzten Büschelquerschnittes b entstehen, genügend getrennt sein. Bei einem Spalt der Breite b liegt nach S. 206, Formel (79) das erste Minimum im Beugungsbilde bei dem Beugungswinkel $\varphi = \lambda : b$.[1]) Wenn also zwei Spektrallinien getrennt werden sollen, muß ihre Dispersion di mindestens größer sein als obiger Winkel φ, der die halbe Breite des Zentralfeldes im Beugungsbild einer Spektrallinie angibt, d. h. es muß sein nach (94)

$$dn \cdot \frac{e}{b} > \frac{\lambda}{b},$$

$$e > \frac{\lambda}{dn}. \qquad (95)$$

Das Auflösungsvermögen eines Prismas hängt also nur von seiner Basisdicke ab und ist unabhängig vom Prismenwinkel. So ist z. B. zur Auflösung der Hauptdoppellinie des Natriumlichtes bei Flintglas ($n = 1{,}650$, $dn = 0{,}000055$, $\lambda = 0{,}000589$ mm) ein Prisma von mindestens 1 cm Dicke erforderlich. — Damit aber zwei Linien, für welche $d\lambda : \lambda = 2 : 10^6$ beträgt, noch aufgelöst werden, wie es bei der Michelsonschen Plattenstaffel oder mit einem Gitter von einer Halbmillion Strichen möglich ist (vgl. oben S. 219), würde die Prismendicke $e = 5 \cdot 10^2$ cm, d. h. 5 m betragen müssen, was unmöglich erreicht werden kann. Es tritt auch zuviel Lichtabsorption durch zu große Glasdicken ein. — **Die Gitterkonstruktionen können also zu höherer Auflösungskraft gebracht werden als Prismensysteme.**

21. Die Leistungsgrenze des Fernrohrs. Wenn ein Fernrohr auf einen Fixstern gerichtet wird, so entsteht durch Beugungswirkung am Rande der Objektivöffnung ein Lichtscheibchen in der Brennebene des Objektivs, welches um so größer ist, je kleiner der Radius h der Objektivöffnung ist. Bei der Beugung durch einen kreisförmigen Schirm des Radius h entstehen konzentrische

1) Da b sehr groß gegen λ ist, wird φ für $\sin \varphi$ geschrieben.

dunkle Ringe. Das erste Lichtminimum tritt ein[1]) für den Beugungswinkel $\sin\varphi = 0{,}61\,\frac{\lambda}{h}$. Nehmen wir an, daß ein zweiter Stern noch vom ersten zu unterscheiden wäre, falls sein Zentralbild auf das erste Lichtminimum des ersten Sternes fällt, so ergibt sich als Grenze des Sehwinkels φ, unter dem zwei Sterne dem unbewaffneten Auge erscheinen müssen, damit sie vom Fernrohr bei geeigneter Okularvergrößerung noch aufgelöst werden können:

$$\varphi > 0{,}61 \cdot \frac{\lambda}{h}\ ^{2)}.$$

Nimmt man λ zu 0,00056 mm an, und drückt man φ in Bogenminuten aus, so folgt

$$\varphi > \frac{1{,}17'}{h}. \tag{96}$$

Dabei ist h in Millimeter ausgedrückt. Ein Fernrohr von 20 cm Objektivdurchmesser kann also noch zwei Sterne der Winkeldistanz $\varphi = 0{,}0117' = 0{,}7''$ auflösen.

22. Die Leistungsgrenze des menschlichen Auges. Die vorigen Überlegungen können wir auch auf das menschliche Auge anwenden nur mit dem Unterschiede, daß die Wellenlänge λ des Lichtes im Glaskörper des Auges entsprechend dem Beugungsindex 1,4 desselben im Verhältnis 1 : 1,4 kleiner ist als in Luft. Für h ist der Pupillenradius einzusetzen. Nimmt man h zu 2 mm an, so ist der kleinste Sehwinkel, unter dem das Auge noch zwei leuchtende Punkte zu unterscheiden vermag

$$\varphi = 0{,}42'.$$

In Wirklichkeit liegt die Grenze etwa bei $\varphi = 1'$.

23. Die Leistungsgrenze des Mikroskops. Beim Mikroskop handelt es sich um Abbildung durchleuchteter Objekte, nicht selbstleuchtender[3]) Objekte. Auf diesen prinzipiellen Unterschied hat zuerst Abbe aufmerksam gemacht. Vom Standpunkte der rein geometrischen Optik aus, welche mit Lichtstrahlen operiert, folgt die Ähnlichkeit von Objekt und Bild nach den im ersten

1) Hinsichtlich der Herleitung dieser Zahl vgl. F. Neumanns Vorlesungen über Optik, herausgeg. von Dorn, S. 89.

2) Bei der Kleinheit von φ kann man φ an Stelle von $\sin\varphi$ schreiben.

3) Als selbstleuchtende Objekte sind auch nahezu die Objekte zu betrachten, welche durch diffus reflektiertes Licht sichtbar werden.

Abschnitt dieses Buches behandelten Grundsätzen. Vom Standpunkt der physikalischen Optik dagegen, welche nicht mit Lichtstrahlen als voneinander unabhängigen geometrischen Richtungen operiert, da dies nicht genau zulässig ist, sondern welche an die Deformationen der Wellenflächen anknüpft, ist die Ähnlichkeit von Objekt und Bild durchaus nicht selbstverständlich, sondern sogar streng genommen nie zu erreichen. Nehmen wir nämlich zunächst parallel einfallendes Licht an, so wird dasselbe nach dem Durchgang durch das durchleuchtete Objekt eine Beugungsfigur in der dem Okular zugewandten Brennebene $\mathfrak{F}'$ des Objektivs entstehen lassen. Es handelt sich nun darum, welche Lichtwirkung diese Beugungsfigur in der der Objektebene $\mathfrak{P}$ in bezug auf das Objektiv konjugierten Ebene $\mathfrak{P}'$ hervorruft. Dieses hier entstehende Bild wird vom Okular betrachtet. Die Abbildung eines durchleuchteten Objektes ist also nicht eine direkte (primäre), sondern eine indirekte (sekundäre), indem es sich um die Lichtwirkung eines vom Objekt entworfenen Beugungsbildes handelt.

Es ist ohne weiteres klar, daß gleiche Beugungsbilder in der Brennebene $\mathfrak{F}'$ auch gleiche Bilder in der Pointierungsebene $\mathfrak{P}'$ hervorrufen. Verschiedene Objekte werden nun im allgemeinen immer verschiedene Beugungsbilder in $\mathfrak{F}'$ hervorrufen.[1]) Wenn aber die Apertur des Mikroskop-Objektivs sehr klein ist, so daß nur ein enges, nahezu gleichmäßig helles Zentralfeld des Beugungsbildes zweier verschiedener Objekte zur Wirkung gelangt, so müssen sie gleiche Lichtwirkung in der Ebene $\mathfrak{P}'$ hervorrufen, d. h. im Mikroskop betrachtet, gleich aussehen. In diesem Falle sieht man nun im Mikroskop nur ein gleichmäßig helles Gesichtsfeld, d. h. überhaupt keine Andeutung von Struktur des Objektes. Soll diese wahrgenommen werden, so muß die numerische Apertur des Mikroskops so groß sein, daß außer dem hellen Zentralfeld des Beugungsbildes wenigstens noch das nächste Lichtmaxi-

1) Durch geeignete Abblendung in der Ebene $\mathfrak{F}'$ kann man von verschiedenen Objekten gleiche Beugungsbilder zur Abbildung benutzen. Es entsteht dann auch stets das gleiche Bild in der Ebene $\mathfrak{P}'$, d. h. das Okular sieht gleiche Bilder, obwohl die Objekte sehr verschieden sind. Ist z. B. das Objekt ein Gitter des Strichabstandes d und blendet man alle Beugungsbilder ungerader Ordnung ab, so macht das Objekt im Bilde den Eindruck, als ob das Objekt doppelt so feine Struktur, d. h. den Strichabstand $d/2$ erhalten hätte. Vgl. hierüber Müller-Pouillet (Lummer), Optik 9. Aufl., S. 713; 10. Aufl. S. 448. — Die Firma C. Zeiß konstruiert Apparate zum experimentellen Nachweis dieser Tatsachen.

mum im Beugungsbilde zur Wirkung gelangen kann. Dann ist die Lichtverteilung in der Ebene 𝔓′ nicht mehr gleichmäßig, d. h. es tritt in ihr ein Bild zutage, welches nur in einer gewissen Annäherung dem Objekte ähnlich ist. Je mehr Lichtmaxima des Beugungsbildes in den Tubus gelangen, d. h. je vollständiger das Beugungsbild des Objektes benutzt wird, um so ähnlicher wird das Mikroskopbild dem Objekte. Vollständige Ähnlichkeit kann aber nur erreicht werden, wenn alle vom Objekt ausgehenden Beugungsrichtungen, welche noch eine merkliche Lichtwirkung in der Brennebene 𝔉′ des Objektivs hervorrufen würden, vom Objektiv wirklich aufgenommen, d. h. nicht abgeblendet werden. Hieraus ergibt sich die große Bedeutung einer hohen numerischen Apertur des Objektivs. Je größer dieselbe ist, um so eher kann man noch bei

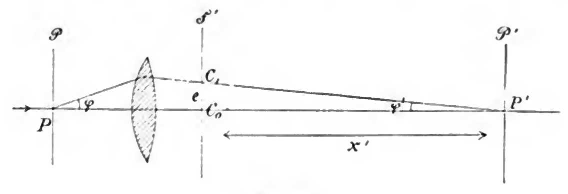


Fig. 75.

feinen Strukturen des Objektes eine annähernd ähnliche Abbildung erzielen; wirkliche vollständige Ähnlichkeit ist allerdings prinzipiell überhaupt nicht zu erwarten, wir sehen im Mikroskop stets nur das Detail eines Objektes bis zu einem gewissen Grade der Feinheit.

Um an einem Beispiele diese Überlegungen zu illustrieren, wollen wir annehmen, das Objekt P sei ein Gitter des Strichabstandes d; es werde mit parallelem, senkrecht einfallendem Lichte beleuchtet. In der Beugungsrichtung $\sin\varphi = \lambda : d$ findet sich das dem Zentralfeld zunächst benachbarte erste Lichtmaximum. Das reelle Bild dieses Lichtmaximums in der Brennebene 𝔉′ des Objektivs sei C_1 (vgl. Figur 75), während C_0 das Zentralbild sei. Der Abstand beider Bilder sei e. Diese beiden Bilder C_0 und C_1 haben nun annähernd gleiche Intensität und senden kohärente, d. h. interferenzfähige Wellen aus. Im Abstand x' hinter der Brennebene 𝔉′ entsteht daher nach S. 124 ein Fransensystem mit dem

Fransenabstande $d' = x' \lambda : e$. Wenn nun das Objektiv aplanatisch ist, d. h. der sinus-Bedingung genügt (vgl. oben S. 55), so ist

$$\sin \varphi = \varepsilon \cdot \sin \varphi',$$

wobei ε eine Konstante bedeutet. Setzt man nun $\sin \varphi' = e : x'$, was annähernd gestattet, da φ' stets klein ist (während φ groß sein kann), und berücksichtigt, daß $\sin \varphi = \lambda : d$ ist, so folgt

$$\frac{\lambda}{d} = \varepsilon \frac{e}{x'},$$

d. h. der Fransenabstand d' ergibt sich zu

$$d' = \frac{x' \lambda}{e} = \varepsilon d,$$

d. h. der Fransenabstand ist proportional dem Strichabstand, ganz unabhängig von der Farbe des angewandten Lichtes. Die Struktur d' des Mikroskopbildes ist also proportinal der Struktur d des Objektes.

Damit diese Struktur noch wahrnehmbar sei, muß also das Objektiv mindestens noch einen Strahl der Richtung φ aufnehmen, für den $\sin \varphi = \lambda : d$ ist. Bei Immersionssystemen ist für λ die Wellenlänge des Lichtes in der Immersionsflüssigkeit zu setzen, d. h. $\lambda : n$, wenn λ die Wellenlänge in Luft und n den Brechungsindex der Immersionsflüssigkeit gegen Luft bedeutet. Daher wird dann

$$n \sin \varphi = \lambda : d.$$

Nun wird $n \sin U = a$ die numerische Apertur des Mikroskops [vgl. oben S. 79, Formel (80)], falls U der Winkel ist, den der Randstrahl des Objektivs mit der Achse bildet. Daher ist die feinste Struktur d, die das Mikroskop der numerischen Apertur a aufzulösen vermag:

$$d = \lambda : a. \tag{97}$$

Diese Formel gilt für senkrechte Beleuchtung des Objektes. Durch schiefe Beleuchtung kann man die Auflösungskraft noch steigern, weil, falls das Mittelfeld des Beugungsbildes nicht im Zentrum liegt, sondern seitlich verschoben ist, schon bei einem kleineren Winkel gegen die Mikroskopachse das erste Beugungsmaximum auftritt. Am günstigsten muß es sein, wenn das einfallende Licht und das dem ersten Maximum entsprechende, gebeugte Licht gleiche Winkel mit der Mikroskopachse machen und vom Objektiv gerade noch aufgenommen werden.

Machen das einfallende Licht und das gebeugte Licht gleiche Winkel U mit der Normale gegen das Beugungsgitter, so ist nach (71) S. 202 zu setzen $\mu = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 \sin U$. Da ferner nach (86) (S. 210) das erste Beugungsmaximum auftritt bei $\mu = \frac{2\pi}{d}$, so wird in diesem Falle

$$\sin U = \frac{\lambda}{2d}.$$

Die kleinste Distanz d, welche das Mikroskopobjektiv daher noch aufzulösen vermag bei geeigneter schiefer Beleuchtung, ist

$$d = \frac{\lambda}{2a}, \tag{98}$$

wobei a die numerische Apertur des Mikroskopes, λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft bedeutet. Dieses ist die oben S. 85 angegebene Formel für die Leistungsgrenze des Mikroskops.

Um die Lichtmenge im Mikroskop zu vergrößern, beleuchtet man (mit Hilfe des Abbeschen Kondensors, vgl. oben S. 95) das Objekt mit stark konvergentem Licht. Die soeben angestellten Betrachtungen gelten dann für jede einzelne Richtung der einfallenden Lichtstrahlen; nur diejenigen Richtungen derselben tragen wirklich zur Auflösung des Objektes bei, für welche außer dem direkten Bild mindestens noch das erste Maximum des Beugungsbildes zur Wirkung kommt. Die den verschiedenen Richtungen des einfallenden Lichtes entsprechenden Beugungsmaxima liegen an verschiedenen Stellen der Brennebene des Objektivs, sie beeinflussen sich gegenseitig aber durchaus nicht, da sie inkohärenten, d. h. nicht interferenzfähigen Strahlen entsprechen; denn die verschiedenen Richtungen des einfallenden Lichtes kommen von verschiedenen Punkten der Lichtquelle, z. B. des hellen Himmels.

Wenn wir an Stelle des Gitters nur einen Spalt der Breite d als Objekt hätten, so würde solange überhaupt keine Struktur zu erkennen sein, als das Beugungsbild nicht mindestens über das erste Minimum hinaus zur Wirkung gelangt. Da dieses erste Minimum bei senkrecht einfallendem Licht nach Formel (79) auf S. 206 bei dem Beugungswinkel $\sin \varphi = \frac{\lambda}{d}$ [1] eintritt, so kommt man auf dieselben Resultate wie beim Gitter. Nur wird hier eine wirklich ähnliche Abbildung des Spaltes, d. h. eine richtige Erkennung der

1) Dort ist a für d geschrieben.

Spaltbreite, noch durchaus nicht erreicht, wenn das Beugungsbild nur bis etwas über das erste Minimum hinaus zur Wirkung gelangt.

Verzichtet man auf eine nur annähernd ähnliche Abbildung des Objektes, sondern will man nur die Existenz eines kleinen undurchsichtigen Körpers nachweisen, so können dessen Dimensionen ziemlich weit unter die hier ermittelte Leistungsgrenze d des Mikroskops heruntergehen; sowie nämlich das vom Objekt entworfene Beugungsbild die gleichmäßige Lichtverteilung in der zum Objekt gehörenden Bildebene merklich stört, wird die Existenz des Objektes wahrnehmbar.[1])

Aus den angestellten Betrachtungen geht hervor, daß die Leistungsgrenze d um so höher ist, je kleiner die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist. Daher ist Mikrophotographie mit ultraviolettem Lichte günstig, vgl. dazu oben S. 98, Anm. 1. Auch tritt die bessere Wirkung der Immersionssysteme deutlich hierdurch zutage, da man durch hohe Brechungsindices der Immersionsflüssigkeit die Wellenlänge des Lichtes bedeutend verkleinern kann. Dies ergeben auch die Formeln (97) und (98), da die numerische Apertur a proportional zum Brechungsindex der Immersion wächst.

24. Zerstreuung des Lichtes durch trübe Medien. Nach Lord Rayleigh[2]) kann man den Effekt durchsichtiger Teilchen, die klein gegen die Wellenlänge des Lichtes sind, annähernd dadurch darstellen, daß sie der Ausgangspunkt sekundärer Wellen sind, deren Amplitude a proportional zur Amplitude A des einfallenden Lichtes, umgekehrt proportional zur Entfernung r vom beugenden Teilchen und proportional mit dessen Volumen v sein muß, d. h.

1) Dies wird zu der Sichtbarmachung kleinster Teilchen benutzt in der Anordnung (Ultramikroskop) von H. Siedentopf und R. Zsigmondy (Ann. d. Phys. **10**, S. 1, 1903), nach der man sehr intensives, durch eine Kondensorlinse konzentriertes Licht in einer zur Mikroskopachse senkrechten Richtung auf das Präparat fallen läßt. Man sieht dann auf dunklem Gesichtsfelde die Teilchen vermöge des unter 90° gebeugten Lichtes leuchten. Natürlich erhält man aber so keinen Aufschluß über die Gestalt der Teilchen; auf ihre Größe kann man bis zu einem gewissen Grade aus der Helligkeit der Beugungsbilder schließen (vgl. weiter unten § 24). Mit dieser Methode kann man z. B. sehr kleine Teilchen in rotem Glase, auch in kolloidalen Metalllösungen nachweisen, und zwar zeigen sich dabei im allgemeinen Teilchen sehr verschiedener Größe.

2) Lord Rayleigh (J.W. Strutt) Phil. Mag. (4) **41**, S. 107, 447, 1871; (5) **12**, S. 86, 1881.

$a = k \cdot A \cdot \frac{v}{r}$. In der Tat muß ja a offenbar proportional zur Flächenausdehnung des Teilchens und zu seiner Dicke sein, so daß Proportionalität mit v resultiert. Da nun a/A eine dimensionslose Zahl sein muß, so muß k von der Dimension des reziproken Quadrats einer Länge sein. Die einzige Länge außer r, von welcher die Amplitude des zerstreuten Lichtes noch abhängen kann, ist aber die Wellenlänge λ, folglich erhält man

$$a = k' A \cdot \frac{v}{r\lambda^2}.$$

Da nun die Intensität des zerstreuten Lichtes proportional zu a^2 ist, so ist dieselbe umgekehrt proportional zur 4ten Potenz der Wellenlänge. Hierdurch erklärt sich die blaue Farbe der Emulsionen kleiner Teilchen, und auch die des Himmelslichtes. Hinsichtlich der dabei auftretenden Polarisationserscheinungen sei auf die Originalarbeit[1]) verwiesen, ferner auf eine Arbeit von J. J. Thomson[2]), der nachwies, daß das Polarisationsmaximum des gebeugten Lichtes in anderer Richtung liegt, falls das Teilchen ein sehr guter Leiter für Elektrizität ist. Die an kolloidalen Metallösungen von Ehrenhaft[3]) angestellten Versuche entsprechen in der Tat den Thomsonschen Formeln. Die bei ihnen auftretende Farbe ist aber nicht blau, sondern grünlich, was vielleicht mit ihren besonderen Dispersionseigenschaften, d. h. Eigenschwingungen, zusammenhängen mag. Wenn das Problem überhaupt genügend verallgemeinert wird, so muß streng genommen jeder Lichtdurchgang durch einen Körper, dessen kleinste Teilchen ins Mitschwingen versetzt werden, und wenn es auch nur seine Elektronen sind, die seine Dispersion erklären (vgl. unten im II. Abschn., Kapitel 5), ähnliche Erscheinungen auslösen wie die hier besprochenen. Planck[4]) hat gezeigt, daß auch nach der elektromagnetischen Theorie die Erklärung der Dispersion durch elektrische Schwingungen innerhalb der Moleküle mit Notwendigkeit auch für jedes scheinbar homogene, mit Dispersion behaftete Medium auf eine Zerstreuung und entsprechende Extinktion des Lichtes führt, welche dem Rayleighschen

1) Hinsichtlich zusammenfassender Darstellung vgl. Winkelmann, Hdb. d. Phys. 2. Aufl. VI, S. 1113—1119 (Ausor F. Pockels).

2) J. J. Thomson, Recent Researches in Elect. and Magn. Oxford, 1893, § 369—378.

3) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. **11**, S. 489, 1903. — Wien. Ber. **114** (IIa), S. 1115, 1905.

4) M. Planck, Berl. Ber. 1904, S. 740.

Gesetz folgt. Auch Rayleigh[1]) wies darauf hin, daß zur Erklärung des diffusen blauen Himmelslichtes nicht notwendig fremde suspendierte Teilchen anzunehmen seien, sondern daß man den Luftmolekülen selbst die zerstreuende Wirkung zuschreiben kann.

Kapitel V.

Polarisation.

1. Polarisation durch Doppelbrechung. Man nennt einen Lichtstrahl polarisiert, wenn er sich rings um seine Fortpflanzungsrichtung nicht gleichmäßig verhält. Man kann dies daran erkennen, daß eine Drehung des Lichtstrahles um die Richtung der Fortpflanzung als Achse eine Änderung in den beobachteten Lichterscheinungen hervorruft. Eine solche ist zuerst von Huygens[2]) beim Durchgang des Lichtes durch Kalkspat beobachtet worden. — Polarisation ist stets vorhanden, wenn Doppelbrechung eintritt. Die Kristalle, welche nicht dem regulären System angehören, zeigen im allgemeinen stets Doppelbrechung[3]), d. h. ein einfallender Lichtstrahl wird im Kristall in zwei Strahlen verschiedener Richtung gespalten.

Besonders bequem ist die Erscheinung am Kalkspat (isländischen Doppelspat) zu beobachten, welcher dem hexagonalen Kristallsystem angehört und in ausgezeichneter Weise nach den drei Flächen eines Rhomboeders spaltet. In sechs Ecken desselben stoßen je solche drei Kanten zusammen, welche einen stumpfen und zwei spitze Winkel bilden. Aber in zwei gegenüberliegenden Ecken A, A' (vgl. Figur 76) stoßen drei gleich große stumpfe Winkel zusammen von $101^\circ 53'$. Ziehen wir durch die stumpfe

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **47**, S. 375, 1899.

2) Huygens, Traité de la lumière, Leyden, 1690.

3) Außer Kristallen zeigen auch gepreßte, an und für sich isotrope Körper, wie z. B. Glas, Doppelbrechung (sogen. Akzidentelle Doppelbrechung). Auch in Flüssigkeiten, die zähe fließen, läßt sich Doppelbrechung beobachten. Ferner kann man mittels magnetischer und elektrischer Kräfte Doppelbrechung erzielen. Durch besondere Verfeinerung der optischen Anordnung hat neuerdings Leiser (Phys. Ztg. **12**, S. 955, 1911) eine geringe elektrische Doppelbrechung in Gasen nachweisen können.

Ecke A eine Linie, die mit den drei in ihr zusammenstoßenden Kanten gleiche Winkel einschließt, so ist dies die Richtung der kristallographischen Hauptachse.[1]) Stellen wir uns durch Spaltung ein Rhomboeder von überall gleichen Kantenlängen her, so verbindet die Hauptachse die beiden stumpfen Ecken A, A'. Auf diesen Fall bezieht sich die Figur.

Läßt man nun auf die obere Fläche des Rhomboeders senkrecht einen Lichtstrahl LL einfallen, so spaltet er sich in zwei Strahlen gleicher Intensität LO und LE, welche als Parallelstrahlen OL' und EL'' senkrecht aus der unteren Rhomboederfläche wieder austreten. Dabei ist LO die direkte Fortsetzung des einfallenden Strahles, dieser Strahl entspricht also dem gewöhnlichen Verhalten isotroper Körper, da keine Richtungsänderung bei normaler Inzidenz eintritt; dieser Strahl LO und seine Fortsetzung $L'O$ wird daher der ordentliche oder ordinäre Strahl genannt. Der zweite Strahl dagegen LE und seine Fortsetzung $L''E$, der ein vom isotropen (nicht kristallinischen) Körper wesentlich abweichendes Verhalten zeigt, heißt außerordentlicher oder extraordinärer Strahl. Die Ebene, welche durch beide Strahlen geht, enthält auch die Richtung der kristallographischen Hauptachse. Die durch diese Achse und das Einfallslot gelegte Ebene wird Hauptschnitt genannt. Der außerordentliche Strahl liegt also im Hauptschnitt, er dreht sich daher, wenn man das Rhomboeder um die Achse LL dreht, um den ordentlichen Strahl herum.

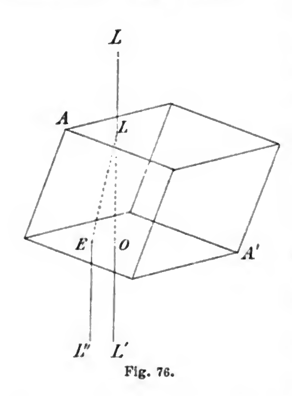


Fig. 76.

Die Intensitäten des ordentlichen und außerordentlichen Strahles sind gleich, blendet man aber einen dieser Strahlen, z. B. den außerordentlichen, ab und läßt den ordentlichen Strahl auf ein zweites Kalkspatrhomboeder fallen, so wird er wiederum im allgemeinen in zwei Strahlen zerlegt, welche nun aber im

1) Die Hauptachse wird, gerade z. B. wie das Einfallslot, immer nur als Richtung, die man beliebig parallel mit sich verschieben kann, definiert, so daß sie keine bestimmte einzelne Linie ist.

allgemeinen verschiedene Intensität besitzen. Diese Intensitäten hängen von der Orientierung der beiden Kalkspatrhomboeder gegeneinander ab, nämlich von dem Winkel, den ihre Hauptschnitte miteinander machen. Ist derselbe Null oder 180°, so entsteht im zweiten Rhomboeder nur ein ordinärer Strahl und gar kein extraordinärer; ist der Winkel der Hauptschnitte dagegen 90°, so entsteht nur ein extraordinärer Strahl; zwei gleich intensive Strahlen entstehen, wenn die Hauptschnitte einen Winkel von 45° miteinander bilden. Die Erscheinungen wechseln also, wenn man das zweite Rhomboeder festhält und das erste dreht, d. h. den ordinären Strahl um seine Richtung als Achse herumdreht. Daher wird der Strahl polarisiert genannt. — Dieselben Experimente kann man mit dem extraordinären Strahl anstellen, d. h. auch er ist polarisiert. Da man mit Hilfe des extraordinären Strahles dieselben Lichterscheinungen im zweiten Rhomboeder hervorrufen kann, wie mit Hilfe des ordinären Strahles, falls man das erste Rhomboeder um 90° um das Einfallslot dreht, so nennt man zweckmäßig den ordentlichen und außerordentlichen Strahl senkrecht zu einander polarisiert.

Auch bei allen anderen doppelbrechenden Kristallen sind die beiden Strahlen senkrecht zu einander polarisiert.

Will man die Richtungsunterschiede der Polarisation der beiden Strahlen des Kalkspats auf eine feste Ebene beziehen, so wählt man dazu am zweckmäßigsten den Hauptschnitt. Da die vorhin betrachteten Lichterscheinungen bei zwei Kalkspatrhomboedern nur von der absoluten Größe des Winkels ihrer Hauptschnitte abhängen, nicht vom Vorzeichen dieses Winkels, so müssen die Eigenschaften des ordentlichen und außerordentlichen Strahles symmetrisch zum Hauptschnitt beschaffen sein.

Man nennt den Hauptschnitt die Polarisationsebene des ordentlichen Strahles, eine Ausdrucksweise, mit der vorläufig weiter nichts gesagt ist, als daß dieser Strahl rings um seine Fortpflanzungsrichtung herum sich nicht gleichmäßig verhält, daß aber die nach verschiedenen Richtungen stattfindenden Verschiedenheiten symmetrisch zu seiner Polarisationsebene, dem Hauptschnitt, liegen.

Da, wie wir oben sahen, der außerordentliche Strahl rechtwinklig zum ordentlichen polarisiert ist, so muß man konsequenterweise die zum Hauptschnitt senkrechte Ebene die Polari-

sationsebene des außerordentlichen Strahles nennen. Man drückt diese Bezeichnung auch in der Form aus, daß man sagt: Der ordentliche Strahl ist im Hauptschnitt, der außerordentliche senkrecht zum Hauptschnitt polarisiert.

2. Das Nicolsche Prisma. Um einheitlich polarisiertes Licht zu erhalten, muß der eine der beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen abgeblendet oder entfernt werden. Zu dem Zweck gab Nicol im Jahre 1828 folgende Konstruktion an: Man stellt sich durch Spaltung ein Kalkspatrhomboeder her, welches reichlich dreimal so lang als breit ist, schleift die Endflächen, deren Neigungswinkel gegen die Seitenkanten ursprünglich 72° beträgt, so ab, daß dieser Winkel ($\sphericalangle ABA'$ in Fig. 77) 68° groß wird, und führt durch die Ecken AA' des Prismas einen Schnitt so, daß er senkrecht zu den Endflächen und der Ebene, welche die Längsachse und kristallographische Hauptachse verbindet, steht. An diesem Schnitt werden die beiden Prismenhälften mit Kanadabalsam wieder zusammengekittet. Dieser Balsam besitzt einen Brechungsindex, der kleiner als der des ordentlichen, aber größer als der des außerordentlichen Strahles ist. Wenn nun ein Lichtstrahl LL parallel zur Längsachse eintritt, so wird der ordentliche Strahl LO an der Kanadabalsamschicht total reflektiert und an der geschwärzten Seitenfläche BA' absorbiert, während der außerordentliche Strahl LE allein das Prisma durchsetzt. Das austretende Licht EL'' ist also vollständig senkrecht zum Hauptschnitt, d. h. parallel zur langen Diagonale der Grenzflächen AB oder $A'B'$, polarisiert.

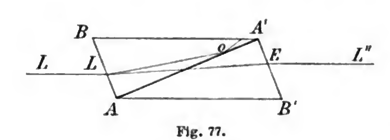


Fig. 77.

Der Öffnungswinkel des in das Prisma eintretenden Lichtkegels, dessen ordinäre Strahlen noch total reflektiert werden, beträgt etwa 30°. Übrigens ist ein konvergent eintretendes Lichtbündel nicht mehr streng einheitlich polarisiert, indem die Polarisationsebene etwas mit der Neigung der Lichtstrahlen variiert, da die Polarisationsebene stets senkrecht steht zum Hauptschnitt, d. h. zur Ebene durch Strahl und Hauptebene.

3. Andere Herstellung polarisierten Lichtes. Abgesehen von anderen Konstruktionen von sogenannten Polarisations-

prismen[1]) kann man auch durch eine Turmalinplatte einerlei polarisiertes Licht erhalten, falls die Platte der Hauptachse des Kristalls parallel geschliffen ist und etwa 1—2 mm dick ist. In diesem Falle wird nämlich der ordentliche Strahl durch Absorption im Kristall vernichtet. Ferner kann man polarisiertes Licht durch Reflexion an irgendeinem durchsichtigen Körper erhalten, falls man den Reflexionswinkel φ nach dem (Brewsterschen) Gesetz wählt: $tg\,\varphi = n$, wobei n der Brechungsindex des Körpers ist. Dieser Winkel φ heißt der Polarisationswinkel. Bei Crownglas beträgt dieser Reflexions- (oder Einfalls-)Winkel etwa 57°. Die Einfallsebene ist die Polarisationsebene des reflektierten Lichtes, wie man erkennen kann, falls man das reflektierte Licht durch ein Kalkspatbruchstück gehen läßt.

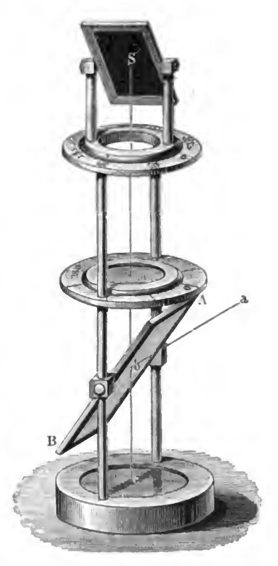


Fig. 79.

Läßt man das unter dem Polarisationswinkel von einer Glasfläche reflektierte Licht von einer zweiten Glasfläche unter demselben Winkel reflektieren, so hängt die schließliche Intensität vom Neigungswinkel α der beiden Einfallsebenen der zwei Glasflächen ab, indem sie proportional zu $\cos^2\alpha$ ist. Man kann dies bequem am Nörrenbergschen Polarisationsapparate studieren. Der Lichtstrahl a wird durch Reflexion an der Glasplatte A polarisiert und gelangt unter senkrechter Inzidenz bei c zu einem belegten Glasspiegel. Derselbe reflektiert den Strahl nach dem hinten geschwärzten Glasspiegel S, welcher um eine vertikale Achse drehbar ist. Auch S wird unter dem Polarisationswinkel vom Strahl

1) Man vgl. hierüber W. Grosse, Die gebräuchlichen Polarisationsprismen u. s. w. Klausthal 1889. — Winkelmanns Handb. d. Physik, Optik, 2. Aufl. S. 1126 u. ff.

bc getroffen, der an *S* schräg nach oben reflektierte Strahl nimmt also wechselnde Intensitäten an bei Drehung von *S* um die vertikale Achse. Zwischen *A* und *S* ist eine drehbare Glasplatte eingeschaltet, um bequem durchsichtige Objekte bei verschiedener Orientierung im polarisierten Lichte untersuchen zu können. Da die Intensität des Lichtes aber schon nach einmaliger Reflexion verhältnismäßig gering ist, so wendet man praktisch dies Mittel, polarisiertes Licht durch Reflexion herzustellen, nicht häufig an; an demselben Übelstand zu kleiner Intensität (und noch dazu vorhandener Färbung) leidet die Turmalinplatte.

Auch bei schiefem Durchgang des Lichtes durch einen Satz paralleler Glasplatten tritt Polarisation ein, allerdings keine vollständige. Dieser Fall wird in einem späteren Kapitel behandelt werden (II. Abschn. Kap. II). — Daß durch Beugung Polarisation hervorgebracht wird, ist schon oben S. 200 angedeutet.

4. Interferenz polarisierten Lichtes. Die früher beschriebenen Interferenz-Erscheinungen lassen sich unverändert mit einheitlich polarisiertem Licht anstellen. Dagegen interferieren zwei rechtwinklig zueinander polarisierte Strahlen niemals. Man kann dies konstatieren, wenn man vor die beiden Öffnungen eines Doppelspaltes je eine von zwei gleich dicken Turmalinplatten schaltet. Die Beugungsfransen, welche durch die Anwesenheit der zwei Spalten entstehen, sind bei parallel orientierten Turmalinplatten vorhanden, bei senkrecht gegeneinander gekreuzten Platten verschwinden sie dagegen vollkommen.

Fresnel und Arago untersuchten weiterhin die Interferenzfähigkeit zweier rechtwinklig zueinander polarisierter Strahlen, welche sie auf dieselbe Polarisationsebene zurückführten, indem sie dieselbe durch einen Kalkspat treten ließen, dessen Hauptschnitt um 45^0 gegen jede der Polarisationsebenen der beiden Strahlen geneigt war. Sie fanden die Gesetze:

1. Zwei von einem natürlichen (unpolarisierten) Strahle herrührende rechtwinklig polarisierte Strahlen interferieren auch dann nicht, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden.

2. Zwei von einem polarisierten Strahle herrührende recht-

winklig polarisierte Strahlen interferieren, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden.

5. Die mathematische Darstellung der Lichterregung in polarisiertem Licht. Wir haben früher gesehen, daß die Erscheinungen der Interferenz zu der Wellentheorie des Lichtes führen, nach der an einer bestimmten Stelle des Raumes die Lichterregung in der Form zu schreiben ist:

$$s = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right). \tag{1}$$

Wir können jetzt noch nähere Aussagen über die Eigenschaften dieser Lichterregung machen. Dieselbe muß nämlich im polarisierten Lichte offenbar eine gerichtete Größe, ein sogenannter Vektor sein; Vektoren sind z. B. eine Strecke, eine Geschwindigkeit, eine Kraft usw., im Gegensatz zu einer ungerichteten Größe, einem sogenannten Skalar, wie z. B. der Dichte, der Temperatur. Wenn die Lichterregung im polarisierten Lichte ein Skalar wäre, so könnten keine seitlichen Verschiedenheiten vorhanden sein. Um diese darzustellen, muß s ein Vektor sein, der jedenfalls nicht vollständig mit der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes zusammenfällt, da sonst auch keine seitlichen Verschiedenheiten eintreten könnten. Wir wollen daher s jetzt kurz als Lichtvektor bezeichnen. Einen Vektor kann man nach den drei rechtwinkligen Achsen x, y, z in drei Komponenten zerlegen, wir wollen die Komponenten von s nennen u, v, w. Die allgemeinste Lichtbewegung, welche in einem beliebigen Punte P bestehen kann, wird daher dargestellt durch:

$$u = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p\right), \quad v = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + q\right),$$
$$w = C \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + r\right). \tag{2}$$

Man erhält eine anschauliche Bedeutung dieser Gleichungen, wenn man vom Koordinatenanfang aus zu jeder Zeit den resultierenden Lichtvektor s nach Größe und Richtung durch eine Strecke einträgt. Der Endpunkt $\mathfrak{E}$ dieser Strecke wird erhalten, wenn man u, v, w als seine rechtwinkligen Koordnaten auffaßt. Dieser Endpunkt $\mathfrak{E}$ beschreibt im Laufe der Zeit eine gewisse Bahn (wir wollen sie Erregungsbahn nennen), die aus den Gleichungen (2) durch Elimination von t erhalten wird. Man kann (2) schreiben:

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{A} &= \sin 2\pi\frac{t}{T}\cdot\cos p + \cos 2\pi\frac{t}{T}\cdot\sin p\,, \\
\frac{v}{B} &= \sin 2\pi\frac{t}{T}\cdot\cos q + \cos 2\pi\frac{t}{T}\cdot\sin q\,, \\
\frac{w}{C} &= \sin 2\pi\frac{t}{T}\cdot\cos r + \cos 2\pi\frac{t}{T}\cdot\sin r\,.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit bezw. $\sin(q-r)$ $\sin(r-p)$, $\sin(p-q)$ und Addition erhält man:

$$
\frac{u}{A}\sin(q-r) + \frac{v}{B}\sin(r-p) + \frac{w}{C}\sin(p-q) = 0, \tag{4}
$$

d. h. da eine lineare Gleichung zwischen den u, v, w besteht, so *ist die Erregungsbahn stets eine ebene Kurve.*

Die Gleichungen ihrer Projektionen auf die Koordinatenebenen erhält man durch Elimination von t aus je zwei der Gleichungen (3). So folgt z. B. aus den beiden ersten dieser Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\sin 2\pi\frac{t}{T}(\cos p\sin q - \cos q\sin p) &= \frac{u}{A}\sin q - \frac{v}{B}\sin p\,, \\
\cos 2\pi\frac{t}{T}(\cos p\sin q - \cos q\sin p) &= -\frac{u}{A}\cos q + \frac{v}{B}\cos p\,,
\end{aligned}
$$

d. h. durch Quadrieren und Addieren dieser beiden Gleichungen:

$$
\sin^2(p-q) = \frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} - \frac{2uv}{AB}\cos(p-q). \tag{5}
$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ellipse, deren Hauptachsen in die Koordinatenrichtungen fallen, wenn $p-q=\pi/2$ ist. *Im allgemeinsten Falle ist daher die Erregungsbahn eine ebene, elliptische Kurve.* Man hat dann sogenantes *elliptisch polarisiertes Licht.* Wenn die Bahnellipse zu einem Kreise wird, so hat man *zirkular-polarisiertes Licht.* Dies tritt z. B. ein, wenn $w=o$ wäre, und $A=B$, $p-q=\pm+\pi/2$, so daß entweder der Ansatz:

$$
u = A\sin 2\pi\frac{t}{T},\quad v = A\cos 2\pi\frac{t}{T} \tag{6}
$$

oder der Ansatz:

$$
u = A\sin 2\pi\frac{t}{T},\quad v = -A\cos 2\pi\frac{t}{T} \tag{6'}
$$

besteht. Man unterscheidet diese beiden Ansätze als *rechts-* und *links-zirkular polarisiertes Licht.* Wenn nämlich der Endpunkt $\mathfrak{E}$ des Lichtvektors im Sinne des Uhrzeigers rotiert, falls man dem Strahl entgegensieht, so hat man rechts-zirkular polarisiertes Licht.

Wenn die Bahnellipse zu einer geraden Linie degeneriert, so hat man geradlinig-polarisiertes Licht. Dies tritt z. B. ein, wenn $w = o$ wäre, und $p - q = o$, oder $= \pi$ wäre. Die Bahnlinie wäre dann nach (5):

$$\frac{u}{A} \pm \frac{v}{B} = o. \tag{7}$$

Die Intensität der Lichterregung haben wir früher proportional dem Quadrat A der Amplitude des Lichtvektors gesetzt. Diesen Standpunkt müssen wir auch jetzt festhalten und berücksichtigen, daß das Quadrat der Amplitude durch die Summe der Quadrate der Amplituden der drei Komponenten gegeben ist. Die Lichtintensität J ist also, bei Annahme der Gleichungen (2):

$$J \sim A^2 + B^2 + C^2. \tag{8}$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Erregungsbahn beschaffen ist bei den in früheren Paragraphen schlechthin als polarisiertes Licht bezeichneten Fällen, die bei Doppelbrechung und Reflexion unter dem Polarisationswinkel vorliegen. Das Hauptcharakteristische ist, daß zwei rechtwinklig zueinander polarisierte Strahlen nie interferieren, sondern stets die Summe der Einzelintensitäten ergeben.

Superponieren wir nun zu dem Strahl (2), dessen Fortpflanzungsrichtung die z-Achse sein soll, einen rechtwinklig polarisierten Strahl gleicher Intensität, dessen Komponenten u', v', w' seien und der eine beliebige Phasenänderung δ gegen den Strahl (2) besitzen kann, so müssen wir schreiben:

$$u' = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + q + \delta\right), \quad v' = -A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p + \delta\right), \tag{9}$$
$$w' = C \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + r + \delta\right).$$

Denn abgesehen von der Phasenänderung δ muß die Gleichung dieses Strahles in die Gleichungen (2) übergehen, wenn man das Koordinatensystem um 90^0 um die z-Achse drehen würde.

Durch Superposition beider Strahlen (2) und (9), d. h. durch Bildung von $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$ erhält man nach der Regel oben auf S. 123 [dortige Formel (11)] die Amplitudenquadrate der drei Komponenten:

$$A'^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\delta + q - p),$$
$$B'^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\delta + p - q),$$
$$C'^2 = 2C^2(1 + \cos\delta).$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen folgt unter Rücksicht auf (8) für die resultierende Intensität J':

$$J' = 2J + 2C^2 \cos\delta - 4AB \sin\delta \sin(q - p).$$

Da nun J' nach der Beobachtung einfach gleich der doppelten Intensität der Einzelstrahlen ist, d. h. ganz unabhängig von δ beobachtet wird, so folgt $C = o$, d. h. der Lichtvektor liegt senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung (Transversal-Wellen), ferner folgt $\sin(q - p) = o$, d. h. nach (5) bezw. (7) ist die Erregungsbahn eine gerade Linie.

Die durch Doppelbrechung (und Reflexion unter dem Polarisationswinkel) entstehenden Strahlen sind also geradlinig polarisierte, transversale Wellen.

Da wir S. 231 sahen, daß die Eigenschaften des polarisierten Strahles symmetrisch in bezug auf seine Polarisationsebene sein müssen, so liegt der Lichtvektor entweder in der Polarisationsebene oder senkrecht zu ihr. Auf diese Frage wird nun ein Licht geworfen durch folgende Versuchsanordnung:

6. Stehende Wellen durch schief einfallendes polarisiertes Licht. Als Wiener mit polarisiertem Licht, welches unter 45° auf den Spiegel fiel, die Bildung stehender Wellen untersuchte (vgl. oben S. 148), erhielt er dieselben dann sehr deutlich, wenn die Polarisationsebene mit der Einfallsebene des Spiegels zusammenfiel. Dagegen verschwand die Bildung stehender Wellen vollkommen, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes senkrecht zur Einfallsebene stand. Man muß daraus schließen, daß der für die photographische Wirkung[1]) maßgebende Lichtvektor senkrecht zur Polarisationsebene liegt, denn stehende Wellen können sich nur bilden, wenn die Lichtvektoren der einfallenden und reflektierten Welle einander parallel sind; sind sie aber senkrecht zueinander, so hört jede Andeutung von Interferenz auf.

Wir werden nun allerdings auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie zu der Anschauung gelangen, daß die oben aufgeworfene Frage keinen Sinn hat, wenn man nur von der Richtung des Lichtvektors schlechthin spricht. Denn es treten in jener Theorie (und auch in jeder anderen) stets zwei Vek-

1) Dasselbe gilt für die Fluoreszenzwirkung stehender Wellen. Vgl. oben S. 149, Anm. 1.

toren notwendig miteinander verknüpft auf, welche senkrecht gegeneinander stehen (elektrische und magnetische Kraft). Man kann aber wohl danach fragen, welcher dieser beiden Vektoren für eine bestimmte Lichterscheinung maßgebend ist, oder ob das eventuell beide Vektoren sind. Wäre dies z. B. bei der photographischen (photochemischen) Wirkung der Fall, so könnte man nach dem Wienerschen Verfahren auch bei senkrechter Inzidenz überhaupt keine stehenden Wellen nachweisen, da die Bäuche und Knoten für jeden der beiden Vektoren gerade abwechselnd liegen, d. h. die Knoten des einen Vektors auf den Bäuchen des anderen und umgekehrt. Es folgt dies aus der später zu entwickelnden, vertieften Theorie des Lichtes. Daß aber tatsächlich stehende Wellen zu beobachten sind, zeigt, daß für die photochemische und ebenso für die Fluoreszenzwirkung tatsächlich nur der eine Lichtvektor maßgebend ist, und zwar, wie aus dem erwähnten Versuche mit polarisiertem Licht hervorgeht, derjenige, welcher senkrecht zur Polarisationsebene liegt.

Auch die Erscheinungen in pleochroitischen Kristallen, wie z. B. im Turmalin, knüpfen am besten an diesen Lichtvektor an.

7. Lage des maßgebenden Lichtvektors in Kristallen. In Kristallen ist die Lichtgeschwindigkeit von der Lage der Wellennormale und der Polarisationsebene abhängig. Ebenso ist in den sogenannten pleochroitischen Kristallen (Turmalin z. B.) die Absorption des Lichtes von der Lage der Wellennormale und der Polarisationsebene abhängig. Es stellt sich nun heraus[1]: daß man zur einfachsten Beschreibung dieser Erscheinungen gelangt, wenn man den Lichtvektor als senkrecht gegen die Polarisationsebene liegend annimmt. Dann ist nämlich Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorption[2] einer Welle nur abhängig von der Lage des Lichtvektors gegen die Kristallachsen. — Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel: Eine parallel zur Hauptachse geschnittene Turmalinplatte ändert ihre Helligkeit und Farbe nicht, wenn man die Platte um die Hauptachse dreht, d. h. das Licht schief hindurchgehen läßt derart, daß die Hauptachse senkrecht zum Lichtstrahl bleibt. Dagegen ändert sich die Helligkeit der Platte bedeutend, wenn man sie um die zur Hauptachse senk-

1) Dies ist weiter unten im II. Abschnitt, Kap. III, § 7 näher ausgeführt.

2) Auch die Fluoreszenzerscheinungen in Kristallen führen auf diesen Schluß (vgl. Lommel, Wied. Ann. 44, S. 311).

rechte Achse dreht, welche in der Platte liegt. Die Polarisationsebene des austretenden Strahles liegt im ersten Falle senkrecht zur Hauptachse, d. h. der Drehungsachse der Platte, im zweiten Falle parallel zur Drehungsachse derselben. Der senkrecht zur Polarisationsebene liegende Vektor ist daher im ersten Falle beständig parallel zur Hauptachse des Turmalins, im zweiten Falle ändert er aber seine Lage gegen die Hauptachse des Turmalins.

Man kennt bisher noch keinen Fall, für welchen ein Lichtvektor allein maßgebend[1]) wäre, der in der Polarisationsebene liegt. Insofern kann man daher kurz sagen: Der Lichtvektor liegt senkrecht zur Polarisationsebene.[2])

8. Das natürliche und teilweise polarisierte Licht. Daß man durch Doppelbrechung aus einem natürlichen Lichtstrahl zwei geradlinig polarisierte erhält, ist oben abgeleitet. Durch Superposition zweier geradlinig polarisierter Strahlen gleicher Fortpflanzungsrichtung, aber verschiedener Polarisationsrichtung und verschiedener Phase erhält man, wie z. B. aus Gleichung (5) hervorgeht, elliptisch polarisiertes Licht. Dasselbe ist noch rein transversal, da die Ebene der Ellipse senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung liegt.

Wie wir später ausführlicher betrachten werden, erhält man bei Durchgang eines geradlinig polarisierten Strahles durch eine doppelbrechende Kristallplatte elliptisch polarisiertes Licht, wenn man nicht die Wirkung der beiden durch Doppelbrechung im Kristall entstehenden Strahlen voneinander trennt. — Aber auch den durch die Gleichungen (2) dargestellten allgemeinsten Fall nicht transversalen, elliptisch-polarisierten Lichtes kann man durch Totalreflexion, oder in absorbierenden Körpern realisieren, wie weiter unten angeführt werden wird.

Es drängt sich nun aber noch die Frage auf: Wie ist das natürliche Licht beschaffen? Da dasselbe keine seitliche Verschiedenheit zeigt und andererseits auch zirkular polarisiertes Licht durchaus nicht identisch ist mit natürlichem Licht, da ersteres bei

---

1) Maßgebend soll heißen: zur einfachsten Beschreibung der Erscheinungen dienend.

2) Man gewinnt wenigstens durch diese Annahme eine einfachere Darstellung der optischen Erscheinungen, als wenn man die (auch mögliche) Annahme macht, daß der Lichtvektor parallel zur Polarisationsebene liegt.

Durchgang durch eine doppelbrechende Kristallplatte sofort seitliche Verschiedenheiten annimmt, das natürliche Licht aber nicht (wenn man nicht die beiden durch Doppelbrechung entstandenen Strahlen voneinander trennt), so bleibt nur die Annahme übrig, daß für ein gewisses Zeitintervall δt auch das natürliche Licht geradlinig, oder elliptisch polarisiert ist, daß aber im Laufe längerer Zeit die Erregungsbahn ihre Lage und Gestalt derartig wechselt, daß im Mittel der Lichtstrahl vollkommen symmetrisch rings um seine Fortpflanzungsrichtung herum beschaffen ist.

Da im natürlichen Lichte noch Interferenzen von 1200000 λ Gangunterschied beobachtet wurden (vgl. S. 142 Anm.), so muß also in diesem Falle das Licht mindestens 1200000 Schwingungen ausführen, bevor es seinen Polarisationszustand wechseln kann. Da aber selbst 1 Million Schwingungen in einer sehr kurzen Zeit, nämlich in $20 \cdot 10^{-10}$ sek. ausgeführt werden, so könnte das menschliche Auge doch nie, selbst für eine kurze Zeit, eine Polarisation des natürlichen Lichtes wahrnehmen, auch wenn der Schwingungszustand erst allemal nach mehreren Millionen Schwingungen wechseln sollte. Denn für die kürzesten Lichteindrücke, die man herstellen kann, hätte der Schwingungszustand doch schon viele tausendmal gewechselt.

Betrachten wir nun die beiden von Fresnel und Arago ausgesprochenen und auf S. 234 angeführten Interferenzgesetze, so ist das zweite Gesetz, daß zwei rechtwinklig polarisierte Strahlen interferieren, wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden und ursprünglich aus einem polarisierten Strahle entstanden sind, sofort einleuchtend, denn man geht dabei von einer bestimmten Erregungsbahn aus und läßt schließlich wiederum nur einheitlich polarisiertes Licht interferieren. Derselbe Fall muß eintreten, wenn man von einem natürlichen Lichtstrahl zwei rechtwinklig polarisierte ableitet und sie dann auf dieselbe Polarisationsebene bringt, solange der Schwingungszustand im natürlichen Lichte nicht gewechselt hat, d. h. innerhalb des obigen Zeitintervalls δt. Auch für ein anderes Zeitintervall $\delta t'$ müssen Interferenzfransen aus dem natürlichen Lichte in jenem Falle zu erhalten sein, sie liegen aber nicht an derselben Stelle, an welcher die Fransen für das erste Intervall δt lagen. Denn ein Wechsel der Erregungsbahn hat den Effekt, daß die beiden abgeleiteten, rechtwinklig zueinander polarisierten Strahlen eine Phasendifferenz erhalten. Daher entsteht als Mittelwert über viele Zeitintervalle

δt nur eine gleichmäßige Lichtintensität, d. h. zwei von einem natürlichen Lichtstrahl herrührende rechtwinklig polarisierte Strahlen interferieren nicht, auch wenn sie auf dieselbe Polarisationsrichtung gebracht werden. Das ist das erste der oben genannten Fresnel-Aragoschen Gesetze.

Unter teilweise polarisiertem Licht versteht man solches, welches durch Superposition von natürlichen und einheitlich polarisiertem entsteht. Teilweise polarisiertes Licht besitzt seitliche Verschiedenheiten, doch kann man nie aus ihm geradlinig polarisiertes Licht herstellen, was sonst bei einheitlich polarisiertem Licht stets möglich ist, wie im folgenden auseinandergesetzt wird.

9. Experimentelle Untersuchung elliptisch polarisierten Lichtes. Um die Gestalt der Erregungsbahn von elliptisch polarisiertem Lichte zu finden, verwandelt man dasselbe mit Hilfe einer doppelbrechenden Kristallplatte in geradlinig polarisiertes Licht. Wie schon oben S. 229 besprochen wurde, wird nämlich geradlinig polarisiertes Licht beim Durchgang durch eine doppelbrechende Kristallplatte in zwei senkrecht zueinander polarisierte Wellen zerlegt. Die Lage der Lichtvektoren in beiden Wellen wollen wir als Hauptschwingungsrichtungen bezeichnen. Dieselben haben eine feste Lage in der Kristallplatte (und sind senkrecht zueinander). Da nun beide Wellen im Kristall sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen, so erteilt die Kristallplatte beiden Wellen eine relative Phasendifferenz, die von der Natur und Dicke der Platte abhängt. — Ein einfallender Lichtvektor, welcher schon in einer der beiden Hauptschwingungsrichtungen der Kristallplatte liegt, wird nicht durch dieselbe in zwei Wellen zerlegt.

Man kann nun auf zwei verschiedenen Wegen vorgehen: Entweder benutzt man eine Kristallplatte bestimmter Dicke, welche den beiden in ihr fortgepflanzten Wellen eine Phasendifferenz $\pi/2$ (Gangunterschied $^1/_4\ \lambda$) erteilt (z. B. $^1/_4\ \lambda$-Glimmerplättchen, Senarmonts Kompensator). Wird diese Kristallplatte so gedreht, daß ihre Hauptschwingungsrichtungen mit den Hauptachsen der elliptischen Erregungsbahn des einfallenden Lichtes zusammenfallen, so muß offenbar das austretende Licht geradlinig polarisiert sein und zwar hängt die Lage der Polarisationsebene vom Verhältnis der Hauptachsen der einfallenden Erregungs-Ellipse ab. Denn die beiden in der Richtung der Hauptachsen dieser Ellipse liegenden Lichtvektoren haben nach dem Durchgang durch die

Kristallplatte die Phasendifferenz o oder π, und dann entsteht nach S. 238 geradlinig-polarisiertes Licht, bei dem die Lage des Lichtvektors aus der dortigen Formel (7) folgt. Betrachtet man daher das austretende Licht noch durch ein drehbares Nicol, so tritt völlige Dunkelheit bei geeigneter Stellung desselben ein. Zur Untersuchung muß man daher sowohl die Kristallplatte (um ihre Normale) als das Nicol so drehen, bis daß volle Dunkelheit eintritt. Die Lage der Kristallplatte ergibt dann die Lage der Hauptachsen der Erregungsellipse des einfallenden Lichtes, die Lage des Nicols das Verhältnis jener Hauptachsen.

Oder man benutzt eine nicht drehbare Kristallplatte veränderlicher Dicke (z. B. Quarzkeil), um den beiden Komponenten u, v des einfallenden Lichtes, welche in den beiden Hauptschwingungsrichtungen der Platte liegen, eine derartige Phasendifferenz zu erteilen, daß sie nach dem Austritt aus der Kristallplatte geradlinig polarisiertes Licht ergeben. Ob dieses eintritt, wird wiederum mit einem drehbaren Nicol geprüft. Die Lage desselben ergibt daher das Amplitudenverhältnis der einfallenden Komponenten u, v, während ihre ursprüngliche Phasendifferenz aus derjenigen Dicke der Kristallplatte zu berechnen ist, welche das einfallende Licht in geradlinig polarisiertes verwandelt.

Um bequem auch die Phasendifferenz Null im Kristall herstellen zu können, ist es praktisch, zwei Quarzkeile verschiedener Orientierung so zu kombinieren, daß beide Keile eine Phasendifferenz von verschiedenem Vorzeichen hervorbringen. In Figur 79 ist z. B. A ein Quarzkeil, dessen kristallographische Hauptachse parallel zur Keilkante liegt, während im Keil B die Hauptachse senkrecht zur Keilkante und parallel zur Oberfläche liegt (Babinets Kompensator). Beide Keile wirken mit der Differenz ihrer Dicken. Bei einfallendem homogenem elliptisch polarisiertem Lichte ist daher bei richtiger Stellung des hinteren (analysierenden) Nicols dieser Kompensator von schwarzen Streifen durchzogen, die parallel zu den Keilkanten verlaufen. Diese Streifen wandern über den Kompensator hin, falls der eine Quarzkeil gegen den anderen verschoben wird. Hierzu dient eine Mikrometerschraube. Aus der Stellung derselben, falls z. B. ein Streifen eine bestimmte Lage haben soll, ergibt sich in einfacher Weise die Phasendifferenz derjenigen beiden Komponenten u, v des einfallenden Lichtes, welche parallel den



Fig. 79.

beiden Hauptachsen der beiden Quarzkeile schwingen, wenn man zur Eichung des Instruments geradlinig polarisiertes Licht einfallen läßt.

Die Konstruktion muß etwas geändert werden, wenn ein größeres, optisch homogenes Feld von geradlinig polarisiertem Lichte geschaffen werden soll. Dann muß nämlich an Stelle eines Quarzkeiles eine planparallele Quarzplatte von veränderlicher Dicke als Kompensator verwendet werden. Man stellt eine solche Platte her durch zwei mikrometrisch übereinander verschiebbare Quarzkeile A, A' gleicher Orientierung mit entgegengesetzt liegenden Keil-

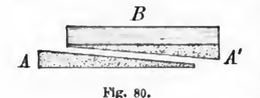


Fig. 80.

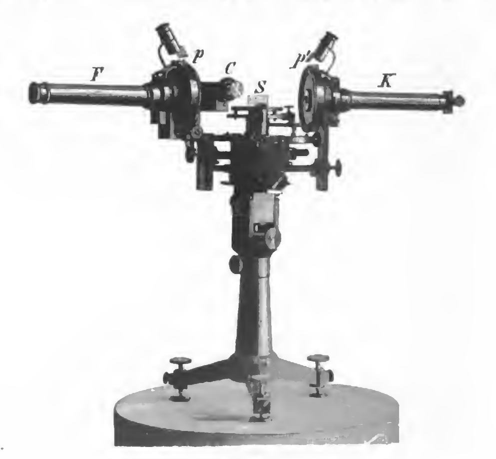


Fig. 81.

winkeln. Um auch die Phasendifferenz Null bequem durch den Kompensator hervorbringen zu können, wird mit den Keilen A, A' noch kombiniert eine planparallele Quarzplatte B, deren Hauptachse senkrecht liegt gegen die der Keile A, A', so daß die Differenz der Dicke von B und der Summe der Dicken der Keile A, A' wirkt. In Figur 80 ist diese Konstruktion (Soleil-Babinetscher Kompensator) skizziert. In den Keilen A, A' liegt

die Hauptachse parallel zu den Keilkanten, in der Platte B liegt sie senkrecht dazu und parallel zur Oberfläche. Zweckmäßig kann ein Keil, z. B. A', fest auf die Platte B gekittet werden, während A mikrometrisch verschoben wird. Bei geeigneter Stellung der Mikrometerschraube und des hinteren analysierenden Nicols wird des ganze Gesichtsfeld dunkel.

Diese Konstruktion des Kompensators ist besonders bequem anzuwenden, um die Modifikation zu erfahren, welche geradlinig polarisiertes einfallendes Licht durch Reflexion oder Brechung erfährt. In einem Spektrometer (Figur 81) enthalten das Kollimatorrohr K und das Fernrohr F Nicolsche Prismen, deren Lage an den Teilkreisen p, p' abzulesen ist. An dem Fernrohr ist der Babinet-Soleilsche Kompensator C vorgesteckt; seine Hauptschwingungsrichtungen (Hauptachsen) liegen parallel und senkrecht zur Einfallsebene des Lichtes. S ist der reflektierende oder brechende Körper. Nicols und Kompensator sind dort eingeschaltet, wo die Lichtstrahlen parallel sind.[1])

1) Wegen Benutzung eines auf Unendlich eingestellten Fernrohres kann man daher die einfache Babinetsche Konstruktion nicht benutzen.

II. Abschnitt.

Optische Eigenschaften der Körper.

Kapitel I.

Theorie des Lichtes.

1. Mechanische Theorie. Eine Theorie des Lichtes will die Differentialgleichung, welcher der Lichtvektor gehorcht, und die Grenzbedingungen, welche beim Übergang des Lichtes über die Grenze zweier verschiedener Körper zu erfüllen sind, auf Grund einer gewissen Hypothese mathematisch ableiten. Die Differentialgleichung (12) (S. 161) des Lichtvektors tritt nun allemal bei Bewegungen in einem elastischen Körper auf, und daher lag es nahe, für eine Theorie des Lichtes zunächst die Anschauungen der Elastizitätstheorie zu verwerten. Nach dieser mechanischen Auffassung soll der Lichtvektor die Verschiebung der Ätherteilchen aus ihrer Gleichgewichtslage sein, und der Äther, d. h. der Raum, in welchem sich Lichtschwingungen fortpflanzen können, wird als elastischer Stoff von sehr geringer Dichte aufgefaßt.

Nun liegt aber eine Schwierigkeit sofort in der Transversalität ebener Lichtwellen. Im allgemeinen pflanzen sich in einem elastischen Körper sowohl transversale als longitudinale Schwingungen fort, in Flüssigkeiten sogar letztere allein, während Transversal-Schwingungen allein nur in einem festen Körper auftreten, dessen Teile nie Volumenänderungen erleiden, der also vollkommen inkompressibel ist. — Die widerstandslose Bewegung der Weltkörper im leeren Raume (dem freien Äther) würde nun entschieden dem Äther den Zustand einer Flüssigkeit zuschreiben, nicht den eines

inkompressiblen festen Körpers. — Indessen kann man vielleicht diese Schwierigkeit durch die Überlegung überwinden, daß sich der Äther solchen groben Kräften gegenüber, wie sie bei der Massenbewegung der Himmelskörper auftreten, wie eine reibungslose Flüssigkeit verhält, daß aber bei den so außerordentlich schnell wechselnden Kräften, wie sie bei Lichtschwingungen vorkommen, doch ein kleiner Rest von Reibung im Äther derartigen Einfluß gewinnt, daß er sich Lichtschwingungen gegenüber wie ein starrer Körper verhält.

Es tritt aber noch eine zweite Schwierigkeit ein bei Aufstellung der Grenzbedingungen des Lichtvektors. Die Elastizitätstheorie liefert für den Übergang der Bewegung über die Grenze zweier elastischer Körper 6 Grenzbedingungen, nämlich die Gleichheit der Verschiebungskomponenten der Körperteilchen und die Gleichheit der Komponenten der elastischen Druckkräfte zu beiden Seiten der Grenze. Um diese 6 Grenzbedingungen zu befriedigen, müssen aber notwendig außer transversalen Wellen auch longitudinale auftreten. Es soll hier nicht genauer erörtert werden,[1] wie die verschiedenen mechanischen Theorien diese Klippe umschiffen, es mag nur erwähnt werden, daß die meisten Theorien nur 4 Grenzbedingungen beibehalten.

Um Übereinstimmung mit den Beobachtungen über die Beschaffenheit des reflektierten Lichtes zu erhalten, speziell z. B. um das Brewstersche Gesetz über den Polarisationswinkel (vgl. oben S. 233) zu folgern, muß man entweder annehmen, daß die Dichte des Lichtäthers in allen Körpern die gleiche sei, oder die Elastizität. Ersteres ist der F. Neumannsche Standpunkt, letzteres der Fresnelsche. Aus ersterem folgt, daß die Verrückung der Ätherteilchen einer linear polarisierten Welle in der Polarisationsebene liegt, während sie nach Fresnel senkrecht zu dieser Ebene steht.

3. Elektromagnetische Theorie. Die Grundhypothese, welche von Faraday ausgesprochen, von Maxwell mathematisch ausgebaut wurde, ist, daß die Fortpflanzung des Lichtes in einem das Licht nicht absorbierenden Medium identisch ist mit der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in einem Isolator. Als Lichtvektor kann die elektrische Kraft, oder auch die magnetische Kraft interpretiert werden, beide sind stets gleichzeitig

1) Genaueres hierüber findet sich in der Darstellung des Verf. in Winkelmanns Handbuch, Optik, 2. Aufl., S. 1140—1166.

in Schwingung begriffen und stehen in ebenen linearpolarisierten Wellen senkrecht aufeinander. Durch diese Vielseitigkeit der Theorie wird die nicht spezieller formulierte Frage nach der Lage des Lichtvektors zur Polarisationsebene gegenstandslos, indes ist es aus gewissen oben S. 239 angeführten Gründen einfacher, die elektrische Kraft, welche senkrecht zur Polarisationsebene liegt, als Lichtvektor zu interpretieren. Man gelangt dadurch zu den Resultaten der Fresnelschen mechanischen Theorie, während die Resultate der F. Neumannschen Theorie erhalten werden, falls die magnetische Kraft als Lichtvektor interpretiert wird.

Der Vorteil der elektromagnetischen Theorie liegt wesentlich in drei Punkten:

1. Die Transversalität der Wellen folgt direkt aus der von Maxwell gewonnenen einfachsten Darstellung der elektromagnetischen Vorgänge, nach der es nur geschlossene elektrische Ströme gibt.

2. Die Grenzbedingungen sind die in jedem elektromagnetischen Felde gültigen. Man braucht nicht, wie bei den mechanischen Theorien, besondere Annahmen für die Lichtschwingungen zu machen.

3. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume (im freien Äther) und in manchen Fällen auch in ponderabelen Körpern läßt sich aus rein elektromagnetischen Experimenten im voraus berechnen. Dies ist ein Hauptvorteil der Theorie gegenüber den mechanischen Theorien, und dieser Punkt ist fast sofort ausschlaggebend zur Annahme der elektromagnetischen Auffassung der Natur des Lichtes geworden. In der Tat bedeutet dies einen wesentlichen Fortschritt in der Naturkenntnis, wenn in dieser Weise zwei, ursprünglich lose nebeneinander stehende Gebiete, wie die Optik und die Elektrizitätslehre, in meßbar kontrollierbare, nahe Beziehung zueinander treten.

Im folgenden soll der elektromagnetische Standpunkt festgehalten werden. Es mag aber hervorgehoben sein, daß die Darlegungen der vorangegangenen Kapitel durchaus unabhängig von dem besonderen Standpunkte der Theorie sind, d. h. unabhängig davon, was man unter dem Lichtvektor versteht.

3. Die Definition der elekrischen und der magnetischen Kraft. Zwei sehr lange, dünne Magnete üben aufeinander Kraft-

wirkungen aus, die scheinbar von ihren Enden (Polen) ausgehen.

Die Stärken zweier magnetischer Pole m und m_1 werden dadurch definiert, daß sie im Vacuum aufeinander in der Entfernung r die nach mechanischem Maße (nach Länge, Masse und Zeit) zu messende Kraft

$$K = \frac{m \cdot m_1}{r^2} \tag{1}$$

aufeinander ausüben. Danach ist auch ein magnetischer Einheitspol ($m = 1$) definiert als solcher, der auf einen gleichen in der Einheit der Entfernung die Krafteinheit ausübt.

Die Stärke $\mathfrak{H}$ irgend eines magnetischen Feldes in irgend einem Medium[1]) ist die Kraft, welche auf einen magnetischen Einheitspol ausgeübt wird. — Die nach drei rechtwinkligen Achsen x, y, z genommenen Komponenten von $\mathfrak{H}$ seien α, β, γ.

Die magnetischen Kraftlinien geben durch ihre Richtung die Richtung der resultierenden Feldstärke an, durch ihre Dichte die Feldstärke $\mathfrak{H}$ selbst, indem im Vacuum $\mathfrak{H}$ gleich sein soll der Anzahl von Kraftlinien, welche die Flächeneinheit senkrecht durchschneiden. Man gelangt zu einer Darstellung[2]) des Kraftgesetzes (1), wenn man von einem Pole der Stärke m eine Anzahl $4\pi m$ von Kraftlinien austretend denkt, welche sich ohne Unterbrechung (d. h. ohne freie Enden) in den Raum fortsetzen. Denn die Kraftliniendichte ist dann auf einer, um einen einzigen vorhandenen Pol beschriebenen Kugel vom Radius r gleich $m : r^2$, d. h. gleich der Feldstärke $\mathfrak{H}$ nach dem Gesetz (1).

Analoge Definitionen gelten für das elektrische Feld im elektrostatischen Maßsystem:

Die Stärken zweier elektrischer Pole e und e_1 werden dadurch definiert, daß sie im Vakuum aufeinander in der Entfernung r die nach mechanischem Maße zu messende Kraft:

$$K = \frac{e \cdot e_1}{r^2} \tag{2}$$

aufeinander ausüben. Dadurch ist auch ein elektrischer Einheitspol definiert, für welchen $e = 1$ ist.

Die Stärke $\mathfrak{F}$ irgend eines elektrischen Feldes in

1) Dasselbe kann sowohl mit Materie erfüllt, als auch leer sein (Vakuum).
2) Diese Darstellung ist allerdings wohl kaum experimentell ausführbar.

irgend einem Medium ist die Kraft, welche auf einen elektrischen Einheitspol ausgeübt wird. — Die nach den drei rechtwinkligen Achsen x, y, z genommenen Komponenten von $\mathfrak{F}$ seien X, Y, Z.

Die elektrischen Kraftlinien geben durch ihre Richtung die Richtung der resultierenden Feldstärke $\mathfrak{F}$ an, die Anzahl der Kraftlinien, welche die Flächeneinheit senkrecht durchschneiden, elektrischen soll im Vacuum gleich $\mathfrak{F}$ sein. Aus einem Pole der Stärke e treten daher $4\pi e$ Kraftlinien aus, weil das Gesetz (2) gilt.

4. Definition des elektrischen Stromes nach elektrostatischem und elektromagnetischem Maße. Als elektrischer Strom i nach elektrostatischem Maß, welcher durch irgend einen Querschnitt q geht, wird definiert die Anzahl elektrostatischer Einheiten, welche in der Zeiteinheit durch q gehen. Geht also im Zeitelement dt die Elektrizitätsmenge de durch q, so ist der Strom:

$$i = \frac{de}{dt}. \tag{3}$$

Ist der Querschnitt q gleich der Flächeneinheit, so wird i gleich der Stromdichte j. Die Komponenten der Stromdichte j_x, j_y, j_z werden erhalten, wenn man q senkrecht zur x-, y- oder z-Achse wählt.

Der elektrische Strom i' nach elektromagnetischem Maße wird durch seine magnetischen Wirkungen definiert. Man kann einen dauernden elektrischen Strom in einem Metalldraht leicht herstellen, wenn man ihn an die Pole eines galvanischen Elementes anlegt. Auch hier handelt es sich um die Verschiebung bestimmter Elektrizitätsmengen durch den Querschnitt des Drahtes, denn die isolierten Pole des Elementes verhalten sich wie elektrostatisch geladene Körper. Ein Magnetpol erfährt gewisse Kraftäußerungen in der Nähe des elektrischen Stromes. Die Stromstärke i' nach elektromagnetischem Maße wird dadurch definiert, daß bei einmaliger Umkreisung des Stromes von einem Magnetpol der Stärke $m = 1$ die Arbeit $\mathfrak{A} = 4\pi i'$ ausgeübt wird.[1])

Nehmen wir z. B. ein Rechteck der Seitenlängen dx, dy (vgl. Figur 82), welches senkrecht von einem Strome $i' = j'_z \cdot dx\, dy$ durch-

1) Die Arbeit $\mathfrak{A}$ ist unabhängig von dem besonderem Wege des Magnetpoles und auch unabhängig von der Natur des den Strom umgebenden Mediums. Vgl. hierüber die Lehrbücher des Elektromagnetismus (z. B. die Physik des Äthers des Verf. S. 77, 83).

flossen wird. j'_z ist die z-Komponente der Stromdichte in elektromagnetischem Maße. Fließt der Strom von hinten nach vorn, so daß die positiven Koordinatenrichtungen die in der Figur gezeichneten Lagen zu einander haben[1]), so wird nach der sogenannten Ampèreschen Regel ein positiver Magnetpol in der Richtung der Pfeile der Figur abgelenkt. (Figur 82.) Die ganze Arbeit $\mathfrak{A}$ beim Verschieben eines Magnetpoles $m = +1$ von A über B nach C, D und nach A zurück ist also:

$$\mathfrak{A} = \alpha \cdot dx + \beta' \cdot dy - \alpha' \cdot dx - \beta \cdot dy, \tag{4}$$

wenn α und β die Komponenten der magnetischen Kraft, wie sie längs AB und AD wirken, bezeichnet, während α' und β' die längs DC und BC wirkenden Komponenten sind. α' unterscheidet sich nur dadurch von α, daß es längs einer Linie wirkt, deren y-Koordinaten um dy größer sind als die y-Koordinaten der Linie AB, längs der α wirkt. Bei genügender Kleinheit von dy hat also $(\alpha' - \alpha) : dy$ die Bedeutung des partiellen Differentialquotienten $\partial\alpha : \partial y$, so daß man hat:

$$\alpha' = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy.$$

Analog ist

$$\beta' = \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx,$$

so daß aus (4) entsteht:

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{4'}$$

Da nun nach der Definition der Stromstärke i' diese Arbeit gleich $4\pi i' = 4\pi j'_z \cdot dx\, dy$ sein soll, so entsteht:

$$4\pi j'_z = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

und analog würden zwei andere Differentialgleichungen abzuleiten sein:

$$4\pi j'_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$4\pi j'_y = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}. \tag{5}$$

Dieses sind die Maxwellschen Differentialgleichungen des

1) Diese relative Lage der Koordinatenrichtungen soll im folgenden stets festgehalten werden.

elektromagnetischen Feldes. Damit sie mit diesen Vorzeichen, wie in (5), gültig sind, muß das Koordinatensystem entsprechend der Figur (82) gewählt sein. — Man kann in diesen Gleichungen die elektromagnetisch definierte Stromdichte j' ersetzen durch die elektrostatisch definierte j, wenn man das Verhältnis c einführt, in welchem beide Maßsysteme, das elektrostatische zu dem elektromagnetischen, stehen. Wir wollen also setzen

$$(6) \qquad i:i' = c, \; j_x : j'_x = c, \text{ u. s. w.}$$

Daher wird nach (5)

$$(7) \qquad \frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{4\pi}{c} j_y = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{4\pi}{c} j_z = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Diese Gleichungen sind unabhängig von der Natur des Mediums, in welchem die elektromagnetischen Vorgänge bestehen (nach der Anm. 1 der S. 250), sie gelten daher in jedem, auch in einem inhomogenen oder kristallinischen Medium.

Die Verhältniszahl c kann man erhalten, wenn man die magnetische Wirkung beobachtet, die durch die Entladung einer nach elektrostatischem Maß gemessenen Menge e entsteht. Es ergibt sich c gleich der Dimension einer Geschwindigkeit, die den Wert hat

$$c = 3 \cdot 10^{10} \; cm/sec.$$

5. Definition des magnetischen Stromes. Analog wie der elektrische Strom soll der magnetische Strom, der durch irgend einen Querschnitt q geht, definiert werden als das Quantum magnetischer Polstärke, welches durch q in der Zeiteinheit fließt. Falls q gleich der Flächeneinheit ist, sprechen wir von der Dichte des magnetischen Stromes, ihre Komponenten seien durch s_x, s_y, s_z bezeichnet.

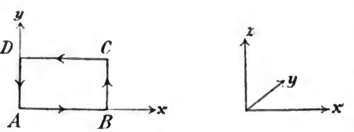


Fig. 82.

Die Formeln (7) sind ein Ausdruck dafür, daß ein elektrischer Strom von zirkularen magnetischen Kräften um sich herum begleitet ist. Andererseits muß aber auch ein magnetischer Strom von zirkularen elektrischen Kräften um sich herum begleitet sein. (Dieser Vorgang wird als Magnet-Induktion bezeichnet.) Dies folgt notwendig aus der Anwendung des Energieprinzipes. Denken

wir uns das Rechteck $ABCD$ der Fig. 82 von einem elektrischen Strome der Stärke i nach elektrostatischem Maße umflossen in dem Sinne der eingezeichneten Pfeile, so würde ein positiver Magnetpol von hinten nach vorn, d. h. im Sinne der positiven z-Achse durch das Rechteck hindurch getrieben werden und fortwährend um eine der Rechteckseiten herum kreisen. Diese hierdurch geleistete Arbeit muß darin ein Äqivalent haben, daß der Strom auf konstanter Stärke i nur unter Aufwendung eines gewissen Energiequantums gehalten werden kann, während er jene mechanische Arbeit leistet, m. a. W. durch die mechanische Arbeit muß eine gewisse elektromotorische Gegenkraft erzeugt werden, die überwunden werden muß, falls der Strom auf konstanter Stärke i bleiben soll. Für die Arbeit, welche entsteht, wenn ein elektrischer Einheitspol einmal um das Rechteck im Sinne der Pfeile geführt wird, gilt nun der analoge Ausdruck wie in (4) und (4'), d. h. sie ist

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{8}$$

Um den Strom i während der Zeit t zu erhalten, ist die Arbeit noch mit der Anzahl der umgeführten elektrostatischen Einheiten d. h. mit $i \cdot t$ zu multiplizieren. Diese Arbeit, d. h. $\mathfrak{A} \cdot i \cdot t$, muß nach dem Energieprinzip gleich der Arbeit sein, welche ein Magnetpol der Stärke m ausübt, der innerhalb der Zeit t eine Rechteckseite einmal umkreist; da diese Arbeit nach S. 250 gleich $4\pi m i' = 4\pi m i : c$ ist, so folgt also

$$\mathfrak{A} \cdot i \cdot t = 4\pi m i : c, \text{ d. h. } \mathfrak{A} = 4\pi m : ct. \tag{9}$$

Nun ist aber $m : t$ gleich der Stärke des magnetischen Stromes welcher durch das Rechteck tritt, und $m/t \cdot dx\, dy$ ist gleich der z-Komponente s_z der magnetischen Stromdichte. Daher folgt aus (8) und (9):

$$\frac{4\pi}{c} s_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \tag{10}$$

und analog wären noch zwei andere Gleichungen für s_x und s_y abzuleiten.

In (10) bezeichnen X und Y die elektrischen Kräfte, welche man anwenden muß, um den Strom konstant zu erhalten. Nennt man aber X und Y die durch den magnetischen Strom selbst durch Induktion hervorgerufenen (Gegen-)Kräfte, so sind diese von gleicher

Größe, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet, so daß die Gleichungen entstehen

$$(11)\qquad \frac{4\pi}{c}s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\quad \frac{4\pi}{c}s_y = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\quad \frac{4\pi}{c}s_z = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Auch diese Gleichungen gelten ganz allgemein in jedem Medium, d. h. auch in inhomogener oder kristallinischer Umgebung.

Die Formeln (7) und (11) gelten ganz allgemein in jeder Umgebung. Wir können sie als die Grundgleichungen der Maxwellschen Theorie bezeichnen. Bei allen Erweiterungen der ursprünglichen Maxwellschen Theorie auf Körper mit besonderen optischen Eigenschaften (Dispersion, Absorption, Kristallinität, natürliche und magnetische Rotationspolarisation) bleiben diese Grundgleichungen dieselben; nur die Gleichungen, welche j_x und s_x u. s. w. mit der elektrischen, bezw. magnetischen Kraft verbinden, haben für besondere Fälle verschiedene Formen.

6. Das Vacuum (der freie Äther). Konstante elektrische Ströme kann man nur in Leitern, z. B. in Metallen, herstellen, aber nicht in Isolatoren. Durch Ladungswechsel kann man aber auch in letzteren Ströme herstellen (sogenannte Verschiebungsströme im Gegensatz zu den Leitungsströmen der Leiter), und es ist der Grundpfeiler der Maxwellschen Theorie, daß diese Verschiebungsströme dieselben magnetischen Wirkungen ausüben, wie die Leitungsströme. Durch diesen Grundsatz erreicht Maxwell den Vorzug der größten Einfachheit seiner Theorie gegenüber anderen elektrischen Theorien. — Konstante magnetische Ströme kann man überhaupt nicht herstellen, da es keinen magnetischen Leiter gibt.

Es handelt sich nun darum, wie im freien Äther die elektrische und magnetische Stromdichte von der elektrischen und magnetischen Kraft abhängt. Im freien Äther gibt es keine an gewissen Raumstellen konzentrierten Ladungen e oder m, aber es sind Kraftlinien vorhanden. Nun können wir nach dem auf S. 249 u. 250 ausgesprochenen Satz, daß jede Ladung e oder m $4\pi e$ bezw. $4\pi m$ Kraftlinien aussendet, sagen, daß 4π multipliziert mit der Stromdichte gleich der Änderung der Kraftliniendichte in der Zeiteinheit sein muß, d. h. es ist

$$(12)\qquad \begin{gathered} 4\pi j_x = \frac{\partial N_x}{\partial t},\quad 4\pi j_y = \frac{\partial N_y}{\partial t},\quad 4\pi j_z = \frac{\partial N_z}{\partial t}, \\ 4\pi s_x = \frac{\partial M_x}{\partial t},\quad 4\pi s_y = \frac{\partial M_y}{\partial t},\quad 4\pi s_z = \frac{\partial M_z}{\partial t}, \end{gathered}$$

wobei N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z die Komponenten der elektrischen, bezw. magnetischen Kraftliniendichte sind. — Im Vacuum ist nun aber nach der Definition der S. 249, 250 die Kraftliniendichte gleich der elektrischen, bezw. magnetischen Kraft, so daß für das Vacuum (12) übergeht in:

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t}, \quad 4\pi j_y = \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad 4\pi j_z = \frac{\partial Z}{\partial t},$$
$$4\pi s_x = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad 4\pi s_y = \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad 4\pi s_z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \tag{13}$$

Die Gleichungen (7) und (11) des elektromagnetischen Feldes nehmen daher für den freien Äther die Gestalt an:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{14}$$

7. Isotroper Isolator. In einem mit Materie erfüllten Raume, der isoliert, ändern sich die Kraftgesetze (1) und (2). Bringt man nämlich die elektrischen Pole e, e_1 aus dem leeren Raume in einen isolierenden Körper, z. B. Flüssigkeit, so wirken sie dort schwächer aufeinander als im leeren Raume, so daß man zu setzen hat

$$K = \frac{1}{\varepsilon}\frac{ee_1}{r^2}. \tag{15}$$

Die Konstante ε des Isolators heißt seine Dielektrizitätskonstante. Die Definition gilt auch für feste Isolatoren, nur kann man in ihnen die Anziehungs- oder Abstoßungskräfte der elektrischen Pole nicht so bequem beobachten wie in Flüssigkeiten. Es gibt aber andere Methoden, um auch für feste Körper ihre Dielektrizitätskonstante zu bestimmen, über die aber auf die Lehrbücher über Elektrizität verwiesen sein möge. — Für alle Körper ist die Dielektrizitätskonstante größer als 1.

Analoges gilt auch für die Kräfte zwischen magnetischen Polen, die etwas verändert erscheinen, wenn sie vom Vacuum in einen Körper gebracht werden, so daß man zu schreiben hat

$$K = \frac{1}{\mu}\frac{mm_1}{r^2}. \tag{16}$$

Die Konstante μ heißt die Magnetisierungskonstante des Körpers. Sie ist bald größer als 1 (paramagnetische Körper), bald kleiner als 1 (diamagnetische Körper); sie unterscheidet

sich aber stark von 1 nur in den paramagnetischen Metallen Eisen, Nickel, Kobalt, dagegen in Isolatoren sehr wenig von 1. Auf Isolatoren kommt es aber zunächst allein an, da es sich zunächst um vollkommen durchsichtige Körper handelt, d. h. solche, welche die Energie der elektromagnetischen Wellen ohne Absorption, d. h. ohne sich dabei zu erwärmen, fortpflanzen. In Isolatoren ist der Unterschied von μ gegen 1 so gering (meist nur wenige Tausendstel Prozent), daß wir im folgenden immer $\mu = 1$ setzen können.[1])

Durch die Änderung des Kraftgesetzes (2) in (15) wird in den Gleichungen (13) eine Änderung eintreten, da bei denselben Ladungen, d. h. auch denselben Stromstärken, die elektrische Kraft im Isolator im Verhältnis $1/\varepsilon$ schwächer ist als im Vacuum. Daher ist an Stelle von (13) zu schreiben:

$$4\pi j_x = \varepsilon \frac{\partial X}{\partial t}, \text{ etc.,} \qquad 4\pi s_x = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \text{ etc.} \tag{17}$$

Für einen isotropen Isolator gelten also vermöge der auch im Isolator gültigen Gleichungen (7) und (11) die Formeln (für $\mu = 1$):

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{aligned} \tag{18}$$

Diese Gleichungen bestimmen alle Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes in einem Isolator vollkommen.

Wenn man allgemein an den Gleichungen (12) festhält, d. h. wenn man festsetzt, daß die Anzahl der von einer Ladung ausgesandten Kraftlinien unabhängig von der Natur ihrer Umgebung sein soll, so lehrt ein Vergleich mit (17), daß man in dem Körper zu setzen hat:

$$\begin{aligned} N_x = \varepsilon X, \ N_y = \varepsilon Y, \ N_z = \varepsilon Z, \\ M_x = \mu\alpha, \ M_y = \mu\beta, \ M_z = \mu\gamma, \end{aligned} \tag{19}$$

d. h. nur im Vacuum (für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) ist die Kraftliniendichte gleich der elektrischen, bezw. magnetischen Kraft.

1) Wir werden später bei Besprechung der optischen Eigenschaften magnetisierter Körper genauer beweisen, weshalb für alle Körper die Annahme $\mu = 1$ bei Lichtschwingungen berechtigt ist. Es liegt dies nicht etwa daran, daß die Magnetisierung des Körpers bei so schnellen Feldwechseln, wie sie im Lichte bestehen, nicht folgen könnte, sondern der Grund ist komplizierter.

Denken wir uns einen Elementar-Würfel der Seitenlängen dx, dy, dz, welcher die elektrische Ladung e enthält, so müssen aus der ganzen Oberfläche des Würfels $4\pi e$ Kraftlinien ausstrahlen. Wenn wir andrerseits die ausstrahlenden Kraftlinien berechnen als Summe der aus den Oberflächen des Würfels austretenden Kraftlinien, so geben z. B. die beiden senkrecht zur x-Achse liegenden Flächen die Anteile: $-(N_x)_1\, dy\, dz + (N_x)_2\, dy\, dz$, wobei die Indices 1 und 2 sich auf die beiden gegenüberliegenden, um dx voneinander entfernten Seiten beziehen. Nun ist offenbar (nach der Definition des Differentialquotienten):

$$(N_x)_2 = (N_x)_1 + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx,$$

so daß auf diese Weise die ganze, durch die Oberfläche des Würfels tretende Kraftlinienzahl gefunden wird zu

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Setzen wir also dieses Aggregat gleich $4\pi e$ und berücksichtigen die Gleichungen (19), so folgt, falls man $e : dx\, dy\, dz = \varrho$ die Ladung der Volumeneinheit (Dichte der Ladung) nennt:

$$4\pi\varrho = \frac{\partial(\varepsilon X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon Z)}{\partial z}. \tag{20}$$

Nach ihrer Herleitung gilt diese Gleichung auch in isotropen, inhomogenen Körpern, d. h. falls ε mit x, y, z variiert. — Eine analoge Gleichung kann man für die magnetische Ladungsdichte aufstellen.

8. Die Grenzbedingungen. Wenn zwei verschiedene Körper aneinanderstoßen, so sind gewisse Bedingungen für den Übergang der elektrischen und magnetischen Kraft über die Grenze der Körper zu erfüllen, die man aus den Hauptgleichungen (18) durch folgende Bemerkung gewinnen kann: In Wirklichkeit vollzieht sich der Übergang von einem Körper der Dielektrizitätskonstante ε_1 zu einem anderen Körper der Dielektrizitätskonstante ε_2 nicht plötzlich, sondern allmählich, so daß eine Trennungsfläche nur im mathematischen Sinne besteht. Die Dielektrizitätskonstante variiert mithin innerhalb einer, allerdings sehr dünnen Übergangsschicht stetig vom Werte ε_1 bis ε_2. Auch in einer solchen Übergangsschicht bestehen die Gleichungen (7), (11) und (17), daher auch (18), d. h. alle in jenen Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten müssen endliche Werte be-

halten. Nehmen wir nun z. B. an, die beiden Körper stießen in der xy-Ebene aneinander. Da in der Übergangsschicht die Differentialquotienten $\frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial \beta}{\partial z}, \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ endliche Werte behalten müssen, so folgt, daß, wenn die Dicke der Übergangsschicht, d. h. dz, unendlich klein wird, auch die Differenz von Y, X, β, α an den Grenzen der Übergangsschicht unendlich klein wird, mit anderen Worten: Die der Grenzfläche parallelen Komponenten der elektrischen und magnetischen Kraft müssen sich stetig verhalten beim Durchgang durch die (als verschwindend dünn angenommene) Grenzfläche, in Formeln:

$$X_1 = X_2,\ Y_1 = Y_2,\ \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2 \text{ für } z = 0, \tag{21}$$

wobei durch untere Indizes die Zugehörigkeit zu den beiden verschiedenen Körpern gekennzeichnet ist.

Da in den Hauptgleichungen (18) die Differentialquotienten $\frac{\partial Z}{\partial z}$ und $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$ nicht vorkommen, so gelten für Z und γ nicht dieselben Schlüsse, wie für X, Y, α, β. Indessen ersieht man aus der letzten der Gleichungen (18), daß $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$, daher auch γ, zu beiden Seiten der Übergangsschicht denselben Wert hat, weil X und Y für alle Werte von x und y zu beiden Seiten der Übergangsschicht dieselben Werte haben. Daher geht auch γ stetig durch die Grenze, wenn diese als eine Schicht von verschwindender Dicke aufgefaßt wird. Aus demselben Grunde schließt man aus der dritten der Gleichungen (18) auf Stetigkeit des Produktes εZ, d. h. auf Unstetigkeit von Z. Man kann also zu den Grenzbedingungen (21) noch die Grenzbedingungen hinzufügen:

$$\varepsilon_1 Z_1 = \varepsilon_2 Z_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 \text{ für } z = 0. \tag{21'}$$

Von den 6 Gleichungen (21) und (21') sind aber wegen des Bestehens der Hauptgleichungen (18) nur 4 voneinander unabhängig.

Aus (19) in Verbindung mit (21') ergibt sich, daß die Kraftlinien auch an der Trennungsfläche zwischen zwei Körpern keine freien Enden besitzen. (NB.: es ist in (21') $\mu = 1$ angenommen, sonst würde $\mu\gamma$ stetig sein!)

9. Die Energie des elektromagnetischen Feldes. Wenn man

die Formeln (18) mit den Faktoren $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$, $\alpha d\tau$, $\beta d\tau$, $\gamma d\tau$ multipliziert, wobei $d\tau$ ein Volumenelement bedeutet, und über einen beliebigen Bereich integriert, so erhält man, falls man setzt

$$\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{8\pi}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2): \tag{22}$$

$$\frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{E}\, d\tau = \int\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) X\, d\tau + \cdots \tag{23}$$
$$+ \int\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\alpha\, d\tau + \cdots$$

Mit Benutzung des Hilfssatzes S. 165 (Formel 20) erhält man nun leicht:

$$\int \frac{\partial\gamma}{\partial y} X\, d\tau = -\int \gamma\, X \cos(ny)\, dS - \int \gamma \frac{\partial X}{\partial y} d\tau,$$

wobei dS ein Oberflächenelement der Oberfläche desjenigen Raumes bedeutet, über welchen die Integration erstreckt wird, und n die innere Normale auf dS. Wendet man diese Umformung an auf die ersten drei Integrale, welche auf der rechten Seite von (23) auftreten, so heben sich alle Raumintegrale rechts gegenseitig fort. Es folgt daher:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{E}\, d\tau = \frac{c}{4\pi}\int\Big[(\gamma\, Y - \beta\, Z)\cos(nx) + (\alpha Z - \gamma X)\cos(ny)$$
$$+ (\beta X - \alpha\, Y)\cos(nz)\Big]\, dS. \tag{24}$$

Ziehen wir die Grenzen des Integrationsbereiches so weit, daß an ihnen die elektrische und magnetische Kraft verschwindet, so besagt Formel (24), daß die Größe $\mathfrak{E}$ dieses Bereiches sich mit der Zeit nicht ändert. $\mathfrak{E}$ bedeutet die Energie des elektromagnetischen Feldes in der Volumeneinheit Man kann diese Bedeutung tatsächlich durch Berechnung der Arbeitsleistungen, welche bei Verschiebung von elektrischen oder magnetischen Ladungen geleistet werden, erhalten. (Vgl. hierüber das Nähere in der Physik des Äthers vom Verf., S. 127, 272.)

10. Die Lichtstrahlen als Strömungslinien der Energie. Wenn an den Grenzen des Integrationsbereiches X, Y, Z, α, β, γ nicht verschwinden, so kann man den Sinn der Formel (24) so interpretieren, daß die Änderung der elektromagnetischen Energie

eines Raumes dadurch herbeigeführt wird, daß dieselbe in seine Begrenzungsfläche ein- resp. ausströmt. Als Komponenten f_x, f_y, f_z dieses Energieflusses können nach (24) angesehen werden:

$$(25)\quad f_x = \frac{c}{4\pi}(\gamma Y - \beta Z), \quad f_y = \frac{c}{4\pi}(\alpha Z - \gamma X), \quad f_z = \frac{c}{4\pi}(\beta X - \alpha Y).$$

Da hiernach die Relationen bestehen:

$$\alpha \cdot f_x + \beta \cdot f_y + \gamma \cdot f_z = 0,$$
$$X \cdot f_x + Y \cdot f_y + Z \cdot f_z = 0,$$

so steht die Bahn des Energieflusses stets senkrecht auf der elektrischen und magnetischen Kraft.

Diese von Poynting herrührende Theorie der Bewegung der Energie im elektromagnetischen Felde hat für die Lichttheorie insofern große Bedeutung, als wir die Lichtstrahlen als diese Strömungslinien der Energie auffassen müssen. Denn nach S. 5 haben wir einen Lichtstrahl, der von einer Lichtquelle Q nach einem Punkte P geht, als den geometrischen Ort derjenigen Punkte definiert, auf welchen irgendein Hindernis, d. h. ein undurchsichtiger Körper angebracht sein muß, um die Lichtwirkung in P abzuschneiden. Nun kann offenbar Energie von Q nach P nicht fortgepflanzt werden, wenn die durch Q und P gehende Strömungslinie der Energie auf ein Hindernis stößt.

Nach (25) ist daher die Richtung des Lichtstrahles als senkrecht zur elektrischen und magnetischen Kraft bestimmt.

Kapitel II.

Durchsichtige isotrope Körper.

1. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Das Zustandekommen einer ebenen elektromagnetischen Welle kann man sich in folgender Weise klar machen: Denken wir uns, daß in einem gewissen Zeitmoment eine elektrische Strömung parallel

zur x-Achse innerhalb einer dünnen Schicht erregt würde, welche parallel zur xy-Ebene liegt. Diese Strömung ruft magnetische Kräfte am Rande der Schicht hervor, die parallel zur y-Achse liegen. Durch die entstehenden magnetischen Kraftlinien werden elektrische Kräfte induziert, welche innerhalb der Schicht nach der negativen x-Achse, außerhalb der Schicht nach der positiven x-Achse gerichtet sind. Im Inneren der Schicht verschwindet daher die elektrische Strömung, weil die induzierten Ströme die ursprünglich erregten Ströme aufheben, dafür treten aber außerhalb der Schicht elektrische Ströme auf, welche nach der positiven x-Achse laufen. In dieser Weise pflanzt sich ein elektrischer Impuls als Welle nach der positiven und negativen z-Achse fort.

Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu finden, wollen wir auf die Hauptgleichungen (18) des vorigen Kapitels zurückgreifen.

Differenziert man die ersten drei Gleichungen (18) nach der Zeit t und setzt für $\partial\alpha/\partial t$, $\partial\beta/\partial t$, $\partial\gamma/\partial t$ die aus den letzten drei Gleichungen (18) folgenden Werte, so entsteht:

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right),$$

und analog zwei andere Gleichungen. Man kann diese Gleichung nun in der Form schreiben:

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right). \quad (1)$$

Nun erhält man aber durch Differentiation der ersten drei Gleichungen (18) bezw. nach x, y, z und Addition:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0.$$

Da es sich im folgenden stets nur um periodische Veränderungen der elektrischen und magnetischen Kräfte handelt, bei denen der Differentialquotient nach der Zeit t den Größen selbst proportional ist (wenn man noch die Phase $\pi/2$ hinzufügt), so kann man aus der letzten Gleichung den Schluß ziehen, daß sein muß:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0. \quad (2)$$

Die Gleichung (1) wird daher

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \Delta X.$$

Analoge Gleichungen befolgen Y, Z, so daß das Gleichungssystem entsteht:

$$(3) \qquad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X, \quad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta Y, \quad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta Z.$$

Die magnetischen Kraftkomponenten befolgen analoge Gleichungen:

$$(2') \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

$$(3') \qquad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \Delta \alpha, \quad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \Delta \beta, \quad \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \Delta \gamma.$$

Nun haben wir schon früher S. 162 gesehen, daß Differentialgleichungen der Form (3) (3′) auf Wellen führen, welche sich mit der Geschwindigkeit

$$(4) \qquad V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

fortpflanzen. Dies ist also nach der elektromagnetischen Auffassung der Natur des Lichtes die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, wobei es ganz gleichgültig ist, ob man die elektrische Kraft oder die magnetische Kraft als Lichtvektor interpretiert. Denn beide sind untrennbar miteinander verbunden und pflanzen sich mit derselben Geschwindigkeit fort.

Wenden wir zunächst die Formel (4) für den freien Äther (leeren Raum) an, so folgt, daß dort die Lichtgeschwindigkeit gleich dem Verhältnis c des elektrostatischen zum elektromagnetischen Maßsystem sein muß. Diese Folgerung wird nun in der Tat glänzend bestätigt, denn oben S. 112 gaben wir als Mittel der Lichtgeschwindigkeit[1]) aus den zuverlässigsten Messungen $V = 2{,}999 \cdot 10^{10}$ cm/sec an, welche Zahl durchaus innerhalb der Beobachtungsfehler mit der aus rein elektromagnetischen Experimenten gewonnenen Zahl $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec übereinstimmt.

---

1) Daß sich dieselbe auf das Vakuum bezieht, ist oben S. 113 hervorgehoben.

Dies ist der erste durchschlagende Erfolg der elektromagnetischen Lichttheorie. Historisch war der Hergang allerdings komplizierter als in dieser systematischen Darstellung: es fanden Kohlrausch und Weber die Zahl c nahe gleich der Lichtgeschwindigkeit, und dann hat, angeregt durch Faraday, welcher bereits früher an eine elektromagnetische Natur des Lichts mehr gefühlsmäßig geglaubt hatte, Maxwell die Gleichungen der Elektrodynamik formuliert, aus denen dann für die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen die Konstante c herauskam.

In einem ponderablen Körper muß nach (4) die Lichtgeschwindigkeit im Verhältnis $1:\sqrt{\varepsilon}$ kleiner sein als im Vakuum, d. h. da der Brechungsindex n_0 des Körpers gegen das Vakuum das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten im Vakuum und im Körper bedeutet, so muß sein:

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon}\,,\ n_0^2 = \varepsilon, \tag{5}$$

d. h. das Quadrat des Brechungsindex ist gleich der Dielektrizitätskonstante.

Diese Beziehung kann nun offenbar nicht genau und allgemein erfüllt sein, schon aus dem Grunde, weil der Brechungsindex n_0 bei allen Körpern von der Farbe, d. h. der Periode der Oszillationen, abhängt, während die Dielektritätskonstante ε als eine, von der Oszillationsdauer unabhängige Konstante definiert ist.

Zunächst ist aber bei Gasen, bei denen die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Farbe sehr gering ist, die Relation (5) recht gut erfüllt, wie folgende Tabelle ergibt, in der die Dielektrizitätskonstanten einer Bestimmung von Boltzmann[1]) entnommen sind, während die Brechungsindizes für Licht mittlerer Farbe (gelb) gelten:

	n_0	$\sqrt{\varepsilon}$
Luft	1,000294	1,000295
Wasserstoff	1,000138	1,000132
Kohlensäure	1,000449	1,000473
Kohlenoxyd	1,000346	1,000345
Stickoxydul	1,000503	1,000497

1) L. Boltzmann, Wien. Ber. 69, S. 795, 1874. — Pogg. Ann. 155, S. 407, 1873.

Auch bei den flüssigen Kohlenwasserstoffen nimmt die Beziehung (5) recht gut, z. B. bei Benzol ist n_0 (gelb) $= 1{,}482$ $\sqrt{\varepsilon} = 1{,}49$.

Dagegen sind sowohl bei vielen festen Körpern, z. B. den Gläsern, als auch bei den Alkoholen und bei Wasser eklatante Abweichungen vom Gesetz (5) vorhanden: es ist ε immer viel größer als n_0, wie folgende Tabelle lehrt:

	n_0	$\sqrt{\varepsilon}$
Masser	1,33	9,0
Methylalkohol	1,34	5,7
Äthylalkohol	1,36	5,0

Um diese Abweichungen zu erklären, bedarf die elektrische Theorie einer Erweiterung ihrer Grundgleichungen. Dies soll im Kapitel V dieses Abschnittes geschehen. Nach dieser Erweiterung erscheint dann die hier als Konstante auftretende Größe ε von der Oszillationsdauer abhängig.

Bevor wir aber hierauf eingehen, wollen wir untersuchen, wie diejenigen optischen Eigenschaften der Körper nach der elektrischen Theorie dargestellt werden, auf welche das Dispersionsgesetz, d. h. die Abhängigkeit des n_0 von der Farbe, keinen Einfluß hat. Wir wollen also im folgenden denken, daß mit Licht von bestimmter Farbe operiert wird, und daß die im Kapitel V zu behandelnde Erweiterung schon gemacht wäre, so daß die in den Hauptgleichungen auftretende Konstante ε übereinstimmt mit dem Quadrat des Brechungsindex n^0 für die bestimmte Farbe.

2. Transversalität ebener Wellen. Eine ebene elektrische Welle wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
X &= A_x \cdot \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{V}\right),\\
Y &= A_y \cdot \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{V}\right),\\
Z &= A_z \cdot \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{V}\right).
\end{aligned}
$$

Denn die Phase ist dieselbe in den Ebenen:

$$
(7) \qquad mx + ny + pz = \text{konst.},
$$

welches dann die Gleichung der Wellenebenen ist. m, n, p sind die Richtungskosinus der Normale zu den Wellenebenen, wenn man noch die Bedingung vorschreibt:

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1. \tag{8}$$

A_x, A_y, A_z sind die Komponenten der Amplitude A der resultierenden elektrischen Kraft. Sie sind also proportional den Richtungskosinus dieser Amplitude A. Infolge der Differentialgleichung (2) auf S. 261 muß sein:

$$A_x \cdot m + A_y \cdot n + A_z \cdot p = 0, \tag{9}$$

welche Gleichung ausdrückt, daß die resultierende Amplitude A senkrecht auf der Wellenebenen-Normale, d. h. der Fortpflanzungsrichtung, steht, mit anderen Worten, daß die Welle eine Transversalwelle ist. Dieselbe Folgerung gilt für die magnetische Kraft. — Die Transversalität ebener Wellen folgt also aus der Gleichung (2) bezw. (2'), d. h. aus der Form der Hauptgleichungen der Theorie.

3. Reflexion und Brechung an der Grenze durchsichtiger isotroper Körper. Die Körper 1 und 2 mit den Konstanten ε_1 und ε_2 mögen in einer Ebene, der xy-Ebene, aneinander grenzen. Die positive z-Achse gehe vom Körper 1 zum Körper 2 (vgl. Fig. 83). Es mögen von ersterem auf letzteren ebene Wellen unter dem Einfallswinkel φ einfallen, und zwar sei die xz-Ebene die Einfallsebene. Die Richtungskosinus der Fortpflanzungsrichtung in der einfallenden Welle sind dann:

$$m = \sin \varphi\,, \quad n = o\,, \quad p = \cos \varphi\,. \tag{10}$$

Wir wollen die einfallende elektrische Kraft in zwei Komponenten zerlegen: eine senkrecht zur Einfallsebene liegende Komponente, deren Amplitude E_s sei, und eine in der Einfallsebene liegende Komponente, deren Amplitude E_p sei. Erstere Komponente liegt zu der y-Achse parallel, so daß vermöge (6) und (10) für die y-Komponente der einfallenden elektrischen Kraft zu schreiben ist:

$$Y_e = E_s \cdot \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{V_1}\right); \tag{11}$$

wobei V_1 die Lichtgeschwindigkeit im Körper (1) bedeutet. Nach (4) ist

$$V_1 = c : \sqrt{\varepsilon_1}. \tag{12}$$

Die in der Einfallsebene liegende Komponente E_p der elek-

trischen Kraft liegen wegen der Transversalität der Welle senkrecht zum Lichtstrahl, d. h. die nach der x- bezw. z-Achse genommenen Komponenten A_x bezw. A_z der Amplitude E_p müssen die Werte haben:

$$A_x = E_p \cdot \cos\varphi\,, \quad A_z = -E_p \cdot \sin\varphi\,,$$

wenn, wie in Fig. (83) gezeichnet ist, der positive Sinn von E_p von der Grenze fort zeigt.

Die x- und z-Komponente der elektrischen Kraft der einfallenden Welle wird daher

$$\begin{aligned} X_e &= E_p \cdot \cos\varphi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right), \\ Z_e &= -E_p \cdot \sin\varphi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Mit der elektrischen Kraft der einfallenden Welle ist nun notwendig verbunden eine magnetische Kraft, deren Komponenten sich aus den früheren Hauptgleichungen (18) der S. 256 und unter Rücksicht auf (12) der Seite 265 berechnen zu:

$$\begin{aligned} \alpha_e &= -E_s \cdot \cos\varphi\,\sqrt{\varepsilon_1}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right), \\ \beta_e &= +E_p \cdot \sqrt{\varepsilon_1}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right), \\ \gamma_e &= +E_s \cdot \sin\varphi\,\sqrt{\varepsilon_1}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Ist also $E_s = 0$, $E_p > 0$, so ist $\alpha_e = \gamma_e = 0$, β_e von Null verschieden, d. h. die in der Einfallsebene liegende Amplitude E_p der elektrischen Kraft ruft eine senkrecht zur Einfallsebene liegende Komponente β_e der magnetischen Kraft hervor. Umgekehrt ruft die senkrecht zur Einfallsebene liegende Komponente E_s der elektrischen Kraft eine in der Einfallsebene liegende magnetische Kraft hervor. Dieses Resultat, daß die notwendig miteinander verbundenen elektrischen und magnetischen Kräfte stets senkrecht aufeinander stehen, folgte schon aus der oben S. 261 angestellten Überlegung.

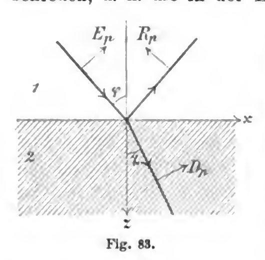


Fig. 83.

Wenn die einfallende elektromagnetische Welle auf die Grenze trifft, so zerlegt sie sich in eine reflektierte und eine gebrochene

Welle. Wir können die elektrischen Kräfte in der reflektierten Welle analog wie in (11) und (13) darstellen durch:

$$\begin{aligned} X_r &= R_p \cdot \cos\varphi' \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}\right), \\ Y_r &= R_s \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}\right), \\ Z_r &= -R_p \cdot \sin\varphi' \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

in der gebrochenen Welle durch:

$$\begin{aligned} X_2 &= D_p \cdot \cos\chi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right), \\ Y_2 &= D_s \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right), \\ Z_2 &= -D_p \cdot \sin\chi \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Hierin bezeichnen R_p, R_s, D_p, D_s Amplituden, φ' den Reflexionswinkel (d. h. Winkel zwischen $+$ z-Achse und Fortschreitungsrichtung der reflektierten Welle), χ den Brechungswinkel.

Die zugehörigen magnetischen Kräfte sind entsprechend (14):

$$\begin{aligned} \alpha_r &= -R \cdot \cos\varphi' \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}\right), \\ \beta_r &= +R_p \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t \ldots .\right), \\ \gamma &= +R_s \cdot \sin\varphi' \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t \ldots .\right). \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -D_s \cdot \cos\chi \cdot \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right), \\ \beta_2 &= +D_p \cdot \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t \ldots .\right), \\ \gamma_2 &= +D_s \cdot \sin\chi \cdot \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}\left(t \ldots .\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Wegen der Grenzbedingungen (21) im vorigen Kapitel (S. 258) sollen nun für $z = 0$ gewisse Beziehungen zwischen den elektrischen, bezw. magnetischen Kräften für alle Werte der Zeit und der Koordinaten x, y bestehen. Solche Bedingungen kann man nur

erfüllen, wenn für $z=0$ alle Kräfte proportional zu derselben Funktion von t, x, y werden, d. h. es muß sein:

$$\frac{\sin\varphi}{V_1} = \frac{\sin\varphi'}{V_1} = \frac{\sin\chi}{V_2}. \tag{19}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\sin\varphi = \sin\varphi'$, d. h. da die Richtung des reflektierten Strahles nicht völlig übereinstimmen kann mit dem einfallenden Strahl:

$$\cos\varphi = -\cos\varphi' \quad \text{d. h.} \quad \varphi' = \pi - \varphi. \tag{20}$$

Dies ist das Reflexionsgesetz, dem zufolge der einfallende und reflektierte Strahl symmetrisch zum Einfallslot liegen.

Die zweite Gleichung (19) enthält das Brechungsgesetz, da man aus (19) folgert:

$$\sin\varphi : \sin\chi = V_1 : V_2 = n, \tag{21}$$

wobei n der Brechungsindex des Körpers 2 gegen den Körper 1 ist.

Das Reflexions- und Brechungsgesetz folgt also aus dem Bestehen von Grenzbedingungen überhaupt, ganz unabhängig von der besonderen Form der Grenzbedingungen.

Was nun die letztere anbelangt, so ist zu berücksichtigen, daß hier $X_1 = X + X_r$ und analog für die übrigen Kräfte zu setzen ist, da die elektrische Kraft im Körper 1 die Superposition der einfallenden und reflektierten Kraft ist. Daher ergeben die Grenzgleichungen (21) der S. 258 unter Rücksicht auf (20):

$$\begin{aligned}
(E_p - R_p)\cos\varphi &= D_p\cos\chi, \\
E_s + R_s &= D_s, \\
(E_s - R_s)\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi &= D_s\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi, \\
(E_p + R_p)\sqrt{\varepsilon_1} &= D_p\sqrt{\varepsilon_2}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Hieraus kann man die reflektierten und gebrochenen Amplituden in ihrer Abhängigkeit von den einfallenden Amplituden berechnen. Es folgt nämlich:

$$\begin{aligned}
2E_s &= D_s\left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi}\right), \\
E_s\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi} - 1\right) &= R_s\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\chi} + 1\right),
\end{aligned} \tag{23}$$

$$2\,E_p = D_p\left(\frac{\cos\chi}{\cos\varphi} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right),$$
$$E_p\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\chi} - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) = R_p\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\chi} + \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right). \tag{23}$$

Ersetzt man hierin das Verhältnis $\sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1}$, welches nach (4) gleich dem Brechungsindex n vom Körper 2 gegen den Körper 1 ist, durch das Verhältnis $\sin\varphi : \sin\chi$, entsprechend (21), so lassen sich die Formeln (23) in der Gestalt schreiben:

$$R_s = -E_s\frac{\sin(\varphi-\chi)}{\sin(\varphi+\chi)}, \quad R_p = E_p\frac{tg\,(\varphi-\chi)}{tg\,(\varphi+\chi)}$$
$$D_s = E_s\frac{2\sin\chi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\chi)}, \quad D_p = E_p\frac{2\sin\chi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\chi)\cos(\varphi-\chi)}. \tag{24}$$

Dies sind die sogenannten Fresnelschen Reflexionsformeln, aus denen man Phase und Intensität des reflektierten und gebrochenen Lichtes vollständig berechnen kann aus der Beschaffenheit des einfallenden Lichtes.

Nach (24) verschwindet R_s nie, aber R_p wird Null, falls ist

$$tg\,(\varphi+\chi) = \infty, \quad \varphi + \chi = \pi/_2, \tag{25}$$

d. h. wenn der reflektierte Strahl senkrecht auf dem gebrochenen Strahl steht.

Aus (25) folgt, daß in diesem Falle $\sin\chi = \sin(\pi/_2 - \varphi) = \cos\varphi$ ist, d. h. nach (21) muß sein:

$$tg\,\varphi = n. \tag{25'}$$

Wenn also der Einfallswinkel φ diesem Werte entspricht, so enthält die reflektierte Welle gar keine elektrische Amplitude, die in der Einfallsebene liegt, ganz unabhängig davon, wie das einfallende Licht beschaffen ist, d. h. welches Verhältnis $E_s : E_p$ besteht. Also auch wenn natürliches Licht unter dem Einfallswinkel φ, der (25′) entspricht, einfällt, enthält die reflektierte Welle nur eine elektrische Amplitude, die senkrecht zur Einfallsebene liegt, d. h. sie ist linear polarisiert. Dieser Einfallswinkel φ entspricht nun tatsächlich dem oben S. 233 genannten Brewsterschen Gesetz. Zugleich ergibt sich jetzt, da wir die Einfallsebene die Polarisationsebene genannt haben (vgl. oben S. 233), daß in einer linear polarisierten Welle der Lichtvektor senk-

recht zur Polarisationsebene liegt, wenn wir ihn mit der elektrischen Kraft identifizieren.

Dagegen würde der Lichtvektor in der Polarisationsebene liegen, wenn wir ihn mit der magnetischen Kraft identifizieren würden, da nach den Formeln (17) und der S. 266 R_p die Rolle der senkrecht zur Einfallsebene liegenden magnetischen Amplitude spielt. Aus dieser Annahme, daß die magnetische Kraft der Lichtvektor ist, folgen die F. Neumannschen Reflexionsformeln.

Die Intensitäten der reflektierten elektrischen und magnetischen Welle sind völlig gleich; denn haben wir z. B. einfallendes Licht, welches in der Einfallsebene polarisiert ist, so haben wir, um die reflektierte Intensität zu berechnen, nur die erste der Gleichungen (24) anzuwenden, sowohl wenn wir als Lichtvektor die elektrische Kraft auffassen, als auch wenn wir ihn als magnetische Kraft interpretieren. Denn nach (14) der S. 266 ist in jedem Falle E_s die Amplitude des einfallenden Lichtes.

Dagegen sind die Vorzeichen der reflektierten elektrischen und magnetischen Amplitude voneinander verschieden. Dies macht keinen Unterschied für die Intensitäten, da es bei ihnen nur auf das Quadrat der Amplitude ankommt, aber wohl für die Phasen der Wellen. Wir wollen dies an einem speziellen Fall näher erörtern.

4. Senkrechte Inzidenz. Stehende Wellen. Die Formeln (24) werden zunächst für $\varphi = 0$ unbrauchbar, da sowohl φ als χ zu Null würden. Dagegen erhalten wir aus (23) direkt, da $\sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1} = n$, $\cos\varphi = \cos\chi = 1$ ist:

$$R_s = -E_s \frac{n-1}{n+1}, \quad R_p = E_p \frac{n-1}{n+1}. \tag{26}$$

Die erste dieser Formeln besagt, daß, falls $n > 1$, die reflektierte elektrische Amplitude entgegengesetzt gerichtet ist wie die einfallende elektrische Amplitude. Dasselbe besagt aber auch die zweite Formel, denn für $\varphi = 0$ bedeutet ein gleiches Vorzeichen von R_p und E_p tatsächlich entgegengesetzte Lage dieser Amplituden, wie aus dem in Figur 83 der S. 266 gezeichneten positiven Sinne von R_p und E_p hervorgeht. Die durch Interferenz der einfallenden und reflektierten Wellen erzeugten stehenden Wellen (vgl. oben S. 148) müssen daher an der reflektierenden Fläche selbst einen Schwingungsknoten be-

sitzen, der allerdings nur dann eine vollständige Nullstelle sein würde, falls R_s ebenso groß wie E_s ist, d. h. falls $n = \infty$ wäre. Für endliches n ist also nur ein Minimum am Spiegel vorhanden, da die reflektierte Amplitude wenigstens teilweise die Wirkung der einfallenden aufhebt.

Für die magnetische Kraft bedeuten aber E_p, R_p die senkrecht zur Einfallsebene, d. h. parallel zur y-Achse, liegenden Amplituden. Gleiches Vorzeichen dieser Amplituden bedeutet tatsächlich gleiche Richtung, so daß aus der zweiten der Formeln (26) (und ebenso aus der ersten bei richtiger Interpretation der räumlichen Amplitudenrichtung) hervorgeht, daß die reflektierte magnetische Amplitude gleich gerichtet mit der einfallenden magnetischen Amplitude ist. Stehende magnetische Wellen haben also einen Schwingungsbauch am Spiegel selbst, falls $n > 1$.

Die photographische Methode Wieners (vgl. oben S. 148) ergab an Glas- und Metallspiegeln[1]) einen Schwingungsknoten am Spiegel selbst. Dies spricht dafür, daß die elektrische Kraft der maßgebende Vektor für die photographische Wirkung ist, was ja schon noch bequemer durch die oben S. 238 besprochene Methode der stehenden Wellen bei schief einfallendem, polarisiertem Licht erwiesen war.

5. Polarisation natürlichen Lichtes beim Durchgang durch einen Plattensatz. Nach den Formeln (24) nimmt $R_s : E_s$ beständig zu, falls φ von 0 bis $\pi/2$ wächst; dagegen nimmt $R_p : E_p$ zunächst ab, erreicht beim Polarisationswinkel den Wert Null und wächst dann wieder bis zum Maximum 1, falls φ den Wert $\pi/2$ erreicht (streifende Inzidenz). Für alle Einfallswinkel ist aber, falls $E_s = E_p$ ist, $R_s > R_p$. Denn aus (24) folgt:

$$\frac{R_p}{R_s} = -\frac{E_p}{E_s} \cdot \frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)}. \tag{27}$$

Daher wird bei jedem Einfallswinkel natürliches Licht durch Reflexion partiell (bezw. total) nach der Einfallsebene polarisiert. Das gebrochene Licht muß daher, weil kein Licht verschwinden kann, stets partiell senkrecht zur Einfallsebene polarisiert sein. So erklärt sich die polarisierende Wirkung eines Plattensatzes.

1) Für Metallspiegel gelten zwar nicht die bisherigen Formeln; die Schlüsse sind aber ganz ähnlich: die Metalle sollen im IV. Kapitel behandelt werden.

In der Tat ergibt auch direkt eine Anwendung der beiden letzten Formeln (24) an den beiden Grenzen einer Glasplatte für den Durchgang des Lichtes durch dieselbe:

$$\frac{D'_s}{D'_p} = \frac{E_s}{E_p} \cos^2(\varphi - \chi), \tag{28}$$

falls D'_s, D'_p die aus der Platte austretenden Amplituden bedeuten. Für $E_s = E_p$ ist daher nach (28) beständig $D'_s < D'_p$, d. h. einfallendes natürliches Licht ist nach dem Austritt aus der Platte partiell senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Total, wie bei der Reflexion, wird allerdings diese Polarisation unter keinem Einfallswinkel φ, sie wird um so vollständiger, je größer φ ist. Falls φ gleich dem Polarisationswinkel ist[1] ($tg\varphi = n$, $\varphi + \chi = \pi/2$), wird nach (28) bei $E_s = E_p$:

$$\frac{D'_s}{D'_p} = \sin^2 2\varphi = \frac{4n^2}{(1+n^2)^2}.$$

Bei $n = 1{,}5$ ist daher $D'_s : D'_p = 0{,}85$, das Verhältnis der Intensitäten ist $D'^2_s : D'^2_p = 0{,}73$. Beim Durchgang durch 5 Platten würde dies Verhältnis auf $0{,}72^5 = 0{,}20$ gesunken sein, also sich von vollständiger Polarisation noch erheblich unterscheiden.

6. Experimentelle Prüfung der Theorie. Die Formeln (24) können einerseits durch Intensitätsvergleichung des reflektierten und einfallenden Lichtes geprüft werden, andererseits bequemer durch die Drehung, welche die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes durch Reflexion oder Brechung erfährt. Diese Drehung ist ja durch die Formeln (27) oder (28) zu berechnen.

Haben wir linear polarisiertes einfallendes Licht, so nennt man in dem Verhältnis der Komponenten, $E_p : E_s = tg\alpha$, α das Azimuth der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes. Das reflektierte und gebrochene Licht ist ebenfalls linear polarisiert, das Azimuth ψ seiner Polarisationsebene bestimmt sich aus (27) und (28). Es ist $tg\psi = R_p : R_s$. — Zur Beobachtung kann man zweckmäßig den oben S. 244 abgebildeten Apparat (ohne Babinetschen Kompensator) benutzen. Das einfallende Licht wird durch

1) Für diesen erreicht die Polarisation des durchgehenden Lichtes keineswegs ein Maximum.

das Nicol p polarisiert (Polarisator), und dann das Nicol p' (Analysator) auf Dunkelheit eingestellt. Zu jedem α kann man daher das zugehörige ψ beobachten.

Nach beiden Methoden hat sich eine sehr gute Bestätigung der Reflexionsformeln ergeben, nur in der Nähe des Polarisationswinkels hat Jamin bei strengerer Prüfung stets eine Abweichung von den Reflexionsformeln erhalten, indem das reflektierte Licht nicht streng linear polarisiert, sondern elliptisch polarisiert war. Es ist daher durch den Analysator allein (ohne Kompensator) nicht völlig auszulöschen. Diese Erscheinungen sollen im folgenden behandelt werden.

7. Elliptische Polarisation des reflektierten Lichtes erklärt durch Oberflächen- oder Übergangsschichten. Den bisherigen Entwickelungen, welche auf der Anwendung der Grenzbedingungen (21) der S. 258 beruhen, liegt die Annahme zugrunde, daß der Übergang vom Körper 1 zum Körper 2 ein sprunghafter sei. Streng genommen gibt es in der Natur keine Unstetigkeiten, zwischen beiden Körpern 1 und 2 muß stets eine Übergangsschicht vorhanden sein, in der die Dielektrizitätskonstante stetig von ε_1 zu ε_2 variiert; zwar wird diese Übergangsschicht sehr dünn sein, ob wir aber direkt ihre Dicke vernachlässigen können, wie wir bisher getan haben, ist zweifelhaft bei so kurzen elektromagnetischen Wellen, wie sie die Lichtwellen sind. Außerdem wird diese natürliche Übergangsschicht zwischen zwei Körpern meist noch durch das Poliermittel zu einer künstlichen, dickeren Oberflächenschicht gesteigert.

Wir werden die tatsächlichen Verhältnisse jedenfalls besser treffen, wenn wir Rücksicht auf eine Übergangsschicht nehmen.

Doch können wir, um die Rechnung nicht unnötig zu komplizieren, annehmen, daß diese Übergangsschicht von so geringer Dicke l sei, daß für alle Größen, welche mit l multipliziert auftreten, nur diejenigen Näherungswerte einzuführen sind, welche sich für $l = 0$ ergeben würden.

Zunächst wollen wir jetzt die Grenzbedingungen ableiten, d. h. diejenigen Beziehungen, welche für die elektrischen und magnetischen Kräfte an den beiden Grenzen 1 und 2 der Übergangsschicht bestehen. Als Grenzen derselben definieren wir diejenigen Stellen, an welchen die Dielektrizitätskonstante die konstanten Werte ε_1 bezw. ε_2 erreicht hat.

Nach der Bemerkung auf S. 254 bestehen die Hauptgleichungen (18) der S. 256 auch in der Übergangsschicht.

Multiplizieren wir die vierte und fünfte dieser Hauptgleichungen (18) mit einem Dickenelement dz der Übergangsschicht und integrieren zwischen den beiden Grenzen 1 und 2, so entsteht, da die auftretenden Größen nicht von y abhängen, falls y senkrecht zur Einfallsebene gelegt wird:

$$\text{(29)} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \alpha \cdot dz &= Y_2 - Y_1 , \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \beta\, dz &= \int_1^2 \frac{\partial Z}{dx}\, dx - (X_2 - X_1). \end{aligned}$$

Nun ist nach (21) der S. 258 α und β, ferner nach (21′) der S. 258 auch εZ näherungsweise konstant innerhalb der Übergangsschicht, d. h. man kann α, β, εZ vor das Integralzeichen in obigen Formeln setzen und dafür α_2, β_2, $\varepsilon_2 Z_2$ (oder α_1, β_1, $\varepsilon_1 Z_1$) schreiben. Man erhält so z. B.:

$$\int \alpha \cdot dz = \alpha \int dz, \qquad \int_1^2 \frac{\partial Z}{\partial x}\, dz = \varepsilon_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x} \int_1^2 \frac{dz}{\varepsilon}.$$

Führt man die Abkürzungen ein:

$$\text{(30)} \qquad \int_1^2 dz = l, \quad \int_1^2 \varepsilon\, dz = p, \quad \int_1^2 \frac{dz}{\varepsilon} = q,$$

wobei l die ganze Dicke der Übergangsschicht bedeutet und ε ihre Dielektrizitätskonstante an der Stelle, deren Dickenelement mit dz bezeichnet ist, so werden die Gleichungen (29):

$$\text{(31)} \qquad X_1 = X_2 + \frac{l}{c}\frac{\partial \beta_2}{\partial t} - \varepsilon_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x} q, \qquad Y_1 = Y_2 - \frac{l}{c}\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}.$$

Ebenso ergeben die beiden ersten Gleichungen des Systemes (18) auf S. 256, wenn man sie mit dz multipliziert, integriert und obiges Näherungsverfahren benutzt:

$$\text{(32)} \qquad \alpha_1 = \alpha_2 - l \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} - \frac{p}{c}\frac{\partial Y_2}{\partial t}, \qquad \beta_1 = \beta_2 + \frac{p}{c}\frac{\partial X_2}{\partial t}.$$

Diese Gleichungen (31), (32) treten als Grenzbedingungen an Stelle der früheren (21) der S. 258.

Für die elektrischen und magnetischen Kräfte in den Körpern 1 und 2 können wir die früheren Ansätze (11), (13), (14), (15), (16), (17), (18) dieses Kapitels auch hier verwenden, aber mit einer Erweiterung, die darin besteht, daß die Kräfte in der reflektierten und gebrochenen Welle eine erst aus den Grenzbedingungen (31), (32) abzuleitende Phasendifferenz gegen die Kräfte in der einfallenden Welle besitzen. Ohne eine solche Phasendifferenz kann man die Grenzbedingungen (31), (32) nicht befriedigen.

Am einfachsten lassen sich nun diese Phasendifferenzen in folgender Weise berücksichtigen. Schreiben wir (vgl. Formeln (15) der S. 267) z. B.:

$$Y_r = R_s \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin\varphi' + z \cos\varphi'}{V_1}\right) + \delta\right],$$

so ist Y_r der reelle Teil der komplexen Größe

$$R_s \cdot e^{i\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin\varphi' + z \cos\varphi'}{V_1}\right) + \delta\right]}.$$

Setzen wir nun

$$R_s \cdot e^{i\delta} = \mathrm{R}_s, \tag{33}$$

so können wir schreiben:

$$Y_r = \Re\left\{\mathrm{R}_s \cdot e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin\varphi' + z \cos\varphi'}{V_1}\right)}\right\}, \tag{34}$$

wobei das vorgesetzte $\Re$ bedeutet, daß der reelle Teil der nachfolgenden komplexen Größe zu nehmen ist. Diese in der Klammer stehende komplexe Größe enthält die komplexe Amplitude R_s, so daß wir also einen in Y_r auftretenden Phasenzuwachs δ dadurch darstellen können, daß Y_r gleich dem reellen Teil einer Exponentialfunktion mit komplexem Faktor (komplexer Amplitude) ist. Analog werden wir auch die übrigen auftretenden elektrischen und magnetischen Kräfte schreiben.

Anstatt daß man nur mit den reellen Teilen der komplexen Größen rechnet, kann man auch, wenn es sich um Behandlung

linearer Gleichungen (auch linearer Differentialgleichungen) handelt, die elektrischen und magnetischen Kräfte zunächst den komplexen Größen selbst gleich setzen, und am Schlusse der Rechnung wieder allein zu den reellen Teilen übergehen, um die physikalische Bedeutung zu gewinnen.

Wir wollen daher jetzt für die elektrischen und magnetischen Kräfte die früheren Ansätze (11), (13), (14), (15), (16), (17), (18) verwenden, ersetzen aber die in ihnen auftretenden reellen Amplituten E_s, E_p, R_s, R_p, usw. durch komplexe Amplituden E_s, E_p, R_s, R_p usw. und die *cos* durch die Exponentialgrößen [vgl. (34)]. Dann ergeben die Grenzbedingungen (31) und (32), da sie für $z=0$ gelten sollen und $X_1 = X_e + X_r$, $\alpha_1 = \alpha_e + \alpha_r$, usw. ist:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{E}_p - \mathrm{R}_p) \cos\varphi &= \mathrm{D}_p \left[\cos\chi + i \frac{2\pi}{T} \left(\sqrt{\varepsilon_2} \frac{l}{c} - \frac{\sin^2\chi}{V_2} \varepsilon_2 q \right) \right], \\
\mathrm{E}_s + \mathrm{R}_s &= \mathrm{D}_s \left[1 + i \frac{2\pi}{T} \cos\chi \sqrt{\varepsilon_2} \frac{l}{c} \right], \\
(\mathrm{E}_s - \mathrm{R}_s) \sqrt{\varepsilon_1} \cos\varphi &= \mathrm{D}_p \left[\sqrt{\varepsilon_2} \cos\chi - \frac{i\, 2\pi}{T} \left(\frac{\sin^2\chi}{V_2} \sqrt{\varepsilon_2}\, l - \frac{p}{c} \right) \right], \\
(\mathrm{E}_p + \mathrm{R}_p) \sqrt{\varepsilon_1} &= \mathrm{D}_p \left[\sqrt{\varepsilon_2} + \frac{i\, 2\pi}{T} \cos\chi \frac{p}{c} \right].
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Aus diesen Gleichungen sind R_s, R_p, D_s, D_p in ihrer Abhängigkeit von E_s, E_p zu berechnen. Uns interessiert hier wesentlich nur das reflektierte Licht. Ersetzt man das Produkt Tc durch λ, die Wellenlänge der betreffenden Lichtsorte im Vakuum, ferner V_2 durch $c : \sqrt{\varepsilon_2}$, so folgt aus (35):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{R}_p}{\mathrm{E}_p} = \\
&\frac{\cos\varphi \sqrt{\varepsilon_2} - \cos\chi \sqrt{\varepsilon_1} + i \frac{2\pi}{\lambda} \left[p \cos\varphi \cos\chi - (l - q\, \varepsilon_2 \sin^2\chi) \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right]}{\cos\varphi \sqrt{\varepsilon_2} + \cos\chi \sqrt{\varepsilon_1} + i \frac{2\pi}{\lambda} \left[p \cos\varphi \cos\chi + (l - q\, \varepsilon_2 \sin^2\chi) \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right]}, \\
&\frac{\mathrm{R}_s}{\mathrm{E}_s} = \\
&\frac{\cos\varphi \sqrt{\varepsilon_1} - \cos\chi \sqrt{\varepsilon_2} + i \frac{2\pi}{\lambda} \left[l \cos\varphi \cos\chi \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} - p + l\, \varepsilon_2 \sin^2\chi \right]}{\cos\varphi \sqrt{\varepsilon_1} + \cos\chi \sqrt{\varepsilon_2} + i \frac{2\pi}{\lambda} \left[l \cos\varphi \cos\chi \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + p - l\, \varepsilon_2 \sin^2\chi \right]}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Nun ist zu berücksichtigen, daß die den Faktor $i\,2\pi/\lambda$ enthaltenden Terme sehr kleine Korrektions-Größen sind, da sie proportional zu der Dicke l der Oberflächenschicht sind. Entwickelt man daher die Ausdrücke (36) nur bis auf die erste Potenz des Verhältnisses $l:\lambda$, so entsteht:

$$\begin{aligned} \frac{R_p}{E_p} &= \frac{\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_2}-\cos\chi\sqrt{\varepsilon_1}}{\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_2}+\cos\chi\sqrt{\varepsilon_1}}\left\{1+i\frac{4\pi}{\lambda}\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{p\cos^2\chi-l\varepsilon_2+q\varepsilon_2^2\sin^2\chi}{\varepsilon_2\cos^2\varphi-\varepsilon_1\cos^2\chi}\right\}, \\ \frac{R_s}{E_s} &= \frac{\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1}-\cos\chi\sqrt{\varepsilon_2}}{\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1}+\cos\chi\sqrt{\varepsilon_2}}\left\{1+i\frac{4\pi}{\lambda}\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{l\varepsilon_2-p}{\varepsilon_1\cos^2\varphi-\varepsilon_2\cos^2\chi}\right\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Der in der zweiten dieser Gleichungen auftretende Nenner des Korrektionsgliedes kann nie verschwinden, d. h. es kann nie sein $\varepsilon_1\cos^2\varphi=\varepsilon_2\cos^2\chi$, denn wenn $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, so ist beständig $\varphi>\chi$, daher $\cos\varphi<\cos\chi$. Dagegen kann der Nenner des Korrektionsgliedes in der ersten der Gleichungen (37) verschwinden, falls nämlich ist:

$$\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_2}=\cos\chi\sqrt{\varepsilon_1}. \tag{38}$$

Diese Beziehung ist, wie eine einfache Umformung von (38) ergibt, da $\sqrt{\varepsilon_2}:\sqrt{\varepsilon_1}=n$ ist, für den sogenannten Polarisationswinkel $\overline{\varphi}$ erfüllt, der sich nach dem Brewsterschen Gesetz $tg\,\overline{\varphi}=n$ bestimmt. Für diesen Einfallswinkel folgt daher aus (37) (oder auch direkt aus (36)):

$$\frac{R_p}{E_p}=i\,\frac{4\pi}{\lambda}\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{p\cos^2\chi-l\,\varepsilon_2+g\,\varepsilon_2^2\sin^2\chi}{(\cos\varphi\sqrt{\varepsilon_2}+\cos\chi\sqrt{\varepsilon_1})^2}. \tag{39}$$

Die Ausdrücke (37) können wir noch weiter vereinfachen unter Rücksicht auf das Brechungsgesetz:

$$\sin\varphi:\sin\chi=n=\sqrt{\varepsilon_2}:\sqrt{\varepsilon_1}. \tag{40}$$

Denn hieraus folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\cos^2\varphi-\varepsilon_2\cos^2\chi &= \varepsilon_1-\varepsilon_2, \\ \varepsilon_2\cos^2\varphi-\varepsilon_1\cos^2\chi &= \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}(\varepsilon_1\sin^2\varphi-\varepsilon_2\cos^2\varphi). \end{aligned} \tag{41}$$

Die Natur des reflektierten Lichtes bestimmt sich nun vollständig aus dem Verhältnis $\mathrm{R_p : R_s}$. Wir wollen annehmen, daß das einfallende Licht linear unter dem Azimuth 45° gegen die Einfallsebene (vgl. oben S. 272) polarisiert sei. Dann ist $\mathrm{E_p = E_s}$, und aus (37) folgt unter Rücksicht auf (40) und (41):

$$(42)\qquad \frac{\mathrm{R_p}}{\mathrm{R_s}} = -\frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)} \left\{ 1 + i\frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \cdot \frac{\cos\varphi \sin^2\varphi}{\varepsilon_1 \sin^2\varphi - \varepsilon_2 \cos^2\varphi}\, \eta \right\},$$

wobei η eine Abkürzung ist für

$$(43)\qquad \eta = p - l(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + q\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 .$$

Für den Polarisationswinkel $tg\,\overline{\varphi} = n$ nimmt (42) den Wert an:

$$(44)\qquad \frac{\mathrm{R_p}}{\mathrm{R_s}} = i\,\frac{\pi}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\, \eta,$$

wie am einfachsten aus (39) hervorgeht, wenn man (39) durch die zweite der Gleichungen (37) dividiert, und nur bis auf erste Ordnung in $\eta : \lambda$ geht.

Um nun die physikalische Bedeutung der Formeln (42) und (44) zu erkennen, müssen wir berücksichtigen, daß nach der Bezeichnung (33) bedeutet:

$$(45)\qquad \mathrm{R_p} = R_p \cdot e^{i\delta_p}, \quad \mathrm{R_s} = R_s \cdot e^{i\delta_s},$$

wobei R_p und R_s die Amplituden der parallel und senkrecht zur Einfallsebene liegenden reflektierten elektrischen Kräfte sind, δ_p und δ ihre Phasenbeschleunigungen gegen die einfallenden Wellen. Es ist daher

$$(46)\qquad \frac{\mathrm{R_p}}{\mathrm{R_s}} = \frac{R_p}{R_s} e^{i(\delta_p - \delta_s)} = \varrho \cdot e^{i\Delta},$$

wobei ϱ das relative Amplitudenverhältnis, Δ die relative Phasendifferenz beider Komponenten bedeutet. Nach (44) folgt daher für den Polarisationswinkel $\overline{\varphi}$, welcher der Gleichung $tg\,\overline{\varphi} = n$ genügt:

$$(47)\qquad \varrho = \frac{\pi}{\lambda}\eta \frac{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad \Delta = \pi/2,$$

d. h. das reflektierte Licht ist nicht linear in der Einfallsebene polarisiert, wie wir es früher bei Fehlen einer Übergangsschicht

abgeleitet hatten, sondern es ist elliptisch polarisiert. Die Bahnellipse liegt mit ihren Hauptachsen parallel und senkrecht zur Einfallsebene (vgl. S. 237) und hat das Achsenverhältnis $\bar{\varrho}$. Wir wollen dasselbe den Elliptizitätskoeffizienten nennen. Nach (43), (47) und (30) läßt sich derselbe schreiben:

$$\bar{\varrho} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \int \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)}{\varepsilon} dz, \tag{48}$$

wobei das Integral über die Übergangsschicht (Oberflächenschicht) zwischen beiden Körpern zu erstrecken ist.

Nach (48) hat $\bar{\varrho}$ ein positives Vorzeichen, wenn die Dielektrizitätskonstante ε der Übergangsschicht beständig zwischen den Grenzwerten ε_1 und ε_2 liegt, und falls $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ist. Wenn dagegen ε an gewissen Stellen der Übergangsschicht größer als ε_1 und ε_2 ist, so ist $\bar{\varrho}$ negativ, falls $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ist. Die Verhältnisse kehren sich um, falls $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ist, d. h. falls der die Reflexion herbeiführende Körper der schwächer brechende ist. Ein positiver Elliptizitätskoeffizient $\bar{\varrho}$ hat nach dem positiven Sinne der Amplitude R_p (vgl. Fig. 83 auf S. 266) zur Folge, daß die elliptische Erregungsbahn im reflektierten Licht entgegen dem Uhrzeiger durchlaufen wird, wenn man, in der Einfallsebene stehend, dem reflektierten Licht entgegenblickt und die einfallende elektrische Kraft unter 45^0 gegen die Einfallsebene von links oben nach rechts unten geht. Dagegen beschreibt bei dieser Lage der einfallenden elektrischen Kraft die reflektierte elektrische Kraft die Erregungsbahn im Sinne des Uhrzeigers, falls $\bar{\varrho}$ negativ ist.

Auch für beliebige andere Einfallswinkel ist das reflektierte Licht beständig elliptisch polarisiert, obwohl das einfallende Licht linear polarisiert ist, denn es ergibt sich stets eine relative Phasendifferenz Δ zwischen der p- und s-Komponente, welche nach (42) und (46) den Wert hat:

$$tg\,\Delta = 4\frac{\pi}{\lambda}\eta \frac{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \frac{\cos\varphi \sin^2\varphi}{\varepsilon_1 \sin^2\varphi - \varepsilon_2 \cos^2\varphi}, \tag{49}$$

während das Amplitudenverhältnis ϱ nicht merklich von dem normalen Wert

$$\varrho = -\frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)}, \tag{50}$$

(der sich bei Fehlen einer Oberflächenschicht ergibt) abweicht,

falls man nur bis auf erste Ordnung in $\eta:\lambda$ geht. Man kann für (49) auch schreiben unter Rücksicht auf (47):

$$
(51) \qquad tg\,\Delta = 4\bar{\varrho}\,\frac{n^2}{\sqrt{1+n^2}}\,\frac{\sin\varphi\,tg\,\varphi}{tg^2\varphi - n^2}.
$$

Wegen des kleinen Betrages von $\bar{\varrho}$ wird die relative Phasendifferenz nur bedeutend in der Nähe des Polarisationswinkels, für den $tg\,\varphi = n$ ist.

Diese theoretischen Erörterungen haben eine vollständige experimentelle Bestätigung gefunden. Zunächst bemerkt man, daß, falls der Einfallswinkel nach dem Brewsterschen Gesetz $tg\,\varphi = n$ gewählt wird, das reflektierte Licht trotzdem nicht vollständig linear polarisiert ist, da es sich, mit einem analysierenden Nicol betrachtet, nicht vollständig auslöschen läßt, allerdings aber stets sehr annähernd. Die Untersuchung des elleptisch polarisierten, reflektierten Lichtes mit einem Analysator und Kompensator (vgl. oben S. 242) steht mit den Formeln (50) und (51) in gutem Einklang.

Ferner ergibt sich, daß der Elliptizitätskoeffizient $\bar{\varrho}$ um so geringer ist, je weniger die reflektierende Fläche durch Berührung mit fremden Stoffen verunreinigt ist. So ist z. B. $\bar{\varrho}$ sehr gering an frischen Spaltflächen von Kristallen und an Flüssigkeitsoberflächen, die man durch Überfließen der Flüssigkeit fortwährend frisch erhält. — Bei polierten Spiegeln ist $\bar{\varrho}$ beträchtlicher. Auch die Vorzeichendifferenzen von $\bar{\varrho}$ bei Vertauschung der Rolle der beiden Körper 1 und 2 entsprechen der Theorie. Die Theorie wird auch insofern bestätigt, als bei Reflexion an polierten Körpern $\bar{\varrho}$ im allgemeinen positiv sich ergibt. Nur bei den verhältnismäßig schwach brechenden Körpern Flußspat ($n = 1{,}44$) und Hyalith ($n = 1{,}42$) ist bisher negative elliptische Polarisation beobachtet worden. In der Tat kann man nach der Theorie am ehesten bei schwach brechenden Körpern diese erwarten, falls nämlich der Brechungsindex der Polierschicht über dem des Körpers liegt.

Bei gut gereinigten, polierten Glasoberflächen liegt $\bar{\varrho}$ bei Reflexion in Luft etwa zwischen den Werten $\bar{\varrho} = 0{,}03$ (schweres Flintglas vom Brechungsindex $n = 1{,}75$) und $\bar{\varrho} = 0{,}007$.

Für Flüssigkeiten steigt (bei Reflexion in Luft) ϱ nicht über den Wert 0,01. Wasser zeigt einen negativen Elliptizitätskoeffizienten, der bei guter Reinigung der Oberfläche bis zum Werte 0,00035 herabgedrückt werden kann. Es gibt auch sogenannte neutrale

Flüssigkeiten, wie z. B. Glyzerin, welche keine nachweisbare elliptische Reflexionspolarisation haben. Nach der hier gegebenen theoretischen Formel für den Elliptizitätskoeffizienten ist nicht notwendig, daß diese Flüssigkeiten überhaupt keine Oberflächenschicht besitzen, d. h. daß eine tatsächliche Diskontinuität der Dielektrizitätskonstanten beim Übergang von Luft zur Flüssigkeit stattfinde. Vielmehr können Schichten existieren, welche Zwischenwerte der Dielektrizitätskonstanten besitzen, falls nur zugleich auch noch Schichten von größerer Dielektrizitätskonstante, als dem Werte in der Flüssigkeit, vorhanden sind.

Bei positiven Elliptizitätskoeffizienten (für Reflexion in Luft) kann man eine untere Grenze für die Dicke der Oberflächenschicht angeben. Man erhält nämlich offenbar bei einem bestimmten positiven ρ den kleinsten Wert, welchen die Dicke der Oberflächenschicht mindestens besitzen muß, falls man die Dielektrizitätskonstante derselben als konstant annimmt und zwar derartig, daß der in (48) auftretende Faktor $\frac{(\varepsilon-\varepsilon_1)(\varepsilon-\varepsilon_2)}{\varepsilon}$ ein Maximum wird. Dies tritt für den Fall ein, daß $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, d. h. falls die Dielektrizitätskonstante der Oberflächenschicht das geometrische Mittel der Dielektrizitätskonstanten der beiden aneinander grenzenden Körper ist. Nach (48) wird dann dieser untere Grenzwert $\bar{l}$ der Oberflächenschicht

$$\frac{\bar{l}}{\lambda} = \frac{\bar{\rho}}{\pi\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_2}+\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}-\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\bar{\rho}}{\pi\sqrt{1+n^2}} \, \frac{n+1}{n-1}, \tag{52}$$

falls n den Brechungsindex vom Körper 2 gegen den Körper 1 (Luft) bedeutet. So ergibt sich für Flintglas bei $n = 1{,}75$, $\bar{\rho} = 0{,}03$ (vgl. oben S. 280), $\bar{l} : \lambda = 0{,}0175$. Es genügt also schon die Annahme einer sehr geringen Dicke der Oberflächenschicht, um selbst eine starke elliptische Reflexionspolarisation zu erklären.

8. Total-Reflexion. Betrachten wir wiederum den Fall, daß das Licht in einem Körper 1 einfällt und an der Grenzfläche eines Körpers 2 reflektiert wird. Ist der Brechungsindex n von 2 gegen 1 kleiner als 1, so ist der zum Einfallswinkel φ zugehörige Brechungswinkel χ nicht mehr reell, falls ist

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi}{n} > 1. \tag{53}$$

Bei diesen Einfallswinkeln φ gibt es dann überhaupt kein gebrochenes Licht, sondern das ganze einfallende Licht wird reflektiert (Totalreflexion).

Um in diesen Fällen die Natur des reflektierten Lichtes in seiner Abhängigkeit von der Natur des einfallenden Lichtes zu bestimmen, müssen wir ebenso wie in § 3 dieses Kapitels verfahren. Die ganzen dortigen Entwickelungen und Schlußformeln, z. B. die Formeln (23) und (24), lassen sich schreiben unter Vermeidung des Brechungswinkels χ, indem man $\sin\chi$ nur als eine Abkürzung für $\sin\varphi : n$ auffaßt, so daß in den dortigen Formeln (22) und (23) $\cos\chi$ ersetzt wird durch

$$\cos\chi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{n^2}}.$$

Diese Größe ist, falls $\sin\varphi > n$, imaginär; um dies besser hervortreten zu lassen, wollen wir unter Benutzung der imaginären Einheit $\sqrt{-1} = i$ schreiben:

$$\cos\chi = -i\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1}. \tag{54}$$ [1]

Die Formeln (23) müssen unter allen Umständen richtig bleiben [2], denn sie ergeben sich aus den allgemeinen Grenzbedingungen beim Übergang des Lichtes über die Grenze zweier isotroper Körper, welche ganz unabhängig davon sind, ob Totalreflexion eintritt oder nicht. Aus den Formeln (23) erhalten wir aber unter Benutzung der Formel (54) komplexe Amplituden des reflektierten Lichtes, auch wenn die des einfallenden reell sind. Aus der auf S. 275 entwickelten physikalischen Bedeutung komplexer Amplituden ergibt sich also, daß durch Totalreflexion das reflektierte

1) $\cos\chi$ muß negativ-imaginär sein. Nach den zu erfüllenden Gleichungen wäre ein positiv- und ein negativ-imaginärer Wert von $\cos\chi$ möglich. Dieser Fall würde aber physikalisch nur dadurch zu realisieren sein, daß der Körper 2 eine Platte bildete, auf deren beiden Seiten Licht einfällt unter gleichem Einfallswinkel φ, der größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist. Dies geht aus den im nächsten § 9 angestellten Betrachtungen hervor.

2) Von Oberflächenschichten wollen wir hier absehen. Sie haben nur einen sehr geringen Einfluß bei Totalreflexion, vgl. darüber des Autors Arbeit in Wied. Ann. 43, S. 146, 1891.

Licht besondere Phasenänderungen gegenüber dem einfallenden Lichte erleidet.

Um dieselben berechnen zu können, schreiben wir gemäß (45) für die in (23) auftretenden reflektierten Amplituden die komplexen Größen $R_p \cdot e^{i\delta_p}$, $R_s \cdot e^{i\delta_s}$, so daß nach (23) und (54) wird, da $\sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1} = n$ ist,

$$
\begin{aligned}
E_s\left(\frac{i \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} - 1\right) &= R_s \cdot e^{i\delta_s}\left(\frac{i \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} + 1\right), \\
E_p\left(\frac{i \cos \varphi \cdot n}{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} - \frac{1}{n}\right) &= R_p \cdot e^{i\delta_p}\left(\frac{i \cos \varphi \cdot n}{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned} \tag{55}
$$

Um die Intensitäten des reflektierten Lichtes zu erhalten, d. h. die Größen $R_s{}^2$ und $R_p{}^2$, braucht man nur die Gleichungen (55) mit ihren komplex konjugierten Gleichungen zu multiplizieren, d. h. mit denjenigen Gleichungen, welche man aus (55) erhält, wenn man nur $-i$ an Stelle von i schreibt.[1] Es ergibt sich dadurch sofort

$$E_s{}^2 = R_s{}^2, \quad E_p{}^2 = R_p{}^2, \tag{56}$$

d. h. die Intensität des reflektierten Lichtes ist völlig gleich der des einfallenden Lichtes (Totalreflexion), und zwar gilt dies für beide Komponenten (s- und p-) einzeln.

Die absoluten Phasendifferenzen δ_s und δ_p wollen wir nicht diskutieren, dagegen hat die relative Phasendifferenz $\varDelta = \delta_p - \delta_s$ Interesse, da nach S. 278 sich daraus die Gestalt der Erregungsbahn im reflektierten Lichte ergibt. Durch Division der beiden Gleichungen (55) ergibt sich, falls wir $E_s = E_p$ setzen (d. h. das einfallende Licht linear im Azimuth 45° gegen die Einfallsebene polarisiert ist), da dann nach (56) auch $R_s = R_p$ ist:

$$\frac{i \cos \varphi - \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{i \cos \varphi \cdot n - \frac{1}{n}\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} = e^{i(\delta_s - \delta_p)} \frac{i \cos \varphi + \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{i \cos \varphi \cdot n + \frac{1}{n}\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}. \tag{57}$$

Hieraus folgt:

$$e^{i\varDelta} = e^{i(\delta_p - \delta_s)} = \frac{\sin^2 \varphi + i \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi - i \cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}.$$

---

1) Jede Gleichung zwischen komplexen Größen kann man ersetzen durch ihre konjugiert komplexe Gleichung, da die reellen und imaginären Bestandteile beider Seiten der Gleichung einzeln einander gleich sein müssen.

daher

$$\frac{1-e^{i\Delta}}{1+e^{i\Delta}}=\frac{-i\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}{\sin^2\varphi}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit ihrer konjugiert komplexen Gleichung, so entsteht, da $e^{i\Delta}+e^{-i\Delta}=2\cos\Delta$ ist:

$$\frac{1-\cos\Delta}{1+\cos\Delta}=\left\{\frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}{\sin^2\varphi}\right\}^2, \text{ d. h.}$$

(58)
$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\Delta=\frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}{\sin^2\varphi}.$$

Hieraus ergibt sich, daß die relative Phasendifferenz Δ für streifende Inzidenz $\varphi={}^1/_2\,\pi$, sowie für den Grenzwinkel der Totalreflexion $\sin\varphi=n$ verschwindet, dagegen für Zwischenwerte des Einfallswinkels von Null verschieden ist, d. h. daß das reflektierte Licht elliptisch polarisiert ist, falls das einfallende Licht linear polarisiert ist. Da aus (58) durch Differentiation nach φ folgt:

$$\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\Delta}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}=\frac{2n^2-\sin^2\varphi\,(1+n^2)}{\sin^3\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}},$$

so ist die relative Phasendifferenz Δ ein Maximum für denjenigen Einfallswinkel φ', welcher der Gleichung genügt:

(59)
$$\sin^2\varphi'=\frac{2n^2}{1+n^2}.$$

Der Maximalwert Δ' der Phasendifferenz ist dann nach (58) gegeben durch

(60)
$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\Delta'=\frac{1-n^2}{2n}.$$

Für Glas vom Brechungsindex 1,51, d. h. für $n=1:1{,}51$ (da die Reflexion im Glase, nicht in Luft erfolgen soll), wird nach (59) $\varphi'=51^0 20'$, ferner nach (60) wird $\Delta'=45^0 36'$. Δ nimmt genau den Wert 45^0 sowohl für den Einfallswinkel $\varphi=48^0 37'$ als für $\varphi=54^0 37'$ an. Durch zweimalige Totalreflexion unter einem dieser Einfallswinkel erhält man also zirkular polarisiertes Licht, falls das einfallende Licht linear unter dem Azi-

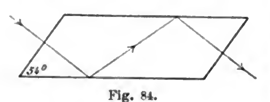


Fig. 84.

muth 45° gegen die Einfallsebene polarisiert ist, so daß $E_s = E_p$ ist, da dann Δ 90° beträgt und $R_s = R_p$ ist. Eine solche zweimalige Totalreflexion kann man durch Anwendung eines sogenannnten Fresnelschen Parallelepipeds erreichen, d. h. eines Glaskörpers von der in Fig. 81 gezeichneten Form. Falls das Licht senkrecht gegen die Schmalseite des Glaskörpers einfällt und linear unter 45° gegen die Einfallsebene polarisiert ist, so ist das austretende Licht zirkular polarisiert.

Ebenso kann man durch dreimalige, viermalige usw. Totalreflexion unter anderen Einfallswinkeln Zirkularpolarisation erhalten. Die hierfür anzuwendenden Glas-Parallelepipeda haben andere Kantenwinkel, z. B. 69°12′, 74°42′ usw. bei Glas vom Brechungsindex 1,51.

9. Über das bei der Totalreflexion in das zweite Medium eindringende Licht. Die bisherigen Erörterungen beziehen sich nur auf das reflektierte Licht. Jedoch auch im zweiten Medium ist der Lichtvektor von Null verschieden, da die Gleichungen (23) auf S. 268, 269 von Null verschiedene Werte für D_s und D_p liefern. — Zwar nimmt die Amplitude mit wachsenden Werten von z, d. h. in größerer Tiefe unter der Grenzfläche, schnell ab, denn nach (16) bezw. (18) auf S. 267 sind die elektrischen bezw. magnetischen Kräfte im zweiten Medium proportional den reellen Teilen der komplexen Größe:

$$e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x \sin\chi + z\cos\chi}{V_2}\right)}, \tag{61}$$

welche, falls man χ durch die früheren Gleichungen (53) und (54) ersetzt, in die Form übergeht:

$$e^{-\frac{2\pi}{TV_2}\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1}\cdot z} \cdot e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi}{nV_2}\right)}. \tag{62}$$

Indes ist für Werte z, welche nicht unendlich groß gegen die Wellenlänge $TV_2 = \lambda_2$ im zweiten Medium sind, die Amplitude nicht streng Null.

Hier tritt nun zunächst ein scheinbarer Widerspruch mit dem Resultate auf, daß die Intensität, d. h. Energie des reflektierten Lichtes, völlig gleich sein soll der Energie des einfallenden Lichtes, denn woher stammt die Energie des gebrochenen Lichtes?

Dieser Widerspruch löst sich, wenn wir nach der Energieströmung durch die Grenzfläche hindurch fragen. Nach der früheren Formel (24) auf S. 259 ist dieselbe, da hier $\cos(nx) = \cos(ny) = 0$, $\cos(nz) = 1$ ist:

$$\frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\, dt = dt \int (\beta_2 X_2 - \alpha_2 Y_2)\, dS. \tag{63}$$

Bildet man nun die elektrischen und magnetischen Kräfte als die reellen Teile derjenigen komplexen Größen, welche man aus den rechten Seiten der Formeln (16) und (18) auf S. 267 gewinnt, wenn man den Faktor $\cos\frac{2\pi}{T}(t\ldots)$ ersetzt durch $e^{i\frac{2\pi}{T}(t\ldots)}$, so erkennt man, daß wegen des Faktors $\cos\chi$, welcher nach (54) rein imaginär ist, α_2 die Phasendifferenz $\pi/_2$ gegenüber Y_2 besitzt, ebenso β_2 die Phasendifferenz $\pi/_2$ gegen X_2, so daß man, falls man schreibt

$$Y_2 = a\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right),$$

wobei a und δ nicht mehr die Zeit enthalten, die magnetische Kraft α_2 in der Form zu schreiben ist:

$$\alpha_2 = a' \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right).$$

Bildet man nun nach (63) den Energiefluß im Laufe einer Periode von $t = 0$ bis $t = T$, so tritt das Integral auf

$$\int_0^T \alpha_2 Y_2\, dt = aa' \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right) \cdot dt$$

$$= \frac{aa' \,.\, T}{4\pi}\left[\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right)\right]^T = 0.$$

Ebenso verschwindet das Integral über $\beta_2 X_2 dt$. In Summa tritt also im Laufe jeder einzelnen Schwingungsperiode keine Energie vom Medium 1 auf das Medium 2 über. Daher enthält das reflektierte Licht die ganze Energie des einfallenden Lichtes.

Daß keine Energie durch die xz-Ebene strömt, ist nach der Formel (62) direkt plausibel. Denn diese stellt Wellen dar, die sich nach der x-Achse fortpflanzen. In der Tat erhält man eine Energieströmung im Körper 2 nach der früheren Formel (24) auf

S. 259, sobald man die Strömungsrichtung (d. h. n) parallel zur x-Achse wählt. Am einen Ende der einfallenden Welle (bei negativen x) muß also etwas Energie auf das Medium 2 übergehen, welche durch die Wellen in ihm beständig nach dem anderen Ende der Wellen im Medium 1 (bei positiven x) transportiert wird.

Diese Wellen inkonstanter Amplitude besitzen noch eine andere Eigentümlichkeit: sie sind nämlich keine Transversalwellen. Denn aus (62) folgt, daß sie sich nach der x-Achse fortpflanzen, wenn es also Transversalwellen wären, so müßte $X_2 = 0$ sein. Dies ist aber nicht der Fall. — Es ist dies kein Widerspruch mit den früher S. 238 als Beweis für die Transversalität der Lichtwellen benutzten Fresnel-Aragoschen Versuchen, denn sie beziehen sich nur auf die Wellen konstanter Amplitude. Als Beweis dafür, daß auch im zweiten Medium bei der Totalreflexion der Lichtvektor von Null verschieden ist, wird der von Quincke herrührende Versuch angesehen, daß man diese Wellen inkonstanter Amplitude wieder in gewöhnliche Wellen konstanter Amplitude zurückverwandeln kann, wenn man die Dicke des Mediums 2 nur sehr gering, d. h. von der Größenordnung der Lichtwellenlänge, wählt. In der Tat kann ja an einer sehr dünnen Lamelle eines Körpers 2, der zwischen zwei gleichen Körpern 1 liegt, keine Totalreflexion mehr stattfinden, denn wenn wir schließlich als Grenzfall die Dicke dieser Lamelle gleich Null setzen, so muß das einfallende Licht ungestört, d. h. ohne Reflexion, weiter gehen, da überhaupt die Homogenität des Mediums nicht gestört ist. — Sobald eine sehr dünne Lamelle des Mediums 2 durchsichtig bleibt auch bei Überschreitung des Grenzwinkels der Totalreflexion, muß natürlich das reflektierte Licht an Intensität einbüßen. Theoretisch ergeben sich alle Einzelheiten dieses Falles, sowie man nur an beiden Seiten der Lamelle 2 die früher S. 258 als allgemeingültig aufgestellten Grenzbedingungen (21) benutzt.[1])

Ein anderes Mittel, um eine im Medium 2 bestehende Lichtbewegung im Falle der Totalreflexion nachzuweisen, besteht darin, daß man auf die Grenzfläche ein Beugungsgitter anbringt[2]), oder daß man nach W. Voigt[3]) als Grenzfläche eine unter stumpfen

---

1) Vgl. darüber das Nähere in Winkelmanns Hdb. Optik. 2. Aufl. S. 1275.

2) L. Ditscheiner, Wien. Ber. (2) **60,** S. 584, 1870. — E. Edser und E. Senior, Phil. Mag. (6) **4,** S. 346, 1902.

3) W. Voigt, Gött. Nachr. 1898, Heft 3. — Wied. Ann. **67,** S. 185, 1899.

Winkel geknickte Fläche benutzt, so daß an ihren beiden Seiten noch Totalreflexion stattfindet. Aus der Kante des Knicks tritt dann tatsächlich ein sehr feines Lichtbündel aus. Diese Anordnung Voigts ist in gewisser Weise die überzeugendste, die strenge Behandlung dieses Falles fällt aber natürlich in die Theorie der Beugung. Vgl. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **37**, 901; — u. Öttinger, ebenda, 911, 1912. Es ist klar, daß es sich streng nie um Totalreflexion handeln kann, d. h. um völlige Umwandlung der Energie des einfallenden in die des reflektierten Lichtes, sobald man aus dem Medium 2 Licht austreten sieht.

10. Benutzung der Totalreflexion zur Bestimmung von Brechungsexponenten. Wenn man das Licht in dem stärker brechenden Medium einfallen läßt und nun allmählich den Einfallswinkel vergrößert, so kennzeichnet sich das Eintreten der Totalreflexion durch eine fast plötzliche Verstärkung des reflektierten und völliges Verschwinden des gebrochenen Lichtes. Es ist aber zu bemerken, daß die Intensitätskurve für das reflektierte und gebrochene Licht in ihrer Abhängigkeit vom Einfallswinkel φ nicht etwa eine Diskontinuität erleidet, falls φ den Grenzwinkel der Totalreflexion erreicht, sondern diese Kurven ändern sich nur in diesem Gebiete so schnell mit φ, daß man praktisch eine Diskontinuität wahrzunehmen glaubt, so daß man darauf scharfe Bestimmungen des Brechungsexponenten gründen kann.[1] So besteht z. B. für Glas vom Brechungsindex $n = 1{,}51$ folgende Abhängigkeit der reflektierten Intensität R_p^2 vom Einfallswinkel φ (es ist $E_p^2 = 1$ gesetzt, ζ ist der Betrag in Bogenminuten, um welchen φ kleiner als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist):

ζ	0′	2′	4′	8′	15′	30′
R_p^2	1	0,74	0,64	0,53	0,43	0,25.

11. Intensität der Newtonschen Ringe. Wir wollen die Intensitäten des reflektierten und durchgehenden Lichtes berechnen, falls eine Platte der Dielektrizitätskonstante ε_2 und der Dicke d in einem Medium der Dielektrizitätskonstante ε_1 eingelagert ist.

---

1) Über die zu dem Zweck konstruierten Totalreflektometer und Refraktometer vgl. Winkelmanns Hdb. Optik, 2. Aufl., S. 604 u. ff. und S. 1267 u. ff. — In die Praxis ist diese Methode wesentlich erst durch das von F. Kohlrausch (Wied. Ann. **4**, S. 1, 1876; — **16**, S. 609, 1882) konstruierte Totalreflektometer eingeführt worden.

Die erste Grenzfläche der Platte, auf welche das einfallende Licht trifft, sei die xy-Ebene, die zweite Grenzfläche sei die Ebene $z = d$.

Der Einfachheit halber wollen wir senkrechte Inzidenz voraussetzen, schreiben also für das einfallende Licht:

$$X_e = 0, \quad Y = E \cdot e^{i 2\pi/T\,(t - z/V_1)}, \quad Z_e = 0. \qquad (64)$$

Daß wir $X_e = 0$ setzen, ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da bei senkrechter Inzidenz alle Resultate, welche für die y-Komponenten des Lichtvektors gelten, auch für die x-Komponenten unverändert gelten.

Nach den Formeln (14) der S. 266 muß für die einfallende magnetische Kraft, falls die elektrische Kraft durch (64) dargestellt wird, gelten:

$$\alpha_e = -E\sqrt{\varepsilon_1}\, e^{i 2\pi/T\,(t - z/V_1)}, \quad \beta_e = 0, \quad \gamma_e = 0. \qquad (65)$$

Die reflektierte elektrische und magnetische Kraft im Medium 1 wird dargestellt durch (vgl. die Formeln (15) und (17) der S. 267):

$$X_r = 0, \quad Y_r = R\, e^{i 2\pi/T\,(t + z/V_1)}, \quad Z_r = 0, \qquad (66)$$
$$\alpha_r = R\sqrt{\varepsilon_1}\, e^{i 2\pi/T\,(t + z/V_1)}, \quad \beta_r = 0, \quad \gamma_r = 0.$$

An den beiden Plattengrenzen finden nun wiederholte Lichtreflexionen und Brechungen statt (vgl. oben S. 129). Wir brauchen dieselben aber nicht einzeln zu verfolgen, sondern können gleich ihren Gesamteffekt in die Rechnung einführen.[1]) Derselbe besteht darin, daß sich in der Platte Wellen nach der positiven und nach der negativen z-Achse fortpflanzen. Für erstere gilt der Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} X' = 0, \quad Y' = D'\, e^{i 2\pi/T\,(t - z/V_2)}, \quad Z' = 0; \\ \alpha' = -D'\sqrt{\varepsilon_2}\, e^{i 2\pi/T\,(t - z/V_2)}, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

während für letztere Wellen gilt:

$$\left.\begin{aligned} X'' = 0, \quad Y'' = D''\, e^{i 2\pi/T\,(t + z/V_2)}, \quad Z'' = 0; \\ \alpha'' = D''\sqrt{\varepsilon_2}\, e^{i 2\pi/T\,(t + z/V_2)}, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

1) Auch der Ansatz (66) soll der Gesamteffekt aller einzelnen Wellenzüge sein, die sich im Medium 1 nach der negativen z-Achse fortpflanzen.

Der Gesamteffekt aller durch die Platte hindurch gegangenen Wellen möge sein:

$$(69)\qquad \begin{aligned} &X_d = 0, \quad Y_d = D e^{i\,2\pi/T\,(t - z/V_1)}, \quad Z_d = 0, \\ &\alpha_d = -D\sqrt{\varepsilon_1}\, e^{i\,2\pi/T\,(t - z/V_1)}, \quad \beta_d = 0, \quad \gamma_d = 0. \end{aligned}$$

An beiden Plattengrenzen ($z = 0$ und $z = d$) haben wir nun die Grenzbedingungen (21) der S. 258 anzuwenden, welche hier die Form annehmen:

$$(70)\qquad Y_e + Y_r = Y' + Y'', \quad \alpha_e + \alpha_r = \alpha' + \alpha'' \quad \text{für } z = 0,$$

$$(71)\qquad Y' + Y'' = Y_d, \qquad \alpha' + \alpha'' = \alpha_d \qquad \text{für } z = d.$$

Die Grenzbedingungen (70) liefern:

$$(70')\qquad E + \mathrm{R} = D' + D'', \quad (E - \mathrm{R})\sqrt{\varepsilon_1} = (D' - D'')\sqrt{\varepsilon_2},$$

während die Grenzbedingungen (71) ergeben:

$$(71')\quad D'e^{-ip} + D''e^{+ip} = De^{-iq}, \quad (D'e^{-ip} - D''e^{+ip})\sqrt{\varepsilon_2} = De^{-iq}\sqrt{\varepsilon_1},$$

falls p und q Abkürzungen sind für:

$$(72)\qquad p = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{d}{V_2} = 2\pi\frac{d}{\lambda_2}, \quad q = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{d}{V_1} = 2\pi\frac{d}{\lambda_1}.$$

Aus (71') folgt sofort:

$$(D'e^{-ip} + D''e^{+ip})\sqrt{\varepsilon_1} = (D'e^{-ip} - D''e^{+ip})\sqrt{\varepsilon_2},$$

woraus man ableitet:

$$(73)\qquad D'e^{-ip}(\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}) = D''e^{+ip}(\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}).$$

Aus (70') ergibt sich:

$$\frac{E + \mathrm{R}}{E - \mathrm{R}} = \frac{D' + D''}{D' - D''}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}, \quad \text{d. h. } \frac{\mathrm{R}}{E} = \frac{D'(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}) + D''(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})}{D'(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}) + D''(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}.$$

Vermöge (73) kann man die letzte Relation schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{R}}{E} &= \frac{(e^{+ip} - e^{-ip})(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{e^{+ip}(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})^2 - e^{-ip}(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})^2} \\ &= \frac{i\sin p\cdot(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{i\sin p\cdot(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\cdot\cos p}. \end{aligned}$$

Um die Intensität J_r des reflektierten Lichtes zu erhalten, ist die letzte Gleichung mit ihrer konjugiert komplexen Gleichung zu multiplizieren (vgl. S. 283). Man erhält so, falls J_e die Intensität des einfallenden Lichtes bezeichnet:

$$J_r = J_e \frac{\sin^2 p\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\sin^2 p\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 4\varepsilon_1 \varepsilon_2} = J_e \frac{\sin^2 p\,(1 - n^2)^2}{\sin^2 p\,(1 - n^2)^2 + 4 n^2}, \tag{74}$$

falls $\varepsilon_2 : \varepsilon_1 = n^2$ gesetzt wird, so daß n den Brechungsindex der Platte 2 gegen das Medium 1 bedeutet.

Aus (70′) und (71′) leitet man ferner leicht ab

$$\frac{De^{-iq}}{E} = \frac{4\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{e^{ip}(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})^2 - e^{-ip}(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}{i \sin p\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot \cos p},$$

so daß die Intensität J_d des durchgehenden Lichtes wird:

$$J_d = J_e \frac{4\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\sin^2 p\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + 4\varepsilon_1 \varepsilon_2} \tag{75}$$

Es besteht also die Beziehnung

$$J_d + J_r = J_e, \tag{76}$$

was von vornherein zu erwarten war, da die Platte kein Licht vernichtet.

Nach (74) verschwindet das reflektierte Licht vollkommen für die Werte: $p = 0,\ \pi,\ 2\pi$ usw., d. h. für die Plattendicken $d = 0$, $\frac{1}{2}\lambda_2$, λ_2, $\frac{3}{2}\lambda_2$ usw. Dies steht im Einklang mit dem oben auf S. 131 Formel (17) abgeleiteten Resultate. — Maximale Intensität findet statt für $\sin p = 1$. Dann ist $J_r = J_e \left(\frac{1 - n^2}{1 + n^2}\right)^2$. [Bei normaler Reflexion an nur einer Grenze ist nach Formel (26) auf S. 270 $J_r = J_e \left(\frac{1 - n}{1 + n}\right)^2$].

Wenn die Medien 1 und 2 Luft und Glas sind, so ist n etwa $= 1{,}5$. Bei den Newtonschen Ringen sind die Medien

1 und 2 Glas und Luft, d. h. $n = 1:1{,}5$. In beiden Fällen wird Formel (74):

$$J_r = J_e \frac{\sin^2 p \cdot 1{,}56}{\sin^2 p \cdot 1{,}56 + 9}.$$

Näherungsweise ist daher im Nenner von (74) der Term $\sin^2 p (1 - n^2)^2$ gegen $4n^2$ zu vernachlässigen, so daß man an einer Stelle des Newtonschen Farbenglases, an welcher die Dicke der Luftschicht d beträgt, erhält:

$$J_r = J_e \left(\frac{1 - n^2}{2n}\right)^2 \sin^2 2\pi \, d/\lambda. \tag{77}$$

λ bezeichnet die Wellenlänge in Luft. Fällt weißes Licht ein und ist J_λ die Intensität des einfallenden Lichtes der Wellenlänge λ, so wird die reflektierte Intensität, falls man von der Dispersion, d. h. der Abhängigkeit des n von λ absieht:

$$J_r = \left(\frac{1 - n^2}{2n}\right)^2 \Sigma J_\lambda \sin^2 2\pi \, d/\lambda. \tag{78}$$

Die Farben dünner Blättchen sind also Mischfarben, welche in der aus (78) ersichtlichen Weise aus den reinen Farben zusammengesetzt sind.

12. Inhomogene Körper; krumme Lichtstrahlen. Wir wollen noch kurz die optischen Eigenschaften eines inhomogenen Körpers betrachten, in welchem die Dielektrizitätskonstante ε eine Funktion des Ortes x, y, z ist. Der konsequenteste Weg ist, die Differentialgleichungen (18) der S. 256, welche auch für inhomogene Körper gelten, zu integrieren, wobei ε als Funktion von x, y, z gegeben sein muß. Auf diesem Wege würden sich sowohl die Bahnen der Lichtstrahlen, als auch die Intensität der im Innern eines inhomogenen Körpers notwendig auftretenden Reflexion berechnen. Aber selbst bei den einfachsten Annahmen für ε ist dieser Weg kompliziert und ist bisher nicht betreten worden. Man hat sich vielmehr darauf beschränkt, die Gestalt der Lichtstrahlen nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz oder dem Huygensschen Prinzip zu berechnen, was ohne weiteres gelingt, wenn man sich das Medium aus dünnen homogenen Schalen von verschiedenem Brechungsindex zusammengesetzt denkt. Bei stetiger Änderung derselben muß sich natürlich der Lichtstrahl krümmen. Von Heath[1]) ist nun für

1) Heath, Geom. Optik, deutsch von Kanthack. Berlin 1894, S. 363.

seinen Krümmungsradius ϱ an einem Orte P das Gesetz abgeleitet worden:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d \lg n}{d \nu}, \tag{79}$$

wobei ν die Richtung der stärksten Änderung (des Gefälles) des Brechungsindex n bezeichnet.

Diese Gleichung erklärt die Erscheinungen der Luftspiegelung, wie sie bei anomaler Verteilung der Luftdichte über der Erdoberfläche, z. B. bei stark erhitztem Sandboden, beobachtet werden. In einer gewissen Höhe über der Erde ist dann nämlich der Brechungsindex n der Luft ein Maximum. Nach (79) muß dann aber $\varrho = \infty$ sein, d. h. der Lichtstrahl hat in dieser Höhe einen Inflexionspunkt. Daher können von einem Gegenstande zwei verschieden gerichtete Strahlen in das Auge eines Beobachters gelangen, derselbe sieht also den Gegenstand doppelt, und zwar einmal in aufrechter, einmal in verkehrter Lage.[1])

Eine interessante Anwendung der Theorie der gekrümmten Lichtstrahlen ist von A. Schmidt[2]) für die Vorstellung von der Konstitution der Sonne gemacht worden, indem er zeigt, daß ein leuchtender Gasball von den Dimensionen der Sonne, dessen Dichte ohne Unstetigkeitsgrenze von außen nach innen zunimmt, einen Anblick gleich dem der Sonne gewähren muß, d. h. scheinbar eine scharfe Begrenzungslinie zeigt. Ein Lichtstrahl nämlich, welcher nach einem solchen Gasball innerhalb eines gewissen Distanzwinkels φ vom Zentrum hinzielt, wird nach dem Innern des Gasballs abgelenkt und um sein Zentrum vielfach herumgewunden. Er wird daher zu Tiefen geführt, welche ein kontinuierliches Spektrum aussenden. Denn ein glühendes Gas kann bei genügendem Druck dies tun. Ein Sehstrahl aber, welcher einen größeren Distanzwinkel als φ vom Zentrum des Gasballs besitzt, muß sich wieder vom Gasball entfernen, ohne stark leuchtende Schichten durchsetzt zu haben. Daher erscheint die Sonne als scharf begrenzte Scheibe vom Sehwinkel 2φ, obwohl eine Unstetigkeitsgrenze der Dichte fehlt.

---

1) Nähere Ausführung dieser interessanten Erscheinungen und Zusammenstellung der Literatur findet sich in Winkelmann, Hdb. der Physik, Optik, S. 485—566 (Autoren Straubel und Bemporad).

2) A. Schmidt, Die Strahlenbrechung auf der Sonne. Stuttgart, 1891.

Über die experimentelle Darstellung gekrümmter Lichtstrahlen vgl. J. Macé de Lépinay und A. Perot (Ann. de chim. et de phys. (6) 27, p. 94, 1892) und O. Wiener (Wied. Ann. 49, S. 105, 1893). Letzterer hat gekrümmte Lichtstrahlen verwendet zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung.

Kapitel III.

Optische Eigenschaften durchsichtiger Kristalle.

1. Differentialgleichungen und Grenzbedingungen. Ein Kristall unterscheidet sich dadurch von einem isotropen Körper, daß seine Eigenschaften in verschiedenen Richtungen verschieden sind. Die spezifischen Eigenschaften eines Körpers sind nun in der elektromagnetischen Theorie lediglich durch seine Dielektrizitätskonstante definiert, wenn wir an dem schon oben S. 256 eingenommenen Standpunkte festhalten, daß die Magnetisierungskonstante aller Körper stets gleich 1 zu setzen ist.

Revidieren wir nun die früher auf S. 256 und ff. gegebene Ableitung der Differentialgleichungen für einen isotropen Körper, so ergibt sich, daß die dortigen Gleichungen (17) allein die spezifischen Eigenschaften des Körpers, d. h. seine Dielektrizitätskonstante, enthalten. Dagegen sind die Gleichungen (7) und (11) auch in einem Kristall gültig, wie schon oben bemerkt wurde. Die Gleichungen (17) sind also allein zu erweitern, da in einem Kristall die Dielektrizitätskonstante von der Richtung der elektrischen Kraftlinien abhängt. Der allgemeinste Ansatz für die Erweiterung der Gleichungen (17) auf S. 256 bestünde nun in

$$
\begin{aligned}
4\pi j_x &= \varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t}, \\
4\pi j_y &= \varepsilon_{21}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial t}, \qquad (1)\\
4\pi j_z &= \varepsilon_{31}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{32}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{33}\frac{\partial Z}{\partial t},
\end{aligned}
$$

da die Stromkomponenten jedenfalls lineare Funktionen der $\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Z}{\partial t}$ bleiben werden. Dieser Ansatz (1) würde besagen, daß im allgemeinen bei einem Kristall die Richtung der Stromlinien nicht zusammenfällt mit der Richtung der Kraftlinien, da z. B., falls X allein von Null verschieden ist, trotzdem auch j_y und j_z von Null verschieden sein können.

Die frühere Formel (23) der S. 259 für die Energieströmung ist dadurch abzuleiten, daß die allgemein gültigen Gleichungen (9) und (11), nämlich:

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \ldots \frac{4\pi}{c} s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \ldots$$

bzw. mit $X\,d\tau, \ldots \alpha\,d\tau$ multipliziert werden und nach $d\tau$ (Volumelement) integriert wird. Es ergibt sich dadurch

$$\frac{4\pi}{c}\int (j_x X + j_y Y + j_z Z)\,d\tau$$
$$+ \frac{4\pi}{c}\int (s_x \alpha + s_y \beta + s_z \gamma)\,d\tau = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{E}\,d\tau,$$

wobei $\mathfrak{E}$ die Energie des Volumenelementes $d\tau$ bedeutet. An dieser Formel halten wir auch in einem Kristall fest, da spezifische Eigenschaften des Mediums in der Formel nicht vorkommen. Für die Änderung der elektromagnetischen Energie $\mathfrak{E}$ der Volumeneinheit im Laufe der Zeit besteht also die Beziehung:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = j_x X + j_y Y + j_z Z + s_x \alpha + s_y \beta + s_z \gamma.$$

Die drei letzten Terme dieser Gleichung bilden nun, da das zweite Tripel der Gleichungen (17) der S. 256 auch hier gelten soll (mit dem Werte $\mu = 1$), einen Differentialquotienten nach der Zeit. Es ist nämlich:

$$s_x \alpha + s_y \beta + s_z \gamma = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Folglich muß auch $j_x X + j_y Y + j_z Z$ ein Differentialquotient nach der Zeit sein. Damit dies aber nach dem Ansatz (1) möglich ist, müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}, \qquad (2)$$

und es wird dann der Teil $\mathfrak{E}$ der Energie, der von den elektrischen Kräften abhängt:

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_{11} X^2 + \varepsilon_{22} Y^2 + \varepsilon_{33} Z^2 + 2\varepsilon_{23} YZ + 2\varepsilon_{31} ZX + 2\varepsilon_{12} XY). \tag{3}$$

Durch Transformation des Koordinatensystems läßt sich nun $\mathfrak{E}_1$ stets auf die kanonische Form bringen:

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 Z^2). \tag{4}$$

Für diese Wahl der Koordinatenachsen verschwinden also die ε_{hk}, und die Gleichungen (1) nehmen die vereinfachte Gestalt an:

$$j_x = \frac{\varepsilon_1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}, \quad j_y = \frac{\varepsilon_2}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t}, \quad j_z = \frac{\varepsilon_3}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t}. \tag{5}$$

Diese Koordinatenachsen zeichnen sich also dadurch aus, daß in ihren Richtungen die elektrische Strömung in die Richtung der elektrischen Kraft fällt. Wir wollen diese Achsen die **elektrischen Symmetrieachsen** nennen, da der Kristall in elektrischer Hinsicht sich symmetrisch verhält in bezug auf diese drei zueinander senkrechten Richtungen, oder auch in bezug auf die drei zueinander senkrechten Ebenen, welche durch diese 3 Achsen gelegt werden können. — Die ε_1, ε_2, ε_3 haben die Bedeutung der Dielektrizitätskonstanten, falls die elektrischen Kraftlinien in die Richtung einer der drei elektrischen Symmetrieachsen fallen; wir wollen sie die **Hauptdielektrizitätskonstanten** nennen.

Wir wollen, wie schon oben bemerkt ist, nicht die Annahme einführen, daß der Kristall in verschiedenen Richtungen merkbare Verschiedenheiten seiner Magnetisierungskonstante besäße. Wenngleich dies streng genommen nicht der Fall ist, wie man aus den Einstellungtendenzen von Kristallkugeln in starken magnetischen Feldern wahrnehmen kann, so kann man diese Annahme für Lichtschwingungen doch machen, ohne in Widerspruch mit der Erfahrung zu gelangen, gerade wie schon bei der Behandlung isotroper Körper ihre Magnetisierungskonstante einfach gleich 1 gegesetzt wurde.[1])

In den Differentialgleichungen (18) auf S. 256, welche für

1) Über den theoretischen Grund, weshalb für Lichtschwingungen beständig $\mu = 1$ zu setzen ist, vgl. die späteren Entwicklungen in Kapitel VII.

isotrope Körper gelten, sind daher nur diejenigen Modifikationen anzubringen, welche durch die Verschiedenheit der Dielektrizitätskonstante nach der Richtung bedingt werden. Die Dielektrizitätskonstante tritt nur in den ersten drei Gleichungen (18) auf. Ihr Inhalt besagte, daß die elektrischen Stromkomponenten proportional zu den Größen $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}$ usw. seien. Da die Stromkomponenten im Kristall durch die Gleichungen (1) bzw. (5) gegeben sind, so werden daher bei Zugrundelegung der elektrischen Symmetrieachsen als Koordinatenachsen die allgemein gültigen Differentialgleichungen (7) und (11) der S. 252 und 254 des elektromagnetischen Feldes in einem Kristall:

$$\frac{\varepsilon_1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{\varepsilon_2}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon_3}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \tag{7}$$

Für ein beliebig liegendes Koordinatensystem würden die Gleichungen (6) zu ersetzen sein durch:

$$\frac{1}{c}\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}, \text{ usw.} \tag{6'}$$

Die Bedingungen, welche an der Grenze zweier sich berührender Kristalle, oder eines Kristalls und eines isotropen Mediums (z. B. Luft) zu erfüllen sind, erhält man nach denselben Überlegungen, wie sie in § 8 des Kapitels I (S. 257) angestellt worden sind; sie fordern: Stetigkeit der der Grenze parallelen elektrischen und magnetischen Kraft beim Übergang über die Grenze.

2. Lichtvektor und Lichtstrahl. Schon bei Betrachtung iso troper Medien (S. 270 ff.) hatten wir gesehen, daß man formal verschiedene Gesetze für die optischen Erscheinungen erhält, je nachdem der Lichtvektor mit der elektrischen oder der magnetischen Kraft identifiziert wird. Beide Verfügungen führen allerdings zu denselben beobachtbaen Resultaten, wenn man von den bei stehenden Wellen wahrnehmbaren Erscheinungen absieht. Ähnlich verhält es sich hier in der Kristalloptik, nur tritt hier noch eine neue Möglichkeit hinzu, nämlich die elektrische Strömung als Lichtvektor zu wählen. Seine Komponenten sind dann proportional zu $\varepsilon_1\frac{\partial X}{\partial t}$, $\varepsilon_2\frac{\partial Y}{\partial t}$, $\varepsilon_3\frac{\partial Z}{\partial t}$. Dadurch erhalten wir drei Theorien der Kristalloptik, welche formal voneinander verschieden sind, sowohl

in bezug auf die Lage des Lichtvektors zur Polarisationsebene, als auch in bezug auf die Lage des Lichtvektors zur Wellennormale bei ebenen Wellen. Was zunächst die letztere anbelangt, so ergibt sich nach S. 264, daß der Lichtvektor senkrecht zu der Wellennormale bei ebenen Wellen liegt, d. h. daß ebene Wellen transversale sind, wenn seine Komponenten, die mit u, v, w bezeichnet werden mögen, der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Durch Differentiation der Gleichungen (7) bezw. nach x, y, z und Addition erhält man nun hier, gerade analog wie früher auf S. 261:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = 0, \tag{9}$$

d. h. es bestehen transversale Wellen, falls die magnetische Kraft als Lichtvektor interpretiert wird.

Wendet man eine gleiche Operation auf die drei Gleichungen (6) an, so entsteht:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t}\right) = 0, \tag{10}$$

d. h. man erhält ebenfalls Transversalwellen, falls die elektrische Strömung als Lichtvektor interpretiert wird.

Dagegen erhält man keine Transversalwellen, falls die elektrische Kraft als Lichtvektor interpretiert wird, da infolge der letzten Gleichung durch die Verschiedenheit der ε_1, ε_2, ε_3 die Ungleichung besteht:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \lessgtr 0. \tag{11}$$

Die Polarisationsebene geht durch die Richtung der Wellennormale und der magnetischen Kraft, wie wir es schon oben S. 270 bei isotropen Medien konstatierten.

Die formalen Verschiedenheiten der drei möglichen kristalloptischen Theorien sind also folgende:

1) Die magnetische Kraft ist der Lichtvektor. Ebene Wellen sind transversal, der Lichtvektor liegt in der Polarisationsebene. (Mechanische Theorie von F. Neumann, G. Kirchhoff, W. Voigt u. a.)

2) Die elektrische Kraft ist der Lichtvektor. Ebene Wellen sind nicht streng transversal, der Lichtvektor liegt nahezu senkrecht zur Polarisationsebene. (Mechanische Theorien von Ketteler, Boussinesq, Lord Rayleigh u. a.)

3) Die elektrische Strömung ist der Lichtvektor. Ebene Wellen sind transversal, der Lichtvektor liegt senkrecht zur Polarisationsebene. (Mechanische Theorie von Fresnel.)

Diese formalen Verschiedenheiten der Theorien können zu beobachtbaren Unterschieden nicht führen, falls man, wie es bei den kristalloptischen Erscheinungen, z. B. beim Durchgang des Lichtes durch eine Kristallplatte, stets der Fall ist, schließlich die Lichteffekte doch nur in einem isotropen Medium bei fortschreitenden (nicht stehenden) Wellen beobachtet. Man muß nur jedes Problem in voller Strenge, d. h., mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen, lösen. Dann ist das zu behandelnde System der Differentialgleichungen und Grenzbedingungen ein bestimmt gegebenes; für die elektrische Kraft im isotropen Außenmedium erhält man eine ganz bestimmte Lösung, unabhängig davon, was als Lichtvektor im Kristall interpretiert ist; falls die magnetische Kraft im isotropen Außenmedium als Lichtvektor interpretiert wird, an Stelle der elektrischen Kraft, so erhält man gleiche beobachtbare Resultate, da nach den Grundgleichungen die Intensität der fortschreitenden magnetischen Welle stets gleich der Intensität der fortschreitenden elektrischen Welle ist.

Die elektromagnetische Lichttheorie bietet also den Vorteil, daß sie eine Reihe formal verschiedener Theorien gleichzeitig umfaßt und zeigt, weshalb sie zu demselben Endziel führen müssen.

Den Lichtstrahl definieren wir nach S. 259 als Bahn der Energieübertragung. Nach der auf S. 296 aufgestellten Formel für die elektromagnetische Energie im Kristall bleibt auch hier die frühere Formel (23) der S. 259 für den Energiefluß bestehen. Die Richtungskosinus des Lichtstrahls sind also auch im Kristall den früher (S. 260) Formeln (25), definierten Größen f_x, f_y, f_z proportional.

Der Lichtstrahl steht also senkrecht auf der elektrischen und magnetischen Kraft. Er fällt daher im allgemeinen nicht mit der Wellennormale ebener Wellen zusammen, da diese nicht senkrecht zur elektrischen Kraft steht, wegen der Ungleichung (11).

3. Das Fresnelsche Gesetz für die Lichtgeschwindigkeit. Um die Lichtgeschwindigkeit im Kristall zu finden, stellen wir uns aus den Hauptgleichungen (6) und (7) solche Differentialgleichungen her, welche entweder nur die elektrische Kraft oder nur die magnetische Kraft enthalten. Ersteres erreicht man, wenn man die drei Gleichungen (6) nach t differenziert und für die auf der rechten Seite auftretenden Größen $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, $\frac{\partial \beta}{\partial t}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$, ihre Werte aus den Gleichungen (7) einsetzt. Man erhält so aus der ersten der Gleichungen (6):

$$\frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann man in der mehr symmetrischen Form schreiben:

$$\frac{\varepsilon_1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \tag{12}$$

Analog erhält man aus den beiden anderen Gleichungen (6):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_2}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \Delta Y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \\ \frac{\varepsilon_2}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= \Delta Z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Was wir als Lichtvektor interpretieren, bedingt nach den Auseinandersetzungen des vorangegangenen Paragraphen nur formale Verschiedenheiten. Um Anschluß an die Fresnelsche Theorie zu gewinnen, setzen wir den Lichtvektor proportional zur elektrischen Strömung, indem wir als Komponenten u, v, w des Lichtvektors bei ebenen Wellen schreiben:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon_1 X = A\mathfrak{M} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right), \\ v &= \varepsilon_2 Y = A\mathfrak{N} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right), \\ w &= \varepsilon_3 Z = A\mathfrak{P} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Dabei soll sein

$$\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 = m^2 + n^2 + p^2 = 1. \tag{14}$$

Es bedeutet dann A die Amplitude des Lichtvektors, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ seine Richtungskosinus gegen die Koordinatenachsen (elektrischen Symmetrieachsen), m, n, p die Richtungskosinus der Wellennormale, V die Lichtgeschwindigkeit, gemessen in Richtung der Wellennormale (sogenannte Normalengeschwindigkeit). Wegen der Gleichung (10) besteht die Beziehung:

$$\mathfrak{M}m + \mathfrak{N}n + \mathfrak{P}p = 0, \tag{15}$$

welche die Transversalität der Wellen ausdrückt.

Das Einsetzen der Werte (13) in (12) liefert (es ist C für das obige c geschrieben):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{M}}{C^2} &= \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon_1 V^2} - \frac{m}{V^2}\left(\frac{\mathfrak{M}m}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{N}n}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{P}p}{\varepsilon_3}\right), \\
\frac{\mathfrak{N}}{C^2} &= \frac{\mathfrak{N}}{\varepsilon_2 V^2} - \frac{n}{V^2}\left(\frac{\mathfrak{M}m}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{N}n}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{P}p}{\varepsilon_3}\right), \\
\frac{\mathfrak{P}}{C^2} &= \frac{\mathfrak{P}}{\varepsilon_3 V^2} - \frac{p}{V^2}\left(\frac{\mathfrak{M}m}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{N}n}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{P}p}{\varepsilon_3}\right).
\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $C^2 V^2$ und setzt zur Abkürzung:

$$C^2 \varepsilon_1 = a^2,\ C^2 : \varepsilon_2 = b^2,\ C^2 : \varepsilon_3 = c^2,\text{[1]} \tag{16}$$

$$a^2 \mathfrak{M}m + b^2 \mathfrak{N}n + c^2 \mathfrak{P}p = G^2, \tag{16'}$$

so entsteht

$$\mathfrak{M}(a^2 - V^2) = m\,G^2, \quad \mathfrak{N}(b^2 - V^2) = n\,G^2, \quad \mathfrak{P}(c^2 - V^2) = p\,G^2, \tag{17}$$

$$\text{d. h. } \mathfrak{M} = G^2 \frac{m}{a^2 - V^2}, \quad \mathfrak{N} = G^2 \frac{n}{b^2 - V^2}, \quad \mathfrak{P} = G^2 \frac{p}{c^2 - V^2}. \tag{17'}$$

Durch Multiplikation dieser letzten drei Gleichungen mit bezw. m, n, p und Addition entsteht auf der linken Seite der Wert Null wegen der Beziehung (15), so daß man mit Fortlassung des Faktors G^2 erhält:

$$\frac{m^2}{a^2 - V^2} + \frac{n^2}{b^2 - V^2} + \frac{p^2}{c^2 - V^2} = 0. \tag{18}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für V^2 als Funktion von m, n, p; es ergeben sich also zu jeder bestimmten Richtung

---

1) Der Buchstabe c kommt also im Buche in zwei verschiedenen Bedeutungen vor. Im allgemeinen bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Nur in der Kristalloptik soll hierfür C geschrieben werden und c hat hier die Bedeutung $C : \sqrt{\varepsilon_3}$.

der Wellennormale zwei verschiedene Lichtgeschwindigkeiten. Die Formel (18) heißt das Fresnelsche Gesetz.

Für $m=1$, $n=p=0$ sind die beiden Lichtgeschwindigkeiten $V_1{}^2=b^2$, $V_2{}^2=c^2$. Für den Fall, daß die Wellennormale in einer der elektrischen Symmetrieachsen des Kristalls liegt, sind also zwei von den Größen a, b, c die Lichtgeschwindigkeiten. Diese Größen a, b, c werden daher die Hauptlichtgeschwindigkeiten genannt.

Dasselbe Geschwindigkeitsgesetz (18) ergibt sich, falls man die magnetische Kraft oder die elektrische Kraft als Lichtvektor wählt.

4. Die Lage der Lichtschwingungen. Zu jeder Wellennormale gibt es zwei sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzende Wellen. Die Lage der charakteristischen Größen, z. B. der elektrischen Strömung, ist in ihnen eine ganz bestimmte, und zwar in beiden Wellen eine verschiedene. Bezeichnet man nämlich die Zugehörigkeit zu den beiden verschiedenen Wellen durch Indizes 1 und 2, so ergibt sich aus (18′) die Lage des Lichtvektors aus:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}_1 : \mathfrak{N}_1 : \mathfrak{P}_1 &= \frac{m}{a^2-V_1{}^2} : \frac{n}{b^2-V_1{}^2} : \frac{p}{c^2-V_1{}^2}, \\ \mathfrak{M}_2 : \mathfrak{N}_2 : \mathfrak{P}_2 &= \frac{m}{a^2-V_2{}^2} : \frac{n}{b^2-V_2{}^2} : \frac{p}{c^2-V_2{}^2}. \end{aligned}$$

In Richtung einer bestimmten Wellennormale können sich also nur zwei linear polarisierte Wellen fortpflanzen, und zwar sind diese Wellen senkrecht zueinander polarisiert. Denn aus (19) erhält man:

$$(20)\qquad \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \sim \frac{m^2}{(a^2-V_1{}^2)\,(a^2-V_2{}^2)} + \text{u. s. w.}$$

Nun ist aber

$$\frac{m^2}{(a^2-V_1{}^2)\,(a^2-V_2{}^2)} = \frac{m^2}{V_1{}^2-V_2{}^2}\left(\frac{1}{a^2-V_1{}^2} - \frac{1}{a^2-V_2{}^2}\right),$$

so daß die linke Seite von (20) proportional ist zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_1{}^2-V_2{}^2}\Big\{ & \frac{m^2}{a^2-V_1{}^2} + \frac{n^2}{b^2-V_1{}^2} + \frac{p^2}{c^2-V_1{}^2} \\ & - \frac{m^2}{a^2-V_2{}^2} - \frac{n^2}{b^2-V_2{}^2} - \frac{p^2}{c^2-V_2{}^2}\Big\}. \end{aligned}$$

aber sowohl V_1 als V_2 der Gleichung (18) genügt, so ist ganze Ausdruck Null. Folglich liegt der Lichtvektor $\mathfrak{M}_1$, senkrecht zum Vektor $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{P}_2$.

ie Lichtgeschwindigkeit ist eine eindeutige Funktion hwingungsrichtung. Denn das Fresnelsche Gesetz (18) nan unter Rücksicht auf (19) schreiben:

$$(a^2 - V^2)\mathfrak{M}^2 + (b^2 - V^2)\mathfrak{N}^2 + (c^2 - V^2)\mathfrak{P}^2 = 0,$$

da $\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 = 1$ ist:

$$V^2 = a^2\mathfrak{M}^2 + b^2\mathfrak{N}^2 + c^2\mathfrak{P}^2. \tag{18'}$$

. **Die Normalenfläche.** Um eine Anschauung davon zu haben, elcher Weise die Lichtgeschwindigkeit mit der Richtung der lennormale variiert, empfiehlt es sich, von einem gewissen Anspunkt 0 aus auf allen beliebigen Normalenrichtungen die len Lichtgeschwindigkeiten als Radienvektoren abzutragen. erhält dadurch eine zweischalige Fläche, die sogenannte rmalenfläche. In einer elektrischen Symmetrieebene, z. B. r yz-Ebene ($m = 0$), sind nach (18) die beiden Wurzeln für die schwindigkeit:

$$V_1{}^2 = a^2, \quad V_2{}^2 = b^2p^2 + c^2n^2, \tag{21}$$

h. der Schnitt der Normalenfläche mit einer elektrischen Symmetrieebene besteht in einem Kreise und einem Ovale. Falls $>b>c$ ist, erhält man daher die in Figur 85 gezeichneten Schnitte r Wellenfläche mit den Symmetrieebenen. In der xz-Ebene len danach für zwei Richtungen der Wellennormale, die durch und A_2 bezeichnet sind, die beiden Wurzeln V_1 und V_2 notndig zusammen, da beide Schalen der Wellenfläche zum Schnitt mmen. Es läßt sich zeigen, daß dies für keine anderen chtungen der Wellennormale eintreten kann. Die adratische Gleichung für V^2 ist nämlich nach (18):

$$\begin{aligned} V^4 - V^2 \left\{m^2(b^2 + c^2) + n^2(c^2 + a^2) + p^2(a^2 + b^2)\right\} \\ + m^2b^2c^2 + n^2c^2a^2 + p^2a^2b^2 = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Auflösung dieser Gleichung liefert, falls man setzt:

$$M = m^2(b^2 - c^2), \quad N = n^2(c^2 - a^2), \quad P = p^2(a^2 - b^2) \tag{23}$$

$$\begin{aligned} 2V^2 = m^2(b^2 + c^2) + n^2(c^2 + a^2) + p^2(a^2 + b^2) \\ \pm\sqrt{M^2 + N^2 + P^2 - 2MN - 2NP - 2MP}. \end{aligned} \tag{24}$$

Da nun $a > b > c$, so ist M und P positiv, N negativ. Da man den Radikanden schreiben kann in der Form:

$$(M + N - P)^2 - 4MN,$$

so besteht er aus zwei positiven Gliedern. Ein Zusammenfallen beider Wurzeln für V^2 erfordert daher die beiden Bedingungen:

$$M + N - P = 0, \quad MN = 0.$$

Es kann nun M nicht gleich Null sein, weil dann $N = P$ sein

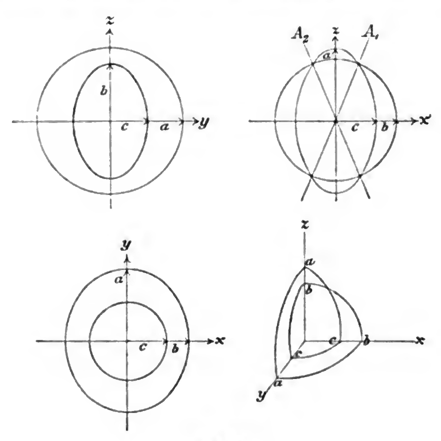


Fig. 85.

müßte, was nicht möglich ist, da N negativ und P positiv ist. Folglich verschwindet der Radikand nur für

$$N = 0, \quad M = P,$$

d. h.

$$n = 0, \quad m^2(b^2 - c^2) = p^2(a^2 - b^2), \tag{25}$$

oder da $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ ist, so ergibt sich

$$m = \pm\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad n = 0, \quad p = \pm\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \tag{26}$$

Hierdurch sind also die beiden Richtungen der Wellennormale bestimmt, für welche die beiden Lichtgeschwindigkeiten zusammen-

fallen. Man nennt diese Richtungen die optischen Achsen. Die elektrischen Symmetrieachsen x und z, welche die Winkel zwischen den optischen Achsen halbieren, werden auch die optischen Mittellinien des Kristalls genannt.

Der Wert der beiden Wellen gemeinsamen Lichtgeschwindigkeit, falls die Wellennormale in die optische Achse fällt, ist $V_1 = V_2 = b$, Dies geht direkt aus der Zeichnung in Figur 85 hervor, ebenso aus der Gleichung (24) in Verbindung mit (26). Die Schwingungsrichtung in diesen Wellen ist daher nach (19) unbestimmt, da in jenen Gleichungen der unbestimmte Ausdruck $n : b^2 - V^2 = 0 : 0$ auftritt. In Richtung der optischen Achse kann sich daher jede Lichtart fortpflanzen, d. h. sowohl beliebig polarisiertes, als auch natürliches Licht.

Die Lichtgeschwindigkeit V läßt sich bequemer als nach (24) berechnen, wenn man die Winkel g_1 und g_2 einführt, welche die Wellennormale mit den optischen Achsen bildet. Als positive Richtung der einen optischen Achse A_1 sei diejenige gerechnet, welche spitze Winkel mit der x- und z-Achse bildet. Ihre Richtungskosinus sind also nach (26):

$$m_1 = +\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad n_1 = 0, \quad p_1 = +\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \tag{26'}$$

Als positive Richtung der anderen optischen Achse A_2 sei diejenige gerechnet, welche einen spitzen Winkel mit der z-Achse, aber einen stumpfen Winkel mit der x-Achse bildet. Ihre Richtungskosinus sind daher:

$$m_2 = -\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad n_2 = 0, \quad p_2 = +\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \tag{26''}$$

Die Kosinus der Winkel g_1, g_2 zwischen Wellennormale und den positiven Richtungen der Achsen A_1, A_2 sind daher:

$$\begin{aligned} \cos g_1 &= mm_1 + nn_1 + pp_1, \text{ d. h.} \\ \cos g_1 &= m\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} + p\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \\ \cos g_2 &= -m\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} + p\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Infolge der Relation $n^2 = 1 - m^2 - p^2$ kann man nun leicht die Beziehung ableiten:

$$(28)\quad \begin{gathered} m^2(b^2+c^2)+n^2(c^2+a^2)+p^2(a^2+b^2) \\ =a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos g_1 \cos g_2, \\ M^2+N^2+P^2-2MN-2NP-2MP=(a^2-c^2)^2\sin^2 g_1 \sin^2 g_2. \end{gathered}$$

Folglich wird nach (24):

$$(29)\quad \begin{aligned} 2V_1^2 &= a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos(g_1-g_2), \\ 2V_2^2 &= a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos(g_1+g_2). \end{aligned}$$

6. Geometrische Konstruktion der Wellenfläche und der Schwingungsrichtung. Nach Fresnel kann man die Lichtgeschwindigkeit und die Schwingungsrichtung mit Hilfe einer Fläche des Ovaloids in folgender Weise geometrisch konstruieren: Der Radiusvektor ϱ des Ovaloids bilde mit den Koordinatenachsen die Richtungskosinus ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3. Die Gleichung des Ovaloids lautet dann:

$$(30)\quad \varrho^2=a^2\vartheta_1^2+b^2\vartheta_2^2+c^2\vartheta_3^2,$$

a, b, c sind die Hauptachsen des Ovaloids. Um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenebene zu finden, legen wir parallel derselben eine Ebene durch das Zentrum des Ovaloids und suchen den größten und kleinsten Radiusvektor ϱ_1 und ϱ_2 des erhaltenen Ovalschnittes. Diese sind gleich den beiden Lichtgeschwindigkeiten der betreffenden Wellenebene, die Richtungen von ϱ_1 und ϱ_2 geben die Schwingungsrichtungen an, und zwar die Richtung von ϱ_1 für die mit der Geschwindigkeit ϱ_1 fortschreitende Welle.

Um diese Konstruktion als richtig zu erweisen, müssen wir berücksichtigen, daß ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 noch die beiden Bedingungen befriedigen:

$$(31)\quad 1=\vartheta_1^2+\vartheta_2^2+\vartheta_3^2,$$

$$(32)\quad 0=m\vartheta_1+n\vartheta_2+p\vartheta_3.$$

Letztere Gleichung drückt aus, daß der Ovalschnitt senkrecht zur Wellennormale steht. Um nun diejenigen Richtungen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ zu finden, für welche ϱ ein Maximum oder Minimum annimmt, kann man nach Regeln der Differentialrechnung ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 als voneinander unabhängige Variabele betrachten, wenn man zu der Gleichung (30) noch die mit den unbestimmten (Lagrangeschen) Faktoren σ_1, σ_2 multiplizierten Gleichungen (31) und (32) addiert. Durch Nullsetzen der einzelnen Differentialquotienten von ϱ^2 nach ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 erhält man dann:

$$(33)\quad \begin{aligned} 0 &= 2(a^2+\sigma_1)\vartheta_1+m\sigma_2, \\ 0 &= 2(b^2+\sigma_1)\vartheta_2+n\sigma_2, \\ 0 &= 2(c^2+\sigma_1)\vartheta_3+p\sigma_2. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 und addiert, so ergibt sich wegen (31) und (32):

$$a^2\vartheta_1{}^2 + b^2\vartheta_2{}^2 + c^2\vartheta_3{}^2 = -\sigma_1.$$

Es ist also nach (30) $\sigma_1 = -\varrho^2$. Setzt man diesen Wert in (33) ein, so kann man jene drei Gleichungen in der Form schreiben:

$$\vartheta_1 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2 \frac{m}{a^2 - \varrho^2}, \quad \vartheta_2 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2 \frac{n}{b^2 - \varrho^2}, \quad \vartheta_3 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2 \frac{p}{c^2 - \varrho^2}. \quad (34)$$

Durch Multiplikation mit bezw. m, n, p und Addition folgt wegen (32):

$$\frac{m^2}{a^2 - \varrho^2} + \frac{n^2}{b^2 - \varrho^2} + \frac{p^2}{c^2 - \varrho^2} = 0,$$

d. h. ϱ befriedigt tatsächlich dieselbe Gleichung, wie die Lichtgeschwindigkeit V (vgl. Formel (18) der S. 301).

Aus (34) folgt nun, daß ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 dieselben Verhältnisse untereinander besitzen, wie nach (19) $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, d. h. der Lichtvektor hat die Richtung des maximalen, bezw. minimalen Radiusvektors des Ovalschnittes.

Da die Schwingungsrichtung nach § 5 unbestimmt wird für den Fall, daß die Wellennormale mit einer optischen Achse zusammenfällt, so kann in diesem Falle der Ovalschnitt kein Maximum oder Minimum des Radiusvektors besitzen, d. h. das Ovaloid muß in einem Kreise geschnitten werden von Ebenen, welche normal zur optischen Achse sind. Die Radien dieser beiden Kreise sind einander gleich, und zwar gleich b. Ein beliebig liegender Ovalschnitt einer Wellenebene, deren Normale N sei, schneidet die beiden Kreisschnitte des Ovaloids in zwei Radienvektoren r_1 und r_2, welche die gleiche Länge b haben. Diese Vektoren r_1 und r_2 sind senkrecht zu den Ebenen, welche man durch die Wellennormale N und je eine optische Achse A_1, bezw. A_2 legen kann, da z. B. r_1 sowohl senkrecht zu N wie zu A_1 steht. Diese Ebenen (NA_1) bezw. (NA_2) schneiden daher den Ovalschnitt, den die Wellenebene mit dem Ovaloid macht, ebenfalls in zwei gleichen Radienvektoren r'_1 und r'_2, da $r'_1 \perp$ zu r_1, $r'_2 \perp$ zu r_2 ist; da auch $r_1 = r_2$, so folgt aus der Symmetrie des Ovalschnittes, daß auch $r'_1 = r'_2$ ist und daß die Hauptachsen ϱ_1 und ϱ_2 desselben den Winkel zwischen r_1 und r_2, r'_1 und r'_2 halbieren. Die Schwingungsrichtungen des Lichtvektors (die mit ϱ_1 und ϱ_2 koinzidieren) liegen daher in den beiden Ebenen, welche die

von den Ebenen (NA_1) bezw. (NA_2) gebildeten Winkel halbieren. Dadurch sind die Schwingungsrichtungen bestimmt, da sie auch senkrecht zur Wellennormale N liegen. Die zu V_2 (nach (29) definiert) zugehörige Schwingungsrichtung liegt in der Halbierungsebene des Winkels (A_1, N, A_2), wobei A_1 und A_2 die nach (26'), (26") definierten, positiven Richtungen der optischen Achsen bedeuten; die zu V_1 zugehörige Schwingung liegt senkrecht gegen diese Ebene, d. h. in der Halbierungsebene des Winkels $(A_1, N, -A_2)$.

7. Einachsige Kristalle. Wenn zwei der Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c einander gleich sind, z. B. falls $a = b$ ist, so treten besondere Vereinfachungen ein. Aus (26) auf S. 304 folgt, daß beide optischen Achsen zusammenfallen, nämlich in die z-Achse; daher heißen diese Kristalle einachsig. Aus (29) auf S. 306 folgt, da dann stets $g_1 = g_2$ ist:

$$V_1^2 = a^2, \quad V_2^2 = a^2 \cos^2 g + c^2 \sin^2 g, \tag{35}$$

wobei g den Winkel bedeutet, welchen die Wellennormale mit der optischen Achse bildet. Die eine Welle hat also konstante Geschwindigkeit, sie wird die ordinäre Welle genannt. Die Schwingungsrichtung der extraordinären Welle liegt nach der Konstruktion der vorigen Seite im Hauptschnitt des Kristalls, d. h. in der Ebene, welche durch optische Achse und Wellennormale geht, die ordinäre Welle schwingt daher senkrecht zum Hauptschnitt. Da der Hauptschnitt (vgl. oben S. 231) als Polarisationsebene der ordinären Welle definiert ist, so liegen also die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene, wie es der Fresnelsche Standpunkt auch für isotrope Medien ergab. — Wenn der Winkel g der Wellennormale N mit der optischen Achse variiert, aber N in einem bestimmten Hauptabschnitt verbleibt, so bleibt daher die Schwingungsrichtung der ordinären Welle unverändert, aber die der extraordinären Welle variiert. Daher ergibt sich das schon oben S. 239 § 7 behauptete Resultat, daß der Fresnelsche Standpunkt den Vorzug der Einfachheit insofern genießt, als für das Verhalten einer Welle lediglich die Schwingungsrichtung maßgebend ist. Bleibt diese unverändert, so bleibt auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle unverändert, auch wenn sich die Richtung der Wellennormale ändert.

Einachsige Kristalle liefern diejenigen Kristallsysteme, welche eine ausgezeichnete Kristallachse besitzen, zu welcher zwei (oder

drei) gleichwertige Achsen senkrecht stehen, d. h. das tetragonale und hexagonale System. Die optische Achse fällt in die ausgezeichnete kristallographische Achse. Die Kristalle des regulären Systems unterscheiden sich optisch nicht von isotropen Körpern, da nach ihrer kristallographischen Symmetrie $a = b = c$ sein muß.

Rhombische, monokline, trikline Kristalle können zweiachsig (in optischer Hinsicht) sein. Bei ersteren fallen die kristallographischen Symmetrieachsen notwendig mit den elektrischen Symmetrieachsen zusammen, da ein Kristall in jeder physikalischen Hinsicht mindestens die Symmetrie besitzt, welche auch der Kristallform eigen ist. Bei monoklinen Kristallen kann man aus der Kristallform nur auf die Lage der einen elektrischen Symmetrieachse schließen, da diese senkrecht zu der (einzigen) kristallographischen Symmetrieebene steht, bei triklinen Kristallen haben die elektrischen Symmetrieachsen überhaupt keine von vornherein bestimmte Lage zur Kristallform.

Bei einachsigen Kristallen ($a = b$) wird nach (30) das Ovaloid zur Rotationsfläche:

$$\varrho^2 = a^2 + (c^2 - a^2)\,\vartheta_3^{\,2}. \tag{36}$$

Je nachdem diese Fläche in Richtung der Achse abgeplattet oder verlängert ist, nennt man den Kristall positiv-, oder negativ-einachsig. Für ersteren Fall ist daher $a > c$, für letzteren $a < c$. Nach (35) ist bei positiven Kristallen die ordinäre Welle die schnellere, d. h. weniger stark brechbare, bei negativen Kristallen wird dagegen die ordinäre Welle stärker gebrochen als die extraordinäre. Quarz ist positiv, Kalkspath negativ einachsig.

8. Bestimmung der Richtung des Lichtstrahls aus der Wellennormale. Die Richtungskosinus des Lichtstrahls seien $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ genannt. Nach den auf S. 299 angestellten Überlegungen und der Formel (25) auf S. 260 ist:

$$\mathfrak{m} : \mathfrak{n} : \mathfrak{p} = \gamma Y - \beta Z : \alpha Z - \gamma X : \beta X - \alpha Y. \tag{37}$$

Nun ist aber nach den Formeln (13) auf S. 300 und der dortigen Bezeichnung (16)

$$X : Y : Z = a^2\mathfrak{M} : b^2\mathfrak{N} : c^2\mathfrak{P}, \tag{38}$$

ferner leitet man aus den Formeln (7) der S. 297 und den Formeln (13) sofort ab:

$$\alpha : \beta : \gamma = b^2 p\mathfrak{N} - c^2 n\mathfrak{P} : c^2 m\mathfrak{P} - a^2 p\mathfrak{M} : a^2 n\mathfrak{M} - b^2 m\mathfrak{N}. \tag{39}$$

Setzt man die Werte (38) und (39) in (37) ein, so erhält man

$$(40)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{m}:\mathfrak{n}:\mathfrak{p} = &- m\,(a^4\,\mathfrak{M}^2 + b^4\,\mathfrak{N}^2 + c^4\,\mathfrak{P}^2)\\ &+ \mathfrak{M}\,a^2\,(a^2 m\,\mathfrak{M} + b^2 n\,\mathfrak{N} + c^2 p\,\mathfrak{P}) : \ldots : \ldots\end{aligned}$$

Die durch ... angedeuteten Terme ergeben sich aus dem hingeschriebenen Terme durch zyklische Vertauschung der Buchstaben.

Benutzt man nun die Abkürzung (16′) der S. 301, d. h. setzt man:

$$(41)\qquad a^2 m\,\mathfrak{M} + b^2 n\,\mathfrak{N} + c^2 p\,\mathfrak{P} = G^2,$$

so folgt aus den dortigen Gleichungen (17)

$$a^2\,\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\,V^2 + m\,G^2,\quad b^2\,\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\,V^2 + n\,G^2,\quad c^2\,\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\,V^2 + p\,G^2.$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser drei Gleichungen erhält man daher, da

$$\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 = m^2 + n^2 + p^2 = 1,$$
$$\mathfrak{M}m + \mathfrak{N}n + \mathfrak{P}p = 0 \text{ (vgl. S. 301) ist:}$$
$$(42)\qquad a^4\,\mathfrak{M}^2 + b^4\,\mathfrak{N}^2 + c^4\,\mathfrak{P}^2 = V^4 + G^4.$$

Durch Quadrieren und Addieren der drei Gleichungen (17′) ergibt sich

$$(43)\qquad 1 = G^4\left\{\left(\frac{m}{a^2 - V^2}\right)^2 + \left(\frac{n}{b^2 - V^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{c^2 - V^2}\right)^2\right\}.$$

Setzt man nun für $\mathfrak{M}a^2$ den aus (17′) folgenden Wert ein

$$\mathfrak{M}a^2 = G^2\,\frac{m a^2}{a^2 - V^2},$$

so folgt unter Benutzung von (41) und (42) für (40):

$$\mathfrak{m}:\mathfrak{n}:\mathfrak{p} = -m\,(V^4 + G^4) + m G^4\,\frac{a^2}{a^2 - V^2} : \ldots : \ldots,$$

oder

$$(44)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{m}:\mathfrak{n}:\mathfrak{p} = m\left(V^2 + \frac{G^2}{V^2 - a^2}\right) &: n\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - b^2}\right)\\ &: p\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - c^2}\right).\end{aligned}$$

Durch diese Gleichung ist die Richtung des Lichtstrahls ausgedrückt in ihrer Abhängigkeit von der Richtung der Wellen-

normale, da sich V^2 aus m, n, p nach dem Fresnelschen Gesetz (18) bestimmt und G^2 nach (43) auch durch m, n, p und V^2 ausgedrückt ist.

Um die Richtungskosinus $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ absolut zu bestimmen (nicht nur ihre Verhältnisse), können wir setzen:

$$\mathfrak{m} = m\sigma\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - a^2}\right), \quad \mathfrak{n} = n\sigma\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - b^2}\right), \quad \mathfrak{p} = p\sigma\left(V^2 + \frac{G^4}{V^2 - c^2}\right), \tag{45}$$

wobei σ ein Proportionalitätsfaktor ist, den wir bestimmen können, falls diese drei Gleichungen quadriert und addiert werden. Es folgt dann mit Rücksicht auf (18) und (43):

$$1 = \sigma^2(V^4 + G^4). \tag{46}$$

9. Die Strahlenfläche. Wenn eine Wellenebene in der Zeiteinheit sich um die Strecke V parallel mit sich fortgepflanzt hat, so wird V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenebene genannt. Der Lichtstrahl liegt schief zur Wellennormale und macht mit ihr einen Winkel ζ, der gegegeben ist durch

$$\cos\zeta = \mathfrak{m}m + \mathfrak{n}n + \mathfrak{p}p. \tag{47}$$

Der Lichtstrahl hat dann in der Zeiteinheit den Weg $\mathfrak{V}$ zurückgelegt, wobei ist:

$$\mathfrak{V}\cos\zeta = V. \tag{48}$$

$\mathfrak{V}$ wird die Strahlengeschwindigkeit genannt, sie ist also größer als die Normalgeschwindigkeit.

Durch Multiplikation der drei Gleichungen (45) mit m, n, p und Addition folgt $\cos\zeta = \sigma V^2$, d. h. unter Rücksicht auf (48):

$$\sigma = 1 : V\mathfrak{V}. \tag{49}$$

Nach (46) folgt daher:

$$G^4 = V^2\mathfrak{V}^2 - V^4, \tag{50}$$

oder unter Rücksicht auf (48):

$$G^2 = V^2 \operatorname{tg}\zeta. \tag{51}$$

Setzt man den Wert G^4 nach (50) in die Gleichungen (45)

ein, und berücksichtigt man (49), so erhält man durch einfache Umformung:

$$(52)\qquad \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}^2-a^2}=\frac{mV}{V^2-a^2},\quad \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}^2-b^2}=\frac{nV}{V^2-b^2},\quad \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}^2-c^2}=\frac{pV}{V^2-c^2}.$$

Multipliziert man diese drei Gleichungon mit bezw. $\mathfrak{m}a^2$, $\mathfrak{n}b^2$, $\mathfrak{p}c^2$ und addiert sie, so entsteht unter Rücksicht auf (17'):

$$\mathfrak{V}\left(\frac{\mathfrak{m}^2a^2}{\mathfrak{V}^2-a^2}+\frac{\mathfrak{n}^2b^2}{\mathfrak{V}^2-b^2}+\frac{\mathfrak{p}^2c^2}{\mathfrak{V}^2-c^2}\right)=-\frac{V}{G^2}(a^2\mathfrak{M}\mathfrak{m}+b^2\mathfrak{N}\mathfrak{n}+c^2\mathfrak{P}\mathfrak{p}).$$

Nun steht aber der Lichtstrahl senkrecht zur elektrischen Kraft. Daher verschwindet die rechte Seite der letzten Gleichung, da die Komponenten der elektrischen Kraft der Relation (38) genügen. Es entsteht also die Beziehung:

$$(53)\qquad \frac{\mathfrak{m}^2a^2}{\mathfrak{V}^2-a^2}+\frac{\mathfrak{n}^2b^2}{\mathfrak{V}^2-b^2}+\frac{\mathfrak{p}^2c^2}{\mathfrak{V}^2-c^2}=0,$$

welche man auch schreiben kann in der Form:

$$(53')\qquad \frac{\mathfrak{m}^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\mathfrak{V}^2}}+\frac{\mathfrak{n}^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\mathfrak{V}^2}}+\frac{\mathfrak{p}^2}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\mathfrak{V}^2}}=0.$$

Addiert man zu (53) die Beziehung $\mathfrak{m}^2+\mathfrak{n}^2+\mathfrak{p}^2=1$, so ergibt sich

$$(53'')\qquad \frac{\mathfrak{m}^2\mathfrak{V}^2}{\mathfrak{V}^2-a^2}+\frac{\mathfrak{n}^2\mathfrak{V}^2}{\mathfrak{V}^2-b^2}+\frac{\mathfrak{p}^2\mathfrak{V}^2}{\mathfrak{V}^2-c^2}=1.$$

Durch diese Beziehungen ist die Strahlengeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ als Funktion der Strahlrichtung dargestellt. Trägt man $\mathfrak{V}$ als Radiusvektor in der Richtung $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ von einem festen Punkte aus ab, so erhält man die sogenannte **Strahlenfläche**. Dieselbe ist ebenfalls eine zweischalige Fläche, gerade wie die Normalenfläche, hat überhaupt mit letzterer große Ähnlichkeit, da aus der Gleichung (18) der Normalenfläche durch Ersetzung aller dort auftretenden Längen durch ihre reziproken Werte die Gleichung (53') der Strahlenfläche erhalten wird. Die Symmetrieebenen schneiden die Strahlenfläche je in einem Kreise und einer Ellipse.

Die in § 6 angegebene geometrische Konstruktion ergibt also hier, daß man auszugehen hat von der Fläche [vgl. die dortige Formel (30)]:

$$\frac{1}{\varrho_2}=\frac{\vartheta_1^2}{a^2}+\frac{\vartheta_2^2}{b^2}+\frac{\vartheta_3^2}{c^2},$$

d. h. einem Ellipsoid mit den Hauptachsen a, b, c. Die Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{B}$ in einer bestimmten Richtung $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ wird erhalten als die Hauptachsen ρ_1 und ρ_2 derjenigen Ellipse, in welcher das Ellipsoid geschnitten wird von einer zum Strahl senkrechten Ebene.

Auch hier müssen zwei Richtungen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ existieren, für welche die beiden Wurzeln $\mathfrak{B}^2$ der quadratischen Gleichung (53′) zusammenfallen. Man erhält diese Richtungen aus den früheren Formeln (26′), (26″) für die optischen Achsen, wenn man alle Längen durch ihre reziproken Werte ersetzt. Dies ergibt:

$$\mathfrak{m} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}}, \qquad \mathfrak{n} = 0, \qquad \mathfrak{p} = \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}},$$

oder

$$\mathfrak{m} = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad \mathfrak{n} = 0, \qquad \mathfrak{p} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \tag{54}$$

Diese beiden Richtungen heißen die Strahlenachsen.

Die Strahlenfläche kann man ansehen als diejenige Fläche, bis auf welche sich eine von einem Punkte P ausgehende Lichterschütterung in der Zeiteinheit fortgepflanzt hat. (Sie wird aus diesem Grunde in der Literatur zum Teil auch „Wellenfläche" genannt.)

Wenn man die einzelnen Punkte P einer Wellenebene nach dem Huygensschen Prinzip als Erregungszentren auffaßt und um diese die Strahlenfläche konstruiert, so würde die Enveloppe derselben die Lage der Wellenebene nach der Zeiteinheit darstellen (vgl. oben S. 155). Nach dieser Konstruktion ist also die zu einem Strahl PS zugehörige Wellenebene die Tangentialebene, welche im Punkte S an die Strahlenfläche gelegt werden kann.

Dies ist nun in der Tat auch aus unsern Formeln ableitbar. Wenn man die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes S der Strahlenfläche mit x, y, z bezeichnet, so ist $\mathfrak{m}\mathfrak{B} = x$, usw., $\mathfrak{B}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und nach (53″):

$$\frac{x^2}{\mathfrak{B}^2 - a^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{B}^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{B}^2 - c^2} - 1 = 0. \tag{55}$$

Bezeichnet man diese Gleichung symbolisch als $F(x, y, z) = 0$, so sind die Richtungskosinus der Normale der Tangentialebene im

Punkte x, y, z proportional zu $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$. Wir müssen also beweisen, daß ist:

(56) $$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}=m:n:p.$$

Es ist nun nach (55):

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x\left(\frac{1}{\mathfrak{B}^2-a^2}-\frac{x^2}{(\mathfrak{B}^2-a^2)^2}-\frac{y^2}{(\mathfrak{B}^2-b^2)^2}-\frac{z^2}{(\mathfrak{B}^2-c^2)^2}\right).$$

Nach (52) ist nun $x:\mathfrak{B}^2-a^2=mV:V^2-a^2$, usw., unter Rücksicht auf die Beziehung (43) und (50) ergibt sich also

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x\left(\frac{1}{\mathfrak{B}^2-a^2}-\frac{V^2}{G^4}\right)=\frac{2xV^2}{G^4}\cdot\frac{a^2-V^2}{\mathfrak{B}^2-a^2},$$

d. h. mit Rücksicht auf (52):

(57) $$\frac{\partial F}{\partial x}=-2m\frac{V^3}{G^4}.$$

Aus dieser Gleichung kann man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ ableiten. Es ergibt sich daher sofort die Relation (56), d. h. jene aus dem Huygensschen Prinzip gefundene Konstruktion wird bestätigt.

Nach diesen Überlegungen kann man die Strahlenrichtung $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ aus der Wellennormalen m, n, p in folgender Weise ableiten: Die Strahlenfläche berührt sämtliche von einem Punkte P nach allen Richtungen in der Zeiteinheit fortgepflanzten Wellenebenen, ist also die Enveloppe dieser Wellenebenen. Wenn wir daher drei Wellenebenen ins Auge fassen, welche der Richtung PN unendlich nahe benachbart sind, so muß ihr Schnittpunkt unendlich nahe benachbart sein dem Endpunkt S des zur Normalenrichtung PN zugehörigen Lichtstrahls PS, da S gemeinsam allen drei Wellenebenen angehört. Die Richtigkeit dieser Konstruktion möge nun auch analytisch bewiesen werden: Die Gleichung einer Wellenebene ist

(58) $$mx+ny+pz=V.$$

Wenn x, y, z auch einer unendlich nahe benachbarten Wellenebene angehören soll, so gilt auch die Gleichung (58), wenn man sie nach m, n, p differenziert. Diese Größen sind aber nicht voneinander unabhängig, da $m^2+n^2+p^2=1$ ist. Nach dem Verfahren von

Lagrange (vgl. oben S. 306) kann man aber zu (58) die Identität

$$f(m^2+n^2+p^2)=f$$

hinzu addieren, so daß man erhält:

$$mx+ny+pz+f(m^2+n^2+p^2)=V+f. \tag{59}$$

f ist eine unbekannte Konstante. Da diese noch mit in die Rechnung eingeführt ist, so kann man jetzt in (59) m, n, p als von einander unabhängige Variabele ansehen und die Differentialquotienten von (59) einzeln nach m, n, p bilden, so daß man erhält:

$$x+2fm=\frac{\partial V}{\partial m}, \quad y+2fn=\frac{\partial V}{\partial n}, \quad z+2fp=\frac{\partial V}{\partial p}. \tag{60}$$

Nun ist aber nach (18) und (43):

$$\frac{\partial V}{\partial m}=\frac{m}{V^2-a^2}\cdot\frac{G^4}{V},$$

analoge Ausdrücke gelten für $\frac{\partial V}{\partial n}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$. Durch Multiplikation der drei Gleichungen (60) mit bezw. m, n, p und Addition entsteht auf der rechten Seite wegen (18) und (61) der Wert Null. Auf der linken Seite aber steht wegen (58): $V+2f$, so daß sich die Konstante $2f$ bestimmt zu $2f=-V$. Daher wird die erste Gleichung (60) in Rücksicht auf (61):

$$x=m\left(V+\frac{1}{V^2-a^2}\cdot\frac{G^4}{V}\right), \text{ und analog:}$$
$$y=n\left(V+\frac{1}{V^2-b^2}\cdot\frac{G^4}{V}\right),$$
$$z=p\left(V+\frac{1}{V^2-c^2}\cdot\frac{G^4}{V}\right).$$

Der Radiusvektor vom Koordinatenanfang nach dem Schnittpunkt x, y, z der drei benachbarten Wellenebenen fällt daher in der Tat mit der auf S. 311 berechneten Strahlenrichtung zusammen, da $x:y:z=\mathfrak{m}:\mathfrak{n}:\mathfrak{p}$. Außerdem ergibt sich die Strahlengeschwindigkeit $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ zu demselben Wert, wie er oben gefunden wurde [vgl. die Formeln (45) und (49)].

Über weitere geometrische Beziehungen zwischen Strahl, Wellennormale, optischen Achsen und Strahlenachsen vgl. Winkel-

mann, Hdb. d. Phys. Optik, 2 Aufl. S. 1192 u. ff. — Pockels, Lehrb. d. Kristalloptik, Leipzig u. Berlin, (Teubner) 1906. S. 31 u. ff.

10. Konische Refraktion. Zu jeder bestimmten Richtung einer Wellennormale ergeben sich im allgemeinen zwei verschiedene zugehörige Strahlenrichtungen nach den Gleichungen (44), da jedem bestimmten m, n, p zwei verschiedene Werte V^2 zugehören. Es kann nun aber eintreten, daß diese Gleichungen die unbestimmte Form $0:0$ annehmen, nämlich wenn eine der Größen m, n, p gleich Null ist. Nehmen wir z. B. $m=0$ an, so ergibt sich nach (21) auf S. 303 $V_1{}^2=a^2$. Für diesen Fall würde nach (43) und (44) sein:

$$G^4=(V_1{}^2-a^2)^2:m^2,$$

$$\mathfrak{m}\sim m\frac{G^4}{V_1{}^2-a^2}=m\cdot\frac{V_1{}^2-a^2}{m^2}. \tag{62}$$

Den Wert dieses in der Form $0:0$ erscheinenden Ausdruckes können wir leicht bestimmen, da nach der Fresnelschen Gleichung (18) S. 301 der Ausdruck $m^2:V_1{}^2-a^2$ einen endlichen, angebbaren Wert hat, nämlich es ist:

$$\frac{m^2}{V_1{}^2-a^2}=\frac{n^2}{b^2-V_1{}^2}+\frac{p^2}{c^2-V_1{}^2}. \tag{63}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist stets von Null verschieden, da für $a>b>c$ und $V_1{}^2=a^2$ beide Terme der rechten Seite beständig negativ sind. Nach (58) ist daher $\mathfrak{m}=0$ für $m=0$, d. h. der Strahl liegt in der yz-Ebene, falls die Wellennormale in der yz-Ebene liegt. — Ganz ähnlich ist der Schluß für den Fall $p=0$. Dagegen erfordert der Fall $n=0$ eine besondere Betrachtung. Es ergibt sich dann nämlich analog wie in (58) und (59) für $V=b$:

$$\mathfrak{n}\sim n\frac{V^2-b^2}{n^2},\quad \frac{n^2}{V^2-b^2}=\frac{m^2}{a^2-V^2}+\frac{p^2}{c^2-V^2}. \tag{64}$$

Hier kann nun die rechte Seite der letzten Gleichung für $V=b$ zu Null werden, nämlich, falls ist:

$$m^2(c^2-b^2)+p^2(a^2-b^2)=0.$$

Diese Beziehung ist nun in der Tat erfüllt, falls die Wellennormale in eine optische Achse fällt (vgl. Formel (25) auf S. 304). In diesem Falle behält nach (64) $\mathfrak{n}$ die unbestimmte Form $0:0$; dieser Wellennormale gehören nicht zwei einzelne bestimmte

Strahlen zu, sondern eine unendliche Mannigfaltigkeit von Strahlen, da $\mathfrak{n}$ tatsächlich unbestimmt bleibt. Die zugehörigen Strahlen findet man für diesen Fall am einfachsten aus der Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{m}m}{\mathfrak{V}^2 - a^2} + \frac{\mathfrak{n}n}{\mathfrak{V}^2 - b^2} + \frac{\mathfrak{p}p}{\mathfrak{V}^2 - c^2} = 0, \tag{65}$$

welche man aus (52) durch bezw. Multiplikation mit m, n, p und Addition unter Rücksicht auf (18) ableitet. Fällt die Wellennormale in eine optische Achse, so ist $n = 0$, dagegen braucht $\mathfrak{n}$ nicht Null zu sein und $\mathfrak{V}$ ist daher dann von b verschieden. Daher ergibt sich:

$$\frac{\mathfrak{m}m}{\mathfrak{V}^2 - a^2} + \frac{\mathfrak{p}p}{\mathfrak{V}^2 - c^2} = 0. \tag{66}$$

Ferner ist nach (47) und (48), da $V = b$ ist:

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{m}m + \mathfrak{p}p) = b. \tag{67}$$

Eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen $\mathfrak{V}^2$, so ergibt sich:

$$(\mathfrak{m}mc^2 + \mathfrak{p}pa^2)(\mathfrak{m}m + \mathfrak{p}p) = b^2. \tag{68}$$

Nennt man die Koordination der Endpunkte des Strahles x, y, z, wobei also $\mathfrak{m} = x : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ usw., so folgt:

$$(x\,mc^2 + z\,pa^2)\,(x\,m + z\,p) = b^2(x^2 + y^2 + z^2). \tag{69}$$

Dieses ist die Gleichung eines durch den Koordinatenanfang gehenden Kegels zweiten Grades. Es gehören also zur optischen Achse als Wellennormale unendlich viel Strahlen, welche auf dem durch die Gleichung (69) definierten Kegel liegen. Derselbe schneidet auf der Wellenebene

$$x\,m + z\,p = const. \tag{70}$$

einen Kreis aus, da durch Einsetzen der Gleichung (70) in die Gleichung (69) letztere übergeht in:

$$(x\,mc^2 + z\,pa^2) \cdot const. = b^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

d. h. in die Gleichung einer Kugel.

Nach dem auf S. 313 Erörterten folgt daher, daß die Strahlenfläche zwei zu den optischen Achsen senkrechte Tangentialebenen

besitzt, welche dieselbe in einem Kreise berühren. Eine Erzeugende des Strahlenkegels fällt in die optische Achse selber und steht daher auf der Ebene des Kreises senkrecht. Der Öffnungswinkel χ des Strahlenkegels ergibt sich aus (69) zu:

$$tg\,\chi = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b^2} \tag{71}$$

Diese hier besprochene Erscheinung wird innere konische Refraktion genannt aus folgendem Grunde: Wenn ein Lichtstrahl auf eine Kristallplatte in einer solchen Richtung einfällt, daß die gebrochene Wellennormale die Richtung einer optischen Achse des Kristalls besitzt, so liegen die im Innern desselben verlaufenden Lichtstrahlen auf einem Kegelmantel; die aus der Kristallplatte austretenden Lichtstrahlen liegen daher auf einem elliptischen Zylinder, dessen Achse dem einfallenden Lichte parallel ist, falls die Kristallplatte planparallel ist.[1] Zur Beobachtung eignet sich gut Aragonit, weil bei ihm der Öffnungswinkel χ des Strahlenkegels relativ groß ist ($\chi = 1^0\,52'$).[2] In Figur 86 ist eine experimentelle Anordnung dargestellt. Man bedeckt die eine Fläche der parallel zur kristallographischen Basis geschnittenen Aragonitplatte mit einem engen Diaphragma o und läßt ein Parallelstrahlbündel so einfallen. Bei geeigneter Drehung der Platte um eine zur Ebene der optischen Achsen senkrechte Achse zeichnet sich auf dem Schirme SS ein elliptischer Ring ab.[3]

1) Denn die Richtung der Strahlen im Außenraum hängt nur von der Lage der inneren Wellenebene ab, nicht von der Lage der inneren Strahlen. Auf das Brechungsgesetz wird im nächsten Paragraphen noch näher eingegangen.

2) Schwefel eignet sich noch besser, weil es den Öffnungswinkel $\chi = 7^0$ etwa besitzt. Nur macht die Bearbeitung mehr Schwierigkeiten. Die Verwendung einer Schwefelkugel zur Demonstration der konischen Refraktion hat A. Schrauf in Wied. Ann. 37, S. 127, 1889 beschrieben.

3) Bei Anwendung eines sehr feinen Strahlenbündels ist der helle Lichtring durch eine dunkle Kreislinie in einen inneren und äußeren hellen Ring getrennt. Die Erklärung dieser von Poggendorff (Pogg. Ann. **48**, S. 461, 1839) zuerst gemachten Beobachtung gab kürzlich W. Voigt (Physik. Ztschr. **6**, S. 673. 818, 1905. — Ann. d. Phys. **18**. S. 667, 1905) durch die Betrachtung, daß man ein wirklich streng paralleles einfallendes Strahlenbündel niemals herstellen kann, und daß die beiden hellen Lichtringe durch diejenigen Wellennormalen entstehen, welche im Kristall der optischen Achse sehr nahe benachbart sind, während die genau mit ihr zusammenfallenden Wellen-

An Stelle des Schirmes kann man auch zur subjektiven Beobachtung eine Lupe oder ein Mikroskop anwenden, welches auf o eingestellt wird.

Aus den Formeln (52) in Verbindung mit (47) und (48) leiten sich leicht die Formeln ab, welche die Richtung der Wellennormale in ihrer Abhängigkeit von der Richtung des Strahles darstellen. Es ergeben sich im allgemeinen zu jedem bestimmten $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ zwei bestimmte Systeme m, n, p. Nur wenn $\mathfrak{n} = o$ und $\mathfrak{B}^2 = b^2$ wird, d. h. wenn der Strahl in eine Strahlenachse fällt, wird n unbestimmt, wie man durch ein ganz analoges Verfahren, wie es vorhin angewendet wurde, ableitet. Die Strahlenfläche besitzt daher an den Austrittsstellen der Strahlenachsen nicht zwei bestimmte Tangentenebenen, sondern einen Tangentenebenenkegel. Die zugehörigen Wellenormalen liegen auf einem Kegel vom Öffnungswinkel ψ, wobei ist

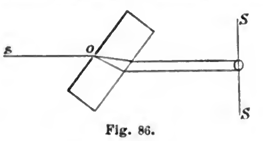


Fig. 86.

$$tg\,\psi = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{a^2 c^2}}. \tag{72}$$

Diese Formel ergibt sich aus (71) durch Ersetzung aller dort auftretenden Längen durch ihre reziproken Werte.

Diese Erscheinung wird äußere konische Refraktion genannt aus dem Grunde, weil ein Lichtstrahl, welcher im Innern eines Kristalls in die Richtung eines seiner Strahlenachsen fällt, beim Austritt aus demselben einen Kegel von äußeren Lichtstrahlen entstehen läßt. Denn bei verschiedenen Lagen von Wellenebenen im Innern eines Kristalls entstehen durch Brechung stets ver-

normalem beim Austritt aus dem Kristall in den Poggendorffschen dunkeln Ring fallen, der deshalb dunkel ist, weil nur unendlich wenig Energie den Wellennormalen von exakt vorgeschriebener Richtung zugehören kann. Die wahrgenommenen Lichtringe rühren somit eigentlich gar nicht von der konischen Refraktion her, da sie aus Wellennormalen hervorgehen, die nicht genau parallel der optischen Achse sind. — In einer anderen Arbeit (Ann. d. Phys. **19**, S. 14, 1906) betrachtet Voigt die Energieströmung bei der konischen Refraktion, um daraus (s. oben S. 258, § 10) die Strahlenrichtung zu bestimmen. Die unstetige Änderung der Strahlen, welche nach der rein geometrischen Betrachtung beim Hereinrücken der Wellennormale in die optische Achse eintritt, verschwindet bei dieser Betrachtung.

schieden gerichtete äußere Strahlen (vgl. Anmerkung auf voriger Seite).

Figur 87 stellt eine experimentelle Anordnung zum Nachweis der äußeren konischen Refraktion dar. Man konzentriert durch eine Linse L einen Strahlenkegel auf dem engen Diaphragma o einer Aragonitplatte. Auch auf der Hinterseite derselben liegt ein Diaphragma o'. Hat die Verbindungslinie oo' die Richtung einer Strahlenachse, so zeichnet sich auf einem Schirme SS ein Ring ab, der sich erweitert, wenn SS mehr entfernt wird. Von den einfallenden Lichtstrahlen kommen dabei nur diejenigen zur Wirkung, welche Strahlen der Richtung oo' hervorrufen. Die anderen werden durch das Diaphragma o' abgeblendet. Die wirksamen einfallenden Lichtstrahlen sind parallel dem austretenden Strahlenkegel.

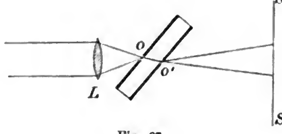


Fig. 87.

Die Erscheinung der konischen Refraktion wurde erst beobachtet, nachdem Hamilton dieselbe als theoretisch notwendig nachgewiesen hatte.

11. Durchgang des Lichtes durch Kristallplatten und Kristallprismen. Für die Brechung des Lichtes beim Übergang von Luft in einen Kristall gilt die gleiche analytische Bedingung, wie sie oben S. 267 für die Brechung des Lichtes durch einen isotropen Körper ausgesprochen wurde. Ist die einfallende Welle proportional zu

$$\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{mx+ny+pz}{V}\right),$$

dagegen die gebrochene Welle proportional zu

$$\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{m'x+n'y+p'z}{V'}\right),$$

und ist die Grenzfläche die Ebene $z=0$, so erfordert allein das Bestehen von Grenzbedingungen, unabhängig von der besonderen Form derselben, die Beziehung:

$$\frac{m}{V}=\frac{m'}{V'},\quad \frac{n}{V}=\frac{n'}{V'}.$$

Dies ist das Brechungsgesetz der gewöhnlichen Form, nämlich

die gebrochene Wellenormale bleibt in der Einfallsebene, ihr Brechungswinkel φ' steht mit dem Einfallswinkel φ in der Beziehung

$$\sin\varphi : \sin\varphi' = V : V', \tag{73}$$

wobei V, V' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Luft, bzw. im Kristall sind. Diese Beziehung liefert hier nur im allgemeinen noch keine direkte Konstruktion der gebrochenen Wellennormale, da V' im allgemeinen von der Richtung derselben abhängt.

Dagegen liefert die Anwendung des Huygensschen Prinzips nach denselben Grundsätzen, wie sie oben S. 115 für isotrope Körper ausgesprochen sind, direkt sowohl die Beziehung (73) als auch eine Konstruktion der gebrochenen Wellennormale und des gebrochenen Strahles. Wenn nämlich A_1B (vgl. Figur 88) der Schnitt einer einfallenden Wellenebene mit der Einfallsebene (Ebene der Zeichnung) ist und $\sphericalangle A_1BA_2 = \pi/2$, $BA_2 = V$ ist, so konstruiere man um A_1 die Strahlenfläche Σ des Kristalls, bis zu der sich eine von A_1 ausgehende Lichterregung nach Ablauf der Zeiteinheit im Kristall fortgepflanzt hat (Figur 88). Durch eine durch A_2 gehende Gerade, welche senkrecht zur Einfallsebene steht, lege man nun die beiden Tangentialebenen A_2T_1 und A_2T_2 an die zweischalige Strahlenfläche. Diese sind nach dem Huygensschen Prinzip die beiden gebrochenen Wellenebenen; die Richtungen von A_1 nach den beiden Berührungspunkten C_1, C_2 der Tangentialebenen mit der Strahlenfläche Σ sind die Richtungen der beiden gebrochenen Strahlen. Dieselben liegen im allgemeinen nicht in der Einfallsebene.

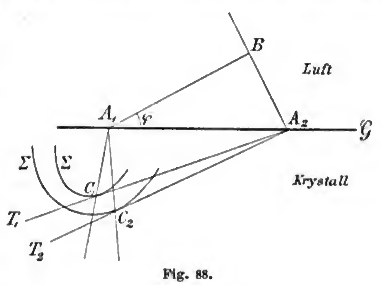


Fig. 88.

Für senkrechte Inzidenz ergibt sich daher überhaupt keine Doppelbrechung der Wellennormalen, aber wohl entstehen zwei verschiedene Strahlen, die erhalten werden durch Aussuchung der Berührungspunkte C_1, C_2 der beiden der Grenzfläche G parallelen Tangentialebenen, welche an eine um einen Punkt A der Grenze

konstruierte Strahlenfläche gelegt werden können. Die Strahlenrichtungen sind AC_1 und AC_2.

Beim Austritt des Lichtes aus dem Kristall in Luft treten analoge Verhältnisse ein. — Beim Durchgang des Lichtes durch eine planparallele Kristallplatte tritt daher niemals eine Doppelbrechung der Wellennormalen ein, sondern nur der Lichtstrahlen. Um die Wirkung der Doppelbrechung an einer Kristallplatte wahrzunehmen, muß man daher einen Punkt der vorderen Grenzfläche anvisieren. Derselbe erscheint doppelt, da der scheinbare Ort vom Strahlengange abhängt.[1] — Dagegen bewirkt die Einschaltung einer Kristallplatte zwischen Kollimator und Fernrohr keinerlei Bildverschiebung, da in diesem Falle nur die Wellennormalen maßgebend sind. Um bei dieser Beobachtungsweise, wie sie für die Spektraluntersuchungen üblich ist, die Wirkung der Doppelbrechung zu erkennen, bedarf es der Einschaltung eines Kristallprismas.

Mit Hilfe eines solchen kann man die Hauptbrechungsindizes finden, d. h. die Größen

$$n_1 = V:a, \quad n_2 = V:b, \quad n_3 = V:c. \tag{74}$$

Haben wir z. B. ein Prisma aus einem einachsigen Kristall ($a = b$), und liegt die Prismenkante parallel zur optischen Achse, so hat für Wellen, deren Normalen senkrecht zur Prismenkante liegen, die Lichtgeschwindigkeit V' die beiden konstanten Werte a und c. n_1 und n_3 können daher genau wie bei einem Prisma aus isotroper Substanz durch Minimalablenkung bequem gefunden werden. Die verschiedene Polarisationsrichtung beider austretenden Strahlen läßt sofort erkennen, welcher Brechungsindex dem n_1, welcher dem n_3 zugehört.

Ebenso findet man mit Hilfe eines Prismas eines zweiachsigen Kristalles, dessen Kante parallel zu einer optischen Symmetrieachse liegt, durch die Methode der Minimalablenkung sofort den einen Hauptbrechungsindex. Um noch die beiden anderen zu finden, bedarf es noch der Beobachtung der Ablenkung der parallel zur Prismenkante polarisierten Welle bei mindestens zwei verschiedenen Einfallswinkeln.

1) Der scheinbare Ort ist nicht nur seitlich, sondern auch in der Tiefe verschoben. Vgl. darüber Winkelmann, Hdb. d. Phys. Optik, 2. Aufl. S. 1199.

Nach der Bedeutung, welche die elektromagnetische Theorie den Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c gibt (vgl. Formel (15) auf S. 301), ergibt der Vergleich mit (74) die Beziehung:

$$\varepsilon_1 = n_1{}^2, \quad \varepsilon_2 = n_2{}^2, \quad \varepsilon_3 = n_3{}^2, \tag{75}$$

wenigstens wenn man C, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, mit V, der Lichtgeschwindigkeit in Luft, identifiziert. (Den hierdurch gemachten Fehler kann man vernachlässigen in Anbetracht der Ungenauigkeit, mit welcher die Dielektrizitätskonstanten bebestimmt werden.)

Die Beziehung (75) kann nun schon aus dem Grunde nicht streng erfüllt sein, weil der Brechungsexponent von der Farbe, d. h. der Schwingungszahl der elektrischen Kraft, abhängt (Dispersion), dagegen die Dielektrizitätskonstante in einem homogenen Isolator nicht. Es ist naheliegend, die Beziehung (75) für die Annahme zu prüfen, daß unter n^2 der auf unendlich lange Wellen extrapolierte Brechungsindex A der Cauchyschen Dispersionsformel

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \tag{76}$$

zu verstehen sei. Annähernd wird dann die Beziehung (75) bei rhombischem Schwefel bestätigt, für welchen die Dielektrizitätskonstanten von Boltzmann,[1]) die Brechungsindizes von Schrauf[2]) bestimmt worden sind. Es ergab sich [n^2 bedeutet den Brechungsindex für gelbes Licht, A die Konstante der Formel (76)]:

$$\begin{aligned} n_1{}^2 &= 3{,}80; & A_1{}^2 &= 3{,}59; & \varepsilon_1 &= 3{,}81 \\ n_2{}^2 &= 4{,}16; & A_2{}^2 &= 3{,}89; & \varepsilon_2 &= 3{,}97 \\ n_3{}^2 &= 5{,}02; & A_3{}^2 &= 4{,}60; & \varepsilon_3 &= 4{,}77\,. \end{aligned}$$

Die Dielektrizitätskonstanten stimmen also in ihrer Reihenfolge mit der der Hauptbrechungsindizes überein, aber sie sind größer als die Werte A^2. Diese Differenz ist bei anderen Kristallen zum Teil noch größer. Die Abweichung von den Forderungen der elektromagnetischen Theorie besteht in gleichem Sinne wie bei isotropen Körpern (vgl. oben S. 264). Ihre Erklärung soll erst bei der Behandlung der Dispersionserscheinungen gegeben werden.

1) L. Boltzmann, Wien. Ber. 70 (2), S. 342, 1874. — Pogg. Ann. 153, S. 531, 1874. —
2) A. Schrauf, Wien. Ber. 41, S. 805, 1860.

Es ergibt sich so das Resultat, daß die elektromagnetische Lichttheorie in der Hauptachse im Einklang mit den Erscheinungen steht, daß aber die exakten Werte der optischen Konstanten nicht aus elektrischen Messungen entnommen werden können. Diese Konstanten hängen in einer vorläufig nicht bestimmten Weise von der Schwingungsdauer, d. h. Farbe des Lichtes, ab, und zwar können nicht nur die Werte der Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c, sondern (bei monoklinen und triklinen Kristallen) auch die Lagen der optischen Symmetrieachsen mit der Farbe variieren.

12. Totalreflexion an Kristallplatten. Die auf S. 321 angegebene Konstruktion der gebrochenen Wellenebenen wird unmöglich, wenn die durch A_2 gehende Gerade $\mathfrak{G}$, welche senkrecht zur Einfallsebene steht, eine der beiden von der Strahlenfläche Σ mit der Grenzfläche G ausgeschnittenen Kurven oder beide schneidet. In solchen Fällen gibt es keine gebrochenen Wellenebenen, sondern es tritt Totalreflexion ein. Der Grenzfall, in welchem partielle Reflexion in Totalreflexion einer der beiden gebrochenen Wellen übergeht, tritt also ein, enn wjene Gerade $\mathfrak{G}$ die zu der betreffenden Welle gehörige Schale der Strahlenfläche Σ, d. h. den Ausschnitt der Strahlenfläche mit der Grenzebene G, berührt. In diesem Falle verläuft, da der Berührungspunkt T von $\mathfrak{G}$ mit Σ in der Grenzfläche G liegt, der gebrochene Strahl parallel zur Grenze (vgl. Fig. 89). Für diese Welle kann dann keine Energie in den Kristall übertreten, da der Lichtstrahl die Energiebahn bezeichnet (vgl. oben S. 299), und daher keine Energie übertritt durch eine dem Lichtstrahl parallele Ebene. So ergibt sich also auch aus dieser Überlegung, daß schon für diesen Grenzfall die reflektierte Welle die ganze Energie der einfallenden Welle enthalten muß, d. h. daß Totalreflexion eintritt.

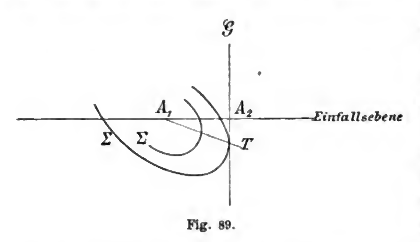


Fig. 89.

Beleuchtet man daher eine in ein stärker brechendes Medium eingetauchte Kristallplatte mit diffusem homogenen Lichte, so erscheinen im Felde des reflektierten Lichtes zwei Kurven, welche die Gebiete geringerer Lichtintensität von denen größerer trennen.

Läßt man das Licht streifend in die Kristallplatte eintreten, so werden diese Kurven noch schärfer, da sie Helligkeit und völlige Dunkelheit abgrenzen, weil das in der Kristallplatte befindliche Licht nur nach der einen Seite der Kurven, welche kleineren Einfallswinkeln entspricht, austreten kann. Diese Kurven ergeben also die Grenzwinkel φ_1, φ_2 der Totalreflexion. Sie stehen im allgemeinen nichtsenkrecht zur Reflexionsebene. Zur ihrer Beobachtung sind besondere Instrumente konstruiertworden. Fig. 90 stellt das von Abbe konstruierte Kristallrefraktometer dar, bei welchem die zu untersuchende Kristallplatte auf die Flintglashalbkugel K vom Brechungsindex 1,89 aufgelegt wird, nur durch einen Tropfen einer stärker brechenden Flüssigkeit verbunden. K ist mit dem Azimuthalkreis H um eine Vertikale drehbar, der drehbare Spiegel S erlaubt, die Kristallplatte entweder von unten, durch K hindurch, oder streifend zu beleuchten. Die Grenzkurven der Totalreflexion werden in dem, um den Vertikalkreis V vermittelst der Randhabe R drehbaren Fernrohr $OGGO$ beobachtet. Dasselbe ist dreimal gebrochen, die Strahlen in demselben werden durch dreimalige Totalreflexion in konstante horizontale Richtung abgelenkt, was sehr zur Bequemlichkeit der Beobachtung dient. Das Objektiv des Fernrohrs ist so eingerichtet, daß es die an der



Fig. 90.

Kugelfläche K erfolgende Brechung der an der Kristallplatte reflektierten Strahlen kompensiert, es bildet daher die Grenzkurven vollkommen scharf ab.

Die Methode der Totalreflexion ist die einfachste zur Bestimmung der Hauptbrechungsindizes einer Kristallplatte. Dieselben ergeben sich einfach aus den Maximal- bezw. Minimalwerten der Einfallswinkel der beiden Grenzkurven.

Nach den Figuren 88 und 89 ist nämlich, falls φ den Einfallswinkel für eine Grenzkurve bei einem beliebigen Azimuth ϑ der Einfallsebene bezeichnet, die Strecke $A_1 A_2 = V : \sin\varphi$, da $BA_2 = V$ (Lichtgeschwindigkeit im umgebenden Medium) sein soll, ferner ist $A_1 A_2$ gleich dem Abstand des Punktes A_1 von einer Tangente, welche an den Durchschnitt der um A_1 konstruierten Strahlenfläche mit der Grenzfläche G gelegt wird. Maximal- und Minimalwerte des Grenzwinkels φ, d. h. der Strecke $A_1 A_2$, fallen nun notwendig zusammen mit Maximal- bezw. Minimalwerten der Strahllänge $A_1 T$ (vgl. Figur 89), wie man durch Konstruktion leicht beweisen kann, und zwar fällt dann $A_1 A_2$ mit dem Strahl $A_1 T$ zusammen, da die Tangente senkrecht auf dem Radiusvektor $A_1 T$ stehen muß, falls derselbe ein Maximum oder Minimum besitzt. Die Strahllänge $A_1 T$ hat nun in jedem beliebigen, ebenen Schnitt der Strahlenfläche das absolute Maximum a, das absolute Minimum c. Es ergibt sich nämlich aus der Gleichung der Strahlenfläche (vgl. oben S. 312) ohne weiteres, daß $\mathfrak{B}$ beständig zwischen a und c liegen muß, da sonst die drei Glieder der Gleichung (53) einerlei Vorzeichen hätten, d. h. nicht die Summe Null ergeben könnten. Andrerseits ergibt sich aber auch, daß in jedem ebenen Schnitt G der Strahlenfläche die extremen Werte $\mathfrak{B} = a$, $\mathfrak{B} = c$ erreicht werden, denn nach Figur 85 wird in der Durchschnittslinie von G mit der yz-Ebene jedenfalls ein Wert $\mathfrak{B} = a$ erreicht, da in der yz-Ebene die eine Strahlgeschwindigkeit den konstanten Wert $\mathfrak{B} = a$ besitzt, während in der Durchschnittslinie von G mit der xy-Ebene der Wert $\mathfrak{B} = c$ erreicht werden muß. Im Durchschnitt von G mit der xz-Ebene muß der Wert $\mathfrak{B} = b$ erreicht werden, es ist aber, wie man sich aus der letzten der Figuren 85 anschaulich machen kann, zweifelhaft, ob b zu dem Minimum der äußeren Grenzkurve, oder zu dem Maximum der inneren Grenzkurve gehört. Man kann dies entscheiden, falls man an zwei verschiedenen, aber sonst beliebig orientierten Platten die Maxima bezw. Minima der Einfallswinkel der Grenzkurven auf-

sucht.[1]) Jede Platte ergibt vier solcher Werte, drei davon müssen beiden Platten gemeinsam sein; diese entsprechen den Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c. Dieselben bestimmen sich also nach dem Schema:

$$A_1 A_2 = V : \sin \varphi = a, b, c, \tag{77}$$

falls φ ein Maximal- bezw. Minimalwert des Einfallswinkels der Grenzkurve (die bestimmten Azimuthen ϑ der Einfallsebene zugehören) bedeutet. Bezeichnet man den Brechungsindex des Mediums (V) gegen Luft (V_0) mit n, d. h. setzt $V_0 : V = n$, so werden nach (77) die Hauptbrechungsindizes des Kristalls gegen Luft erhalten durch die Formel (da $V : a = n_1$ u. s. w. ist):

$$n_1, n_2, n_3 = n \sin \varphi . \tag{78}$$

Bei einachsigen Kristallen ($a = b$) ist für eine Grenzkurve $\varphi =$ konst. Dieser Winkel ergibt die Hauptlichtgeschwindigkeit a. Für die andere Grenzkurve variiert der Einfallswinkel. Es ist, falls γ den Winkel der optischen Achse gegen die Grenzfläche G des Kristalls bedeutet, die Strahlgeschwindigkeit, falls die Einfallsebene durch die optische Achse geht:

$$\mathfrak{V}^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2 \sin^2 \gamma + c^2 \cos^2 \gamma} . \tag{79}$$

Wenn die Einfallsebene senkrecht zur optischen Achse steht, so ist $\mathfrak{V}^2 = c^2$. Für positiv einachsige Kristalle ($a > c$) ist (79) der Maximalwert des $\mathfrak{V}$, d. h. (79) ergibt den Minimalwert des φ der Grenzkurve, welche von der Totalreflexion der außerordentlichen Welle herrührt. Der Maximalwert des φ in dieser Grenzkurve ergibt daher c, der Minimalwert des φ erlaubt γ zu berechnen, d. h. die Neigung der Kristallgrenze gegen die optische Achse. — Bei negativ einachsigen Kristallen ($a < c$) ergibt der Minimalwert des φ die Hauptlichtgeschwindigkeit c.

Ebenfalls kann man bei zweiachsigen Kristallen die Orientierung der Grenzfläche gegen die optischen Symmetrieachsen aus

1) Unter Berücksichtigung der Polarisationsverhältnisse genügt schon ein Kristallschnitt, vgl. dazu die Originalarbeiten von C. Viola, Rendic. R. Acc. dei Lincei (5) 8, 1. Sem., S. 276, 1899. (Referiert in Wied. Beibl. **23**, S. 641, 1899.) — Ztschr. f. Krist. **31**, S. 40; **32**, S. 113, 1899; **36**, S. 245, 1902. — Bull. soc. min. **25**, S. 88, 147, 1902. — A. Cornu, Bull. soc. min. **25**, S. 88, 1902; sowie die Zusammenfassung bei F. Pockels, Lehrb. d. Krist. Optik, S. 133.

Beobachtung der Grenzkurven der Totalreflexion finden, indes verbindet man hiermit zur Erreichung größerer Genauigkeit zweckmäßig noch andere Methoden, z. B. die unten besprochenen Interferenzerscheinungen im konvergent einfallenden, polarisierten Lichte.

Zu besonderen Erscheinungen in den Grenzkurven der Totalreflexion gibt die konische Refraktion Anlaß. Diese Erscheinungen können beobachtet werden, falls die Grenzfläche G die Ebene der optischen Achsen ist. Das Nähere hierüber vgl. bei W. Kohlrausch, Wied. Ann. 6, S. 86, 1879. Liebisch, physik. Krist., S. 423—425, Mascart, Traité d'Optique, T. 2, p. 102, 1891. Pockels, Lehrb. d. Krist. Optik. S. 121.

13. Partielle Reflexion an einer Kristallplatte. Um die Amplitudenänderungen zu berechnen, welche bei der partiellen Reflexion an Kristallplatten eintreten, bedarf es nur der Durchführung der Hauptgleichungen (6'), (7) auf S. 297 und der dort genannten Grenzbedingungen.

Da die Rechnungen aber kompliziert sind (vgl. die Ausführung z. B. in Winkelmanns Hdb. Optik, 2. Aufl., S. 1239, F. Pockels, Lehrb. d. Krist. Optik, S. 174 u. ff. I. Teil, 7. Kapitel), so soll nur das eine Resultat hier genannt werden, daß es bei der Reflexion an einer bestimmten Kristallplatte einen Polarisationswinkel gibt, d. h. einen Einfallswinkel, unter dem einfallendes natürliches Licht nach der Reflexion linear polarisiert ist. Die Polarisationsebene fällt aber im allgemeinen nicht mit der Einfallsebene zusammen (im Gegensatz zum Verhalten isotroper Spiegel).

14. Interferenzerscheinungen von Kristallplatten im senkrecht einfallenden, polarisierten Lichte. Es soll linear polarisiertes, einfarbiges Licht senkrecht auf eine Kristallplatte fallen, und dann eine zweite polarisierende Vorrichtung durchsetzen; dieser Fall wird z. B. realisiert, wenn man die Kristallplatte auf das Tischchen des S. 233 beschriebenen Nörrenbergschen Polarisationsapparates legt. Den oberen Spiegel des Apparates ersetzt man zweckmäßig durch ein Nicolsches Prisma. Dieses wird der Analysator genannt, die Schwingungsebene der elektrischen Kraft in demselben sei A (vgl. Figur 91). Die Schwingungsebene

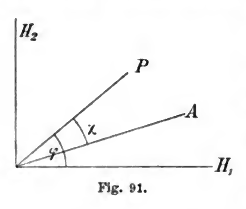


Fig. 91.

des Polarisators, welcher das zunächst benutzte natürliche Licht zu polarisiertem macht, sei P. Das einfallende polarisierte Licht, dessen Amplitude E sei, wird nun beim Eintritt in eine doppelbrechende Kristallplatte in zwei Wellen der Amplitude $E \cos \varphi$, $E \sin \varphi$ zerlegt, falls φ der Winkel ist, welchen P mit den Schwingungsrichtungen H_1 und H_2 der beiden im Kristall fortgepflanzten Wellen W_1 und W_2 bildet. (Es ist dabei abgesehen von der durch Reflexion bewirkten Schwächung der Amplitude. Diese ist aber sehr annähernd für beide Wellen dieselbe.) Diese beiden Wellen werden nach dem Austritt aus dem Kristall auf die gemeinsame Polarisationsebene A zurückgeführt, besitzen daher nach dem Durchtritt durch den Analysator die Amplituden $E \cos \varphi \cos (\varphi - \chi)$, $E \sin \varphi \sin (\varphi - \chi)$. Beide Wellen W_1 und W_2 haben nun eine Phasendifferenz δ durch das Durchlaufen der Kristallplatte erlitten, und zwar ist

$$\delta = d \frac{2\pi}{T} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) = 2\pi \frac{d}{\lambda} \left(\frac{V}{V_1} - \frac{V}{V_2} \right), \tag{80}$$

falls d die Dicke der Kristallplatte bedeutet, V_1, V_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beider Wellen im Kristall, V die Lichtgeschwindigkeit in Luft, λ die Wellenlänge des benutzten Lichtes in Luft. Nach S. 128 ist daher die aus dem Analysator austretende Lichtintensität

$$J = E^2 \left\{ \cos^2 \varphi \cos^2 (\varphi - \chi) + \sin^2 \varphi \sin^2 (\varphi - \chi) \right.$$
$$\left. + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin (\varphi - \chi) \cos (\varphi - \chi) \cos \delta \right\}.$$

Ersetzt man hierin $\cos \delta$ durch $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \delta$, so wird:

$$J = E^2 \left\{ \cos^2 \chi - \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \chi) \sin^2 \frac{1}{2} \delta \right\}. \tag{81}$$

Das erste Glied $E^2 \cos^2 \chi$ gibt den Wert der Lichtintensität an, wie sie ohne Einschaltung der Kristallplatte aus dem Analysator austreten würde. Diese Intensität J_0 soll die ursprüngliche genannt werden. Es ist also

$$J_0 = E^2 \cos^2 \chi. \tag{82}$$

Wir wollen zwei Fälle genauer betrachten:

1) Parallele Nicols, $\chi = 0$. Dann ist

$$J_{|} = J_0 \left(1 - \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{1}{2} \delta \right). \tag{83}$$

Bei Drehung der Kristallplatte wird in 4 Lagen, bei $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$, $\varphi = 3\pi/2$ die ursprüngliche Lichtintensität erreicht, d. h. allemal dann, wenn eine der Schwingungsebenen im Kristall mit denen des Nicols zusammenfällt. In den Zwischenlagen ($\varphi = \pi/4$ u. s. w.) ist

$$J = J_0 \left(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta\right) = J_0 \cos^2 \tfrac{1}{2}\delta, \tag{84}$$

d. h. es kann bei geeigneten Werten δ, d. h. Dicken der Kristallplatte, völlige Dunkelheit eintreten.

2) Gekreuzte Nicols, $\chi = \pi/2$. Es ist $J_0 = 0$, und

$$J_\times = E^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta. \tag{85}$$

Die Platte erscheint also für jede Dicke dunkel, falls die Schwingungsebenen des Kristalls mit denen der Nicols zusammenfallen, sonst nur dann dunkel, falls $\delta = 2h\pi$ ist. In den Zwischenlagen $\varphi = \pi/4$ usw. ist

$$J_\times = E^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta. \tag{86}$$

Man kann daher, falls nicht zufällig $\delta = 2h\pi$ ist, durch Drehung der Kristallplatte die Polarisations- (oder Schwingungs-) Richtungen im Kristall finden als sogenannte Auslöschungsrichtungen.

Eine keilförmige Kristallplatte muß daher zwischen gekreuzten Nicols, falls man sie nicht gerade in die Auslöschungslage bringt, von schwarzen, der Keilkante parallelen Streifen durchzogen sein, welche an denjenigen Stellen liegen, deren Dicke d der Beziehung $\delta = \pm 2h\pi$ entspricht. Im einfallenden weißen Lichte müssen die Streifen farbig erscheinen, da δ mit der Farbe variiert.

Auch eine planparallele Platte muß, zwischen zwei Nicols gebracht, im allgemeinen stets farbig erscheinen, wenn weißes Licht einfällt. Im allgemeinen ist nun nicht nur die Amplitude E und die Phasendifferenz δ, sondern auch der Winkel φ, d. h. die Lage der Schwingungsebenen, von der Farbe (λ) abhängig. Letztere Abhängigkeit können wir aber meist vernachlässigen wegen des geringen Betrages der Dispersion der optischen Achsen. Zwischen gekreuzten Nicols ist also für $\varphi = \pi/4$ nach (86) bei weißem Licht:

$$J_\times = \Sigma E^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta,$$

wobei die Σ über die den einzelnen Farben entsprechenden Werte zu erstrecken ist. Es bedeutet also:

$$\Sigma E^2 = \text{weißes Licht}. \tag{87}$$

Nach (80) hängt nun δ wesentlich durch den Nenner λ von der Farbe ab. Setzen wir, was annähernd meist gestattet ist, $\frac{V}{V_1} - \frac{V}{V_2}$ als unabhängig von der Farbe voraus, so wird also

$$J_{\times} = \Sigma E^2 \sin^2 \pi \frac{d'}{\lambda}, \tag{87'}$$

wobei

$$d' = d\left(\frac{V}{V_1} - \frac{V}{V_2}\right)$$

von λ nahezu unabhängig ist. Bei Vergleich der Formel (87') mit der früheren Formel (78) auf S. 292 erkennt man, daß die Kristallplatte annähernd die (Newtonsche) Interferenzfarbe bei der Reflexion an einer dünnen Luftplatte der Dicke $d'/_2$ zeigt. Die Farben weichen aber merklich von den Newtonschen Interferenzfarben dünner Blättchen ab, sobald die Dispersion im Kristall für beide Wellen stark verschieden ist. Denn dann ist d' nicht mehr von λ unabhängig. Dies ist z. B. beim unterschwefelsauren Strontian, Apophyllit (von den Faröer-Inseln), Brucit, Vesuvian der Fall.

Zwischen parallelen Nicols hat die Kristallplatte stets die komplementäre Farbe zu der Farbe, welche sie bei gleichem φ zwischen gekreuzten Nicols zeigt. Denn nach (83) und (85) ergibt die Summe der Lichtintensitäten in beiden Fällen beständig ΣE^2, was nach (87) weißem Licht entspricht.

In den Newtonschen Interferenzfarben treten bei gewissen Werten δ sogenannte empfindliche Farben auf, welche stark variieren, falls δ nur wenig schwankt. Eine solche empfindliche Farbe ist z. B. ein Violett erster Ordnung, welches eintritt, falls δ für Licht mittlerer Wellenlänge etwa den Wert π besitzt. Die Farbe schlägt für eine geringe Vergrößerung von δ in blau, für eine geringe Verminderung in rot um. Man kann nun eine Kristallplatte $\mathfrak{P}$, welche diese empfindliche Farbe zeigt, z. B. eine parallel zur Achse geschnittene Quarzplatte von geeigneter Dicke, dazu benutzen, um Spuren schwacher Doppelbrechung in einer Platte $\mathfrak{P}'$ zu erkennen, da durch die letztere sofort die Farbe von $\mathfrak{P}$ verändert wird, falls man $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, aufeinander gelegt, zwischen gekreuzten Nicols betrachtet. Noch empfindlicher wird die Vorrichtung, wenn man die Platte $\mathfrak{P}$ in der Richtung der Halbierungslinie ihrer Schwingungsebenen zerschneidet und dann die beiden Hälften in ihrer Schnittlinie wieder vereinigt, nachdem man zuvor

eine derselben um die Normale der Schnittfläche um 180° umgeklappt hat. Eine geringe Doppelbrechung in der Platte 𝔓′ bewirkt dann eine Farbenänderung der beiden Hälften von 𝔓 im entgegengesetzten Sinne. Diese Vorrichtung wird nach ihrem Erfinder die Bravaissche Doppelplatte genannt. Man kann mit ihrer Hilfe leicht z. B. nachweisen, daß der Druck der Finger genügt, um in einem Glaswürfel Doppelbrechung zu erzeugen. — Auch die Auslöschungsrichtungen in 𝔓′ kann man mit Hilfe einer aufgelegten Bravaisschen Doppelplatte 𝔓 scharf bestimmen.

Die Anwendung der kristalloptischen Eigenschaften zur Konstruktion des Babinetschen oder Sénarmontschen Kompensators ist schon oben S. 243 besprochen worden.

15. Interferenzerscheinungen von Kristallplatten in konvergent einfallendem, polarisiertem Lichte. Betrachten wir zunächst den Fall, daß polarisiertes Licht unter dem Einfallswinkel i die Kristallplatte durchsetze. Die Brechungswinkel seien r_1 und r_2 (vgl. Figur 92). Die Phasendifferenz δ zwischen beiden im Kristall fortgepflanzten Wellen ergibt aus der Figur zu

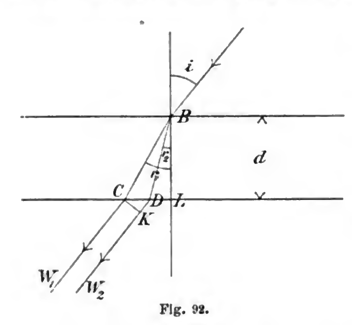


Fig. 92.

$$\delta = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{BD}{V_2} + \frac{DK}{V} - \frac{BC}{V_1}\right),$$

wobei DK die Projektion von CD auf die Fortpflanzungsrichtung der Welle W_2 sein soll. Nun ist $BD = d/\cos r_2$, $BC = d/\cos r_1$, $DK = CD \sin i = (BC \sin r_1 - BD \sin r_2) \sin i$, daher

$$\delta = \frac{2\pi}{T} d \left\{\left(\frac{\sin i \sin r_1}{V} - \frac{1}{V_1}\right)\frac{1}{\cos r_1} - \left(\frac{\sin i \sin r_2}{V} - \frac{1}{V_2}\right)\frac{1}{\cos r_2}\right\}.$$

Da nun nach dem Brechungsgesetz ist

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin r_1}{V_1} = \frac{\sin r_2}{V_2},$$

so wird

$$\delta = \frac{2\pi}{T} d \left\{\frac{\cos r_2}{V_2} - \frac{\cos r_1}{V_1}\right\}. \tag{88}$$

Führt man nun die Winkel g_1 und g_2 ein, welche die Wellennormale im Kristall mit den optischen Achsen desselben bildet, so kann man nach den Gleichungen (29) auf S. 306 V_1 und V_2 rational durch a^2+c^2 und a^2-c^2 ausdrücken. Beschränkt man sich auf erste Ordnung in a^2-c^2, was bei der Kleinheit der Doppelbrechung bei den in der Natur vorkommenden Mineralien stets zulässig ist, so wird

$$\delta = \frac{\pi}{T} \cdot \frac{d}{\cos r} \frac{a^2-c^2}{\left(\frac{a^2+c^2}{2}\right)^{3/2}} \sin g_1 \sin g_2 . \tag{89}$$

Hierin bezeichnen g_1 und g_2 die Winkel, welchen eine, gleichgültig welche, der beiden gebrochenen Wellennormalen mit den optischen Achsen einschließt; r bedeutet den Brechungswinkel für eine der gebrochenen Wellennormalen, es ist also $d:\cos r$ der im Kristall zurückgelegte Weg. (Wegen der Beschränkung auf erste Ordnung in a^2-c^2 kann man $BD=BC$ setzen.)

Führt man die Hauptbrechungsindizes n_1 und n_3 des Kristalls ein, und nennt n den Mittelwert derselben, so ist

$$a^2 = V^2 : n_1{}^2, \quad c^2 = V^2 : n_3{}^2,$$

$$\delta = \frac{\pi d}{\lambda \cos r} \frac{n_3{}^2 - n_1{}^2}{n} \sin g_1 \sin g_2 = \frac{2\pi d}{\lambda \cos r} (n_3 - n_1) \sin g_1 \sin g_2 . \tag{90}$$

Zwischen Polarisator und Analysator zeigt die Kristallplatte annähernd die durch (81) ausgedrückte Lichtintensität, wenn man wenigstens absieht von den an den Grenzflächen des Kristalls durch die Brechung herbeigeführten Amplitudenänderungen.

Von besonderem Interesse ist nun der Fall, wenn man im Gesichtsfelde gleichzeitig die Wirkung vergleichen kann, welche verschiedene Einfallswinkel i auf die Lichtintensität J hervorbringen. Man kann dies in dem in den Figg. 93 und 94 dargestellten Polarisationsapparate erreichen. Der Spiegel A reflektiert das Tageslicht in den Apparat; es wird durch die beiden Linsen B und D auf die Öffnung eines Diaphragmas E konzentriert und beim Passieren des Nicols C polarisiert. E liegt in der Brennweite einer (oder mehrerer) Sammellinse F, welche jeden von E ausgehenden Strahlenkegel in ein Bündel paralleler Strahlen verwandelt, die nun die Kristallplatte G in allen möglichen Richtungen durchdringen; in der Figur sind drei solcher Bündel gezeichnet. Die Strahlen fallen auf eine Sammellinse H, die in ihrer Brennweite, im Diaphragma J, jedes parallele Bündel in einem Punkte M vereinigt. Durch die

Lupe K wird das in M entstehende Bild vergrößert; die Strahlen müssen aber noch den Analysator L passieren. Wie aus der Figur ersichtlich ist, wird die Mitte des Bildes in J gebildet durch Strahlen, welche senkrecht in die Kristallplatte eingetreten sind, die seitlichen Teile durch Strahlen, welche die Kristallplatte in immer

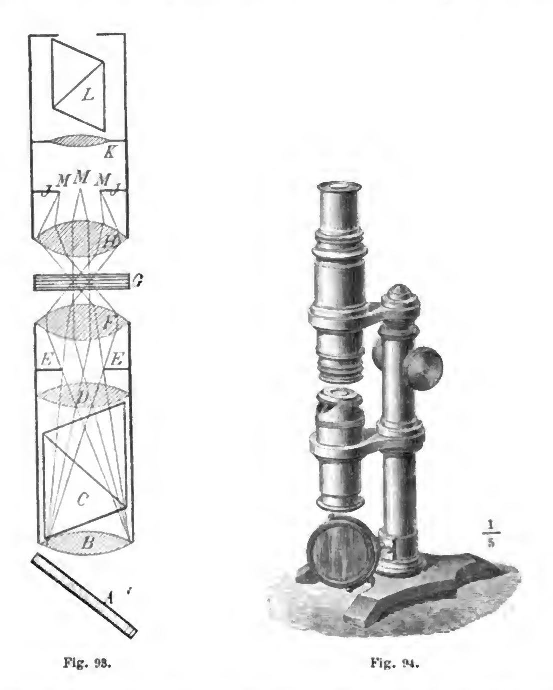


Fig. 93. Fig. 94.

schrägerer Richtung passiert haben, je mehr der betrachtete Punkt M am Rande von J liegt. Wir übersehen so mit einem Blick die Interferenzen von Strahlen, die in verschiedenen Richtungen die Kristallplatte durchlaufen haben.

An den verschiedenen Punkten M des Gesichtsfeldes variiert die Phasendifferenz δ und der Winkel φ, welchen die Schwingungs-

ebene des Polarisators mit einer Schwingungsrichtung der einen Welle im Kristall bildet. Die Punkte des Gesichtsfeldes, für welche δ konstant ist, bilden eine gewisse Kurvenschar, die Kurven gleichen Gangunterschiedes (Isochromaten); die Punkte des Gesichtsfeldes, für welche φ konstant ist, bilden die Kurven gleicher Polarisationsrichtung (Isogyren). Mit Hilfe dieser beiden Kurvenscharen läßt sich die im Gesichtsfelde wahrgenommene Lichtstärke am einfachsten beschreiben.

Denkt man sich sämtliche, die Kristallplatte durchsetzende Lichtstrahlen durch einen einzigen Punkt 0 der ersten Begrenzungsfläche der Platte hindurchgehend, so gelangt nur ein Lichtstrahl zum Punkte M des Gesichtsfeldes. Derselbe schneidet die zweite Begrenzungsfläche der Platte in dem Punkte M' (Spur des Punktes M). Wenn wir auf diese Weise jedem Punkte M der Brennebene einen Punkt M' der Plattengrenze zuordnen, so sind Figuren, deren Punkte zugeordnete sind, einander ähnlich. Wir werden daher uns jetzt immer auf die Punkte M' der zweiten Kristallgrenze beziehen. Die Kurven gleichen Gangunterschiedes werden nun offenbar nach Formel (89), in der $d:\cos r$ den in der Kristallplatte zurückgelegten Weg des Lichtstrahls bezeichnet, erhalten durch den Schnitt der zweiten Grenzfläche des Kristalls mit der um den Punkt 0 konstruierten Flächenschar:

$$\varrho \sin g_1 \sin g_2 = Const., \tag{91}$$

wobei ϱ den Radiusvektor eines Punktes P einer Fläche vom Punkte 0 aus bezeichnet, während g_1 und g_2 die Winkel sind, welche der Radiusvektor ϱ mit den optischen Achsen einschließt. Eine solche Fläche hat etwa die in Figur 95 gezeichnete Gestalt, sie muß in der Richtung der optischen Achsen asymptotisch ins Unendliche verlaufen, da für $g_1 = 0$ oder $g_2 = 0$ nach (91) $\varrho = \infty$ wird.

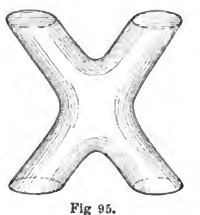


Fig 95.

Ist nun z. B. die Kristallplatte senkrecht zu einer optischen Mittellinie geschnitten, d. h. zu einer in der Ebene der optischen Achsen liegenden optischen Symmetrieachse, so sind die Kurven gleichen Gangunterschiedes lemniskatenartige Kurven, deren Pole A_1, A_2 die optischen Achsen sind. Betrachten

wir die Platte zwischen gekreuzten Nicols, so gilt die Formel (85). Bei Beleuchtung mit homogenem Licht zeichnen sich die Kurven gleichen Gangunterschiedes, für welche $\delta = 2h\pi$ ist, als schwarze lemniskatenartige Kurven ab. Bei einfallendem weißen Lichte erscheinen diese Kurven als solche gleicher Farbe (daher Isochromaten genannt), und zwar treten annähernd die Newtonschen Interferenzfarben auf. Doch entstehen aus dem oben S. 331 genannten Grunde Abweichungen davon bei einigen Kristallen,[1]) auch kompliziert sich hier die ganze Erscheinung durch die Dispersion der optischen Achsen, d. h. durch die Erscheinung, daß die Spur der optischen Achsen im Interferenzbilde mit der Farbe variiert.[2])

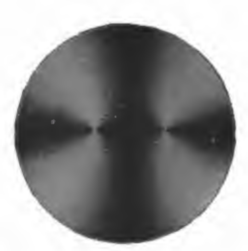


Fig. 96a.



Fig. 96b.

Bei einigen Kristallen (Brookit) kommt es sogar vor, daß die Ebene der optischen Achsen bei Veränderung der Farbe in eine senkrechte Lage umschlägt. Durch die Dispersion der optischen Achsen kann die Form der Isochromaten bei einfallendem weißen Licht bedeutend verändert werden. Das ganze Gesichtsfeld wird nun noch gemäß (85) von einer schwarzen Kurve durchzogen, nämlich der sogenannten Hauptisogyre, für welche $\sin 2\varphi = 0$ ist. Wenn die Ebene der optischen Achsen mit der Polarisations-

1) Besonders auffallend sind die Ringe in Apophyllit von den Faröer-Inseln und aus Peonah in Ostindien. Die Ringe sind alle gleich gefärbt und zwar abwechselnd dunkel violett und schmutzig gelb. Diese Apophyllite sind positiv doppelbrechend für rotes Licht, negativ für blaues Licht, für gelb haben sie keine Doppelbrechung.

2) Vgl. hierüber das Nähere bei Mascart, Traité d'Optique, T. 2, p. 173—190. Paris 1891. — Im Seignettesalz beträgt der Winkel der optischen Achsen für Rot 76°, für Violett aber 56°.

ebene des Analysators (oder Polarisators) zusammenfällt (sogenannte erste Hauptlage), ist diese Hauptisogyre ein schwarzes Kreuz, dessen einer Balken durch die optischen Achsen geht, während der andere, dazu senkrechte, durch die Mitte des Gesichtsfeldes geht. Denn für alle Punkte P dieses Kreuzes liegen nach der auf S. 307 angegebenen Konstruktion die Polarisationsrichtungen H_1 und H_2 parallel und senkrecht zur Verbindungslinie $A_1 A_2$ der optischen Achsen. Man erhält daher das in Figur 96 dargestellte Interferenzbild.

In der sogenannten zweiten Hauptlage der Kristallplatte, wenn nämlich die Ebene der optischen Achsen A_1, A_2 den Winkel 45^0 mit der Polarisationsebene des Analysators bildet, sind die Hauptisogyren hyperbelartige Büschel, welche durch die optischen Achsen gehen. Man erhält daher das in Figur 97 dargestellte Bild. Annähernd kann man die Gleichung der Hauptisogyre ableiten, wenn man bei beliebiger Lage des Punktes P auf der Kristallplatte die den Winkel A_1PA_2 halbierende Linie PB als die eine Polarisationsrichtung H im Kristall auffaßt[1]) (vgl. Figur 98). Die Koordinatenrichtungen x, y mögen in die Polarisationsebenen des Analysators und Polarisators gelegt sein. Bezeichnet man die Strecken $PA_1 = l_1$, $PA_2 = l_2$, $A_1 A_2 = l$, so ist

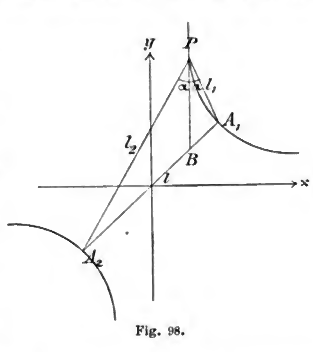


Fig. 98.

$$BA_1 : BA_2 = l_1 : l_2, \quad BA_1 + BA_2 = l,$$

d. h.

$$BA_1 = \frac{l_1}{l_1 + l_2}\, l. \tag{92}$$

Ferner folgt aus Dreieck A_1BP:

$$\sin\alpha : \sin \sphericalangle A_1BP = BA_1 : l_1\,. \tag{93}$$

1) Nach der oben S. 307 gegebenen Regel ist dies nur annähernd richtig. Die Aufgabe ist strenger durchgeführt in Winkelmanns Hdb. d. Phys. Optik, 2. Aufl., S. 1220 u. ff.

Nun ist aber für die Hauptisogyre $\sphericalangle A_1BP = 45^0$, da die Verbindungslinie A_1A_2 der optischen Achsen den Winkel 45^0 mit den Koordinatenrichtungen bilden sollen und für die Hauptisogyre die Linie PB mit der y-Achse parallel laufen soll. Es ist also nach (92) und (93)

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{l}{l_1 + l_2}. \tag{94}$$

Ferner folgt aus Dreieck A_1PA_2:

$$l^2 = l_1^{\,2} + l_2^{\,2} - 2l_1l_2\cos\varphi = (l_1 - l_2)^2 + 4l_1l_2\sin^2\alpha,$$

d. h. nach (94):

$$l^2 = (l_1 - l_2)^2 + 2l^2\frac{l_1l_2}{(l_1 + l_2)^2},$$

oder

$$l^2(l_1^{\,2} + l_2^{\,2}) = (l_1^{\,2} - l_2^{\,2})^2. \tag{95}$$

Nennt man nun die Koordinaten der optischen Achsenpunkte A_1 und $A_2: \pm p$, so ist

$$l_1^{\,2} = (x - p)^2 + (y - p)^2, \quad l_2^{\,2} = (x + p)^2 + (y + p)^2, \quad l^2 = 8p^2$$

und (95) wird

$$xy = p^2. \tag{96}$$

Dies stellt aber eine gleichseitige Hyperbel dar, welche durch die beiden optischen Achsen A_1 und A_2 geht und welche die Koordinatenrichtungen zu Asymptoten hat.

Diese die Interferenzfigur durchziehenden schwarzen Hauptisogyren sind sehr geeignet, den scheinbaren Winkel der optischen Achsen zu messen, d. h. denjenigen Winkel, welchen zwei aus der Platte austretende Wellennormalen miteinander bilden, welche im Innern derselben in den Richtungen der optischen Achsen verlaufen sind. Aus dem Brechungsgesetz findet man dadurch den Winkel der optischen Achsen selbst, wenn man die mittlere Hauptlichtgeschwindigkeit b im Kristall kennt. Man ermittelt den scheinbaren Winkel der optischen Achsen, indem man die Kristallplatte um eine zur Ebene der optischen Achsen senkrechte Achse dreht und dadurch die Spuren der optischen Achsen nacheinander in die (durch ein Fadenkreuz markierte) Mitte des Gesichtsfeldes bringt. Der Drehungswinkel wird an einem Teilkreise abgelesen. Die zu diesem Zweck konstruierten Polarisationsapparate heißen Achsenwinkelapparate oder Stauroskope.

Bei einachsigen Kristallen hat eine Fläche gleichen Gangunterunterschiedes ($\delta = const.$) die in Figur 99 gezeichnete Gestalt. Bei einer senkrecht zur optischen Achse geschnittenen Platte sind die Isochromaten konzentrische Kreise um die optische Achse, die Hauptisogyre bildet bei gekreuzten Nicols ein schwarzes, rechtwinkliges Kreuz. Man erhält daher das in Figur 100 dargestellte Interferenz-

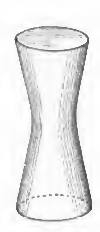


Fig. 99.

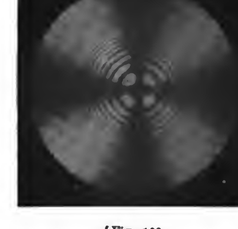


Fig. 100.

bild. Aus der Messung der Ringdurchmesser kann man die Differenz der beiden Hauptbrechungsindizes des Kristalls erhalten.

Betreffs der Unterscheidung des Charakters der Doppelbrechung vermöge eines aufgelegten Gipsblättchens, dessen $\delta = \pi/2$ beträgt, sowie über andere spezielle Fälle vgl. Liebisch, phys. Kristallogr., oder Winkelmann, Hdb. d. Phys. Optik oder Pockels, Lehrb. d. Kristalloptik.

Kapitel IV.

Absorbierende Körper.

1. Elektromagnetische Theorie. Unter absorbierenden Körpern versteht man solche, in denen das Licht eine Schwächung erleidet, die um so bedeutender ist, je länger der in dem Körper

vom Licht zurückgelegte Weg ist. Durch besonders starke Lichtabsorption zeichnen sich die Metalle aus. Nach der elektromagnetischen Theorie läßt sich Absorption bei allen Körpern erwarten, welche keine vollkommenen Isolatoren sind. Denn die durch Leitung entstehenden elektrischen Ströme erzeugen Joulesche Wärme, deren Energie muß also für die strahlende Energie des Lichtes verloren gehen.

Ergänzen wir jetzt zunächst die oben S. 255 ff. gegebene elektromagnetische Theorie für einen unvollkommenen (isotropen) Isolator, d. h. einen Körper, der außer einer Dielektrizitätskonstante ε auch noch eine elektrische Leitfähigkeit σ besitzt.

Bezeichnet man die Komponenten der Stromdichte wie früher mit j_x, j_y, j_z (nach elektrostatischem Maße), so ist für unvollkommene Isolatoren zu setzen:

$$(1) \quad j_x = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \sigma X, \quad j_y = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t} + \sigma Y, \quad j_z = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} + \sigma Z.$$

Die Strömung setzt sich nämlich zusammen aus den Verschiebungsströmen, die wir früher (vgl. Formeln (17) auf S. 256) allein berücksichtigt haben, und den Leitungsströmen. Diese bedingen in (1) die Zusatzglieder σX, σY, σZ. Mißt man Stromdichte und elektrische Kraft nach elektrostatischem Maße, so wird auch σ die absolute elektrische Leitfähigkeit nach elektrostatischem Maße genannt. Sie hat für Quecksilber den Zahlwert[1] $\sigma = 9{,}56 \cdot 10^{15}$.

Die Formeln (1) enthalten die einzige Erweiterung, welche an der bisherigen Theorie vollkommener Isolatoren anzubringen ist. Für jeden Körper werden nämlich die früheren Formeln (7) und (11) der S. 252, 254 als Grundformeln der Maxwellschen Theorie festgehalten. Dies ergibt, falls die Magnetisierungskonstante μ gleich 1 gesetzt wird, so daß $4\pi s_x = \partial\alpha/\partial t$ usw. ist, die beiden Systeme:

$$(2) \quad \frac{4\pi j_x}{c} = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}, \quad \frac{4\pi j_y}{c} = \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}, \quad \frac{4\pi j_z}{c} = \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

$$(3) \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Daß wir auch jetzt die Magnetisierungskonstante μ der absorbierenden Körper gleich 1 setzen, könnte zunächst bedenklich

1) Dieser Zahlwert hat die Dimension einer reziproken Zeit. Als Zeiteinheit ist dabei die sec. angenommen.

erscheinen, da unter die absorbierenden Körper auch die stark magnetischen Metalle Eisen, Nickel, Kobalt fallen. Indes ergibt sich einerseits aus der Erfahrung, daß nach dem optischen Verhalten für alle Metalle die Magnetisierungskonstante gleich 1 zu setzen ist bei Lichtschwingungen,[1]) andererseits führt auch die Theorie dazu, wie näher im Kapitel VII ausgeführt wird.

Die Grenzbedingungen für den Übergang des Lichtes über die Grenze zweier verschiedener (absorbierender) Medien sind nach den allgemein geltenden Schlüssen, wie sie oben S. 257 angeführt sind, in der bisherigen Form enthalten:

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \tag{4}$$

falls die xy-Ebene zur Grenze parallel liegt.

Die Gleichungen (1) bis (4) bilden die vollständige Grundlage für die elektromagnetische Theorie isotroper absorbierender Medien.

Zur Integration der Differentialgleichungen schreiben wir analog wie oben S. 275:

$$X = A e^{i \frac{2\pi}{T} \left(t - (fx + gy + hz)\right)}, \tag{5}$$

wobei hier nicht nur A, sondern eventuell auch f, g, h komplexe Größen sein sollen. Die eigentliche Bedeutung von X ist der reelle Teil der in (5) hingeschriebenen komplexen Größe. Wir können aber auf diese physikalische Bedeutung von X zum Schluß der Rechnung wieder zurückgreifen, und erhalten für die Rechnung selbst eine bedeutende Vereinfachung, wenn wir X nach (5) jener komplexen Größe direkt gleichsetzen. Nach (5) ergibt sich nämlich:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = i \frac{2\pi}{T} X,$$

so daß unsere Gleichungen (1) übergehen in

$$j_x = \frac{\varepsilon - i \cdot 2\sigma T}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}, \quad \text{usw.} \tag{6}$$

Der ganze Unterschied isotroper durchsichtiger und absorbierender Medien liegt dann nur darin, daß die reelle Konstante ε der

1) In der „Physik des Äthers", Stuttgart 1894, S. 547 ff. hat Drude die allgemeineren Gleichungen für beliebige Magnetisierungskonstante entwickelt und dargetan, daß sie nach dem optischen Verhalten des Eisens den Wert 1 haben müssen.

durchsichtigen Körper bei absorbierenden durch eine komplexe Konstante

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\,2\sigma T \tag{7}$$

ersetzt wird. Alle unseren früheren Formeln können wir anwenden, sobald wir nur ε durch ε' ersetzen.

So ist z. B. (nach den Formeln (3) der S. 262):

$$\frac{\varepsilon'}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X. \tag{8}$$

Dies liefert nach (5):

$$\frac{\varepsilon'}{c^2} = f^2 + g^2 + h^2. \tag{9}$$

Da ε' komplex ist, so können daher auch f, g, h nicht alle drei reelle Größen sein. Dadurch prägt sich aber stets eine Lichtabsorption, d. h. Schwächung der Amplitude, aus. Setzen wir z. B. $f = g = 0$, $h = \frac{1 - i\varkappa}{V}$, wobei $\varkappa$ und V reell sein sollen, so wird nach (5)

$$X = A\,e^{-2\pi\varkappa\frac{z}{\lambda}} \cdot e^{i\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}, \tag{10}$$

wobei

$$\lambda = T \cdot V$$

gesetzt ist. Die Gleichung (10) sagt aber aus, daß nach Durcheilen der Strecke λ (Wellenlänge) die Lichtamplitude im Verhältnisse $e^{-2\pi\varkappa}$ abgenommen hat. $\varkappa$ wird daher der Absorptionsindex genannt.

Der Ansatz (10) würde zu machen sein, falls Licht aus Luft senkrecht in einen absorbierenden Körper einfällt. V ist die Geschwindigkeit des Lichtes im Körper, λ die Wellenlänge in ihm. Nennt man das Verhältnis $c : V = n$ den Brechungsindex des Körpers, da es das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten im Vacuum (die wir mit der in Luft identifizieren können) und im Körper bedeutet, so ist nach (9)

$$\varepsilon' = n^2(1 - \varkappa^2 - 2i\varkappa),$$

d. h.

$$n^2(1 - \varkappa^2) = \varepsilon, \quad n^2\varkappa = \sigma T. \tag{11}$$

Durch diese Relation würde also Brechungs- und Absorptionsindex sich aus den elektrischen Konstanten bestimmen. Wir werden

zwar unten sehen, daß die Relation (11) numerisch nicht bestätigt wird, indes ist hier zunächst die Hauptsache, daß ein komplexer Wert von ε' tatsächlich Lichtabsorption bedingt, und daß man den reellen und imaginären Bestandteil von ε' ersetzen kann nach der Gleichung (11) durch die physikalisch anschaulicheren Begriffe von Brechungs- und Absorptionsindex.

2. Reflexion an Metallen. Wir benutzen die frühere Bezeichnungsweise der S. 266 u. ff. Es soll linear polarisiertes Licht einfallen, dessen Polarisationsebene unter 45° gegen die Einfallsebene geneigt sei. Dann ist $E_p = E_s$. Wir können vollständig jene Entwicklungen auch hier benutzen, wenn wir nur die dortige reelle Konstante ε durch einen komplexen Wert ε' ersetzen. φ bedeutet den Einfallswinkel des Lichtes, χ ist eine komplexe Größe, welche sich aus φ bestimmt durch:

$$\sin \chi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varepsilon'}}. \tag{12}$$

Nach (27) auf S. 271 ergibt sich dann das Verhältnis der (komplexen) Amplituden des reflektierten Lichtes zu:

$$\frac{\mathrm{R}_p}{\mathrm{R}_s} = \varrho \cdot e^{i\Delta} = -\frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)}. \tag{13}$$

Es bedeutet hier ϱ das Verhältnis der reellen Amplituden der p- und s-Komponente des reflektierten Lichtes, Δ die relative Phasendifferenz beider Komponenten, wie man sofort erkennt, wenn man $\mathrm{R}_p = R_p \cdot e^{i\delta_p}$, $\mathrm{R}_s = R_s \cdot e^{i\delta_s}$ setzt, worin R_p, R_s, δ_p, δ_s reelle Größen sind. Es ist dann

$$\varrho = R_p : R_s\,, \quad \Delta = \delta_p - \delta_s\,. \tag{14}$$

Da die rechte Seite von (13) eine komplexe Größe ist, so ist auch Δ von Null verschieden. Einfallendes linear polarisiertes Licht wird also durch Reflexion an einem Metall zu elliptisch polarisiertem.

Nach (13) folgt

$$\frac{1 + \varrho \,.\, e^{i\Delta}}{1 - \varrho \,.\, e^{i\Delta}} = \frac{\sin \varphi \sin \chi}{\cos \varphi \cos \chi}.$$

Ersetzt man hierin χ durch φ und ε' gemäß (12), so entsteht:

$$\frac{1 + \varrho \,.\, e^{i\Delta}}{1 - \varrho \,.\, e^{i\Delta}} = \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \varphi}}. \tag{15}$$

Für $\varphi = 0$ ergibt sich daher $\varrho \cdot e^{i\varDelta} = -1$, d. h. $\varDelta = 0$, $\varrho = -1$; für $\varphi = \pi/_2$ ergibt sich $\varrho \cdot e^{i\varDelta} = +1$, d. h. $\varDelta = 0$, $\varrho = 1$. Die relative Phasendifferenz $\varDelta$ im reflektierten Lichte, d. h. auch seine Elliptizität, verschwindet daher für senkrechte und für streifende Inzidenz. Derjenige Einfallswinkel $\overline{\varphi}$, für welchen die relative Phasendifferenz $\varDelta$ den Wert $\pi/_2$ annimmt, wird der Haupteinfallswinkel $\overline{\varphi}$ genannt. Für ihn ist also $e^{i\varDelta} = i$, daher nach (15):

$$\frac{1 + i \cdot \overline{\varrho}}{1 - i \cdot \overline{\varrho}} = \frac{\sin \overline{\varphi} \cdot tg\, \overline{\varphi}}{\sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \overline{\varphi}}}. \tag{16}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit ihrer komplex konjugierten Gleichung

$$\frac{1 - i \cdot \overline{\varrho}}{1 + i \cdot \overline{\varrho}} = \frac{\sin \overline{\varphi} \cdot tg\, \overline{\varphi}}{\sqrt{\varepsilon'' - \sin^2 \overline{\varphi}}},$$

worin ε'' den komplex konjugierten Wert zu ε' bedeutet, so entsteht auf der linken Seite 1. Der Haupteinfallswinkel ist also durch die Gleichung bestimmt:

$$\sin^4 \overline{\varphi} \cdot tg^4\, \overline{\varphi} = n^4 (1 + \varkappa^2)^2 - 2n^2 (1 - \varkappa^2) \sin^2 \overline{\varphi} + \sin^4 \overline{\varphi}. \tag{17}$$

Für numerische Berechnungen braucht man fast stets nur das erste Glied der rechten Seite zu berücksichtigen, da bei allen Metallen $n^2 (1 + \varkappa^2)$ einen erheblich über 1 liegenden Wert hat, der zwischen 8 bis 30 liegt. Mit dieser Annäherung wird einfach

$$\sin \overline{\varphi}\, tg\, \overline{\varphi} = n \sqrt{1 + \varkappa^2}. \tag{18}$$

Man erhält diese Annäherung direkt aus (15), wenn man im Nenner der rechten Seite $\sin^2 \varphi$ neben ε' vernachlässigt. Da nach (11) ist

$$\sqrt{\varepsilon'} = n (1 - i\varkappa), \tag{19}$$

so wird dann (15) zu

$$\frac{1 + \varrho \cdot e^{i\varDelta}}{1 - \varrho \cdot e^{i\varDelta}} = \frac{\sin \varphi\, tg\, \varphi}{n (1 - i\varkappa)}. \tag{20}$$

Schreibt man

$$\varrho = tg\, \psi, \tag{21}$$

so bedeutet ψ das Azimuth der Polarisationsebene des reflektierten Lichtes gegen die Einfallsebene, falls es durch irgend ein Mittel,

z. B. einen Babinetschen Kompensator (vgl. oben S. 244) wieder linear polarisiert gemacht ist. Daher heißt ψ das Azimuth der wiederhergestellten Polarisation.

Es läßt sich nun leicht die Beziehung ableiten:

$$\frac{1-\varrho e^{i\Delta}}{1+\varrho e^{i\Delta}} = \frac{\cos 2\psi - i \sin \Delta \sin 2\psi}{1+\cos \Delta \sin 2\psi},$$

so daß aus (20) ableitbar ist:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \sin \Delta \; tg\, 2\psi, \\ n &= \sin \varphi \; tg\, \varphi \frac{\cos 2\psi}{1+\cos \Delta \sin 2\psi}, \\ n^2(1+\varkappa^2) &= \sin^2 \varphi \; tg^2 \varphi \cdot \frac{1-\cos \Delta \sin 2\psi}{1+\cos \Delta \sin 2\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Nach diesen Formeln lassen sich die optischen Konstanten n und $\varkappa$ eines Metalls aus Beobachtung des reflektierten Lichtes (ψ und Δ) in meist genügender Annäherung[1]) finden.

Für den Haupteinfallswinkel $\varphi = \overline{\varphi}$ nennt man ψ das Hauptazimuth $\overline{\psi}$. Aus der ersten Formel (22) folgt

$$\varkappa = tg\, 2\overline{\psi}. \tag{23}$$

Um umgekehrt Δ und ψ aus den optischen Konstanten zu finden, setze man

$$tg\, P = \frac{n\sqrt{1+\varkappa^2}}{\sin \varphi \; tg\, \varphi}, \quad tg\, Q = \varkappa. \tag{24}$$

Dann ergibt sich aus (20), da die rechte Seite den Wert $cotg\, P \cdot e^{iQ}$ hat:

$$\begin{aligned} tg\, \Delta &= \sin Q \; tg\, 2P, \\ \cos 2\psi &= \cos Q \sin 2P. \end{aligned} \tag{25}$$

Als **Reflexionsvermögen** des Metalles bezeichnet man das Verhältnis der reflektierten Lichtintensität zu der einfallenden Lichtintensität beim Einfallswinkel $\varphi = 0$. Nach Formel (26) auf S. 270 ist in diesem Falle, da n hier durch $n(1-i\varkappa)$ zu ersetzen ist [vgl. Formel (19)]:

$$\frac{\mathfrak{R}_p}{E_p} = \frac{R_p \cdot e^{i\delta_p}}{E_p} = \frac{n(1-i\varkappa)-1}{n(1-i\varkappa)+1}. \tag{26}$$

1) Strengere Formeln, welche $\sin^2\varphi$ nicht neben ε' vernachlässigen, sind in Winkelmann, Hdb. d. Phys. Optik, 2. Aufl.. S. 1298 u. ff. und in Wied. Ann. 35, S. 520, 1888, vom Verf. entwickelt.

Multipliziert man diese Gleichung mit ihrer komplex konjugierten, so erhält man den Wert des Reflexionsvermögens R zu:

$$R = \frac{R_p^2}{E_p^2} = \frac{n^2(1+\varkappa^2)+1-2n}{n^2(1+\varkappa^2)+1+2n}. \tag{27}$$

Da bei allen Metallen $2n$ klein im Vergleich zu $n^2\ (1+\varkappa^2)$ ist, so ist R nahezu gleich 1, d. h. das Reflexionsvermögen sehr hoch. Man bezeichnet dieses starke Reflexionsvermögen der Metalle, welches bei Silber z. B. 95 % erreicht, als Metallglanz.[1]) Derselbe ist um so stärker, je größer der Absorptionsindex $\varkappa$ des Metalls ist. Da $\varkappa$ mit der Farbe variiert, so besitzen einige Metalle, wie besonders Gold und Kupfer, eine ausgesprochene Färbung. Dieselbe erscheint z. B. rot, wenn das rote Licht stärker als die anderen Farben reflektiert wird. Annähernd ist daher die Oberflächenfarbe des Metalles komplementär zu der Farbe des durchgehenden Lichtes. Um letzteres überhaupt wahrzunehmen, bedarf es allerdings äußerst dünner Metallschichten, die nur wenige Tausendstel Millimeter dick sind. In so geringen Dicken erscheinen z. B. Goldschichten grün durchsichtig, Silberschichten blau, Natriumschichten violett, u. s. w.

Läßt man das Licht zwischen zwei Spiegeln des gleichen Körpers wiederholt hin und her reflektieren, so wird ihre Farbe gesättigter, da die am stärksten absorbierte Farbe durch die wiederholten Reflexionen viel weniger geschwächt wird als die anderen Farben. Dieses war auch das Mittel, mit Hilfe dessen Rubens, Nichols[2]), Aschkinaß[3]), Hollnagel[4]) Wärmestrahlen von sehr großer Wellenlänge isoliert haben. Ein Auerbrenner ohne Glaszylinder wurde als Strahlungsquelle benutzt, nach fünfmaliger Reflexion an Sylvin ergab sich u. a. eine annähernd homogene Strahlung der Wellenlänge (in Luft) $\lambda = 0{,}061$ mm. Das Reflexionsvermögen des Sylvins für diese Strahlen ist $R = 0{,}80$, d. h. 80 %. Auch durch vielfache Reflexion an Steinsalz, Flußspat, Quarz u. s. w. kann man langwellige Wärmestrahlen isolieren.[5])

1) Daß dieser in der Tat nur durch das hohe Reflexionsvermögen bewirkt wird, kann man deutlich daran erkennen, daß auch eine Luftblase unter Wasser, an der das Licht total reflektiert wird, wie ein metallisch glänzender Quecksilbertropfen aussieht.

2) Rubens und Nichols, Wied. Ann. 60, S. 418, 1897.

3) Rubens und Aschkinaß, Wied. Ann. 65, S. 241, 1898.

4) Rubens und Hollnagel, Berl. Ber. 1910, 26.

5) Die längste, bisher beobachtete Wärmewelle wurde von Rubens und

Von den durch metallische Reflexion entstehenden Oberflächenfarben sind wohl zu unterscheiden die Farben, welche mäßig absorbierende Körper mit rauher Oberfläche zeigen, z. B. gefärbtes Papier, pulverisiertes farbiges Glas, Ölfarben usw. Diese Körper erscheinen im diffus reflektierten Lichte gefärbt, weil das Licht zum Teil erst aus inneren Teilen des Körpers reflektiert wird und daher der auswählenden Absorption des Körpers unterliegt. In diesen Fällen ist die Farbe im durchgehenden und reflektierten Licht die gleiche, nicht die komplementäre, wie annähernd bei den Metallen.

3. Die optischen Konstanten der Metalle. Die optischen Konstanten n und $\varkappa$ eines Metalls kann man nach den Formeln (22) experimentell bequem bestimmen, wenn man die Schwingungsellipse des reflektierten Lichtes bei einfallendem linear polarisierten Lichte mißt, d. h. Δ und ψ bestimmt nach der oben S. 243 u. ff. beschriebenen Methode mit Babinetschem Kompensator und analysierendem Nicol.[1]) Man muß nur darauf achten, daß die Metalloberfläche möglichst sein sei, weil Verunreinigungen derselben (Oberflächenschichten) stets den Haupteinfallswinkel zu klein erscheinen lassen.[2]) Die folgende Tabelle enthält einige Zahlwerte, die Drude durch Reflexion an möglichst reinen Metallflächen für gelbes Licht erhalten hat:

Metalle	$n\varkappa$	n'	$\bar{\varphi}$	$\bar{\psi}$	R
Silber	3,67	0,18	75° 42′	43° 35′	95,3 %
Gold	2,82	0,37	72° 18′	41° 39′	85,1 „
Platin	4,26	2,06	78° 30′	32° 35′	70,1 „
Kupfer	2,62	0,64	71° 35′	38° 57′	73,2 „
Stahl	3,40	2,41	77° 3′	27° 49′	58,5 „
Natrium	2,61	0,005	71° 19′	44° 58′	99,7 „
Quecksilber	4,96	1,73	79° 34′	35° 43′	78,4 „

v. Baeyer in der Strahlung der Quecksilberlampe entdeckt und zu $\lambda = 0{,}343$ mm gefunden (Berl. Ber. 1911, 666). Die kürzesten Hertzschen Wellen, welche v. Baeyer dargestellt hat, haben $\lambda = 2$ mm. Die Lücke zwischen dem äußersten Ultrarot und den kürzesten Hertzschen Wellen beträgt also weniger als 3 Oktaven.

1) Eine von W. Voigt (Phys. Ztschr. 2, S. 303. 1901) gegebene sehr elegante photographische Methode hat R. S. Minor (Diss. Göttingen; Ann. d. Phys. 10, S. 581, 1903) zur Bestimmung der optischen Konstanten der Metalle im Ultraviolett angewandt und dadurch einen wichtigen Beitrag zur Kenntnis ihrer Dispersion geliefert.

2) Das Nähere hierüber vgl. bei P. Drude, Wied. Ann. 35, S. 885, 1889, — 39, S. 481, 1890.

Das Reflexionsvermögen R ist nicht direkt beobachtet worden sondern nach (27) berechnet.

Die optischen Konstanten kann man auch durch Beobachtungen im durchgehenden Lichte feststellen. Durch Messung der Absorption in einer dünnen Schicht der Dicke d erhält man, wie aus (10) hervorgeht, einen Wert für $\varkappa:\lambda$, falls λ die Wellenlänge im Metall bedeutet. Da nun $\lambda = \lambda_0 : n$, falls λ_0 die Wellenlänge in Luft ist, so erhält man also $n\varkappa$, da λ_0 bekannt ist. An den Grenzen der dünnen Metallschicht treten aber bedeutende Schwächungen durch Reflexion ein. Um deren Wirkung zu eliminieren, vergleicht man zweckmäßig die Absorptionen in zwei verschieden dicken Schichten. Die Reflexionsverluste sind dann in beiden Fällen nahezu dieselben. so daß man aus der Verschiedenheit der Absorption direkt auf $n\varkappa$ schließt. Die Beobachtungen leiden an der Schwierigkeit, löcherfreie, gleichmäßig dicke Metallschichten von wenigen Tausendstel Millimeter Dicke herzustellen. Daher fällt $n\varkappa$ bei diesen Durchgangsbeobachtungen meist kleiner aus, als nach der Reflexionsmethode,[1]) in wenigen Fällen[2]) (bei Silber, welches man verhältnismäßig einfach auf nassem Wege auf Glas niederschlagen kann) stimmt aber das aus der Absorption berechnete $n\varkappa$ gut überein mit dem aus der Reflexion berechneten.

Der Brechungsindex n kann analog wie bei durchsichtigen Medien aus der Brechung durch ein Metallprisma gefunden werden,[3]) nur bedarf es sehr geringer Prismenwirkung (Bruchteile einer Bogenminute), damit das Licht überhaupt noch in merklicher Intensität durch das Metallprisma hindurch geht. Seitdem es Kundt[4]) gelungen ist, geeignete Metallprismen herzustellen (meist durch Elektrolyse auf platiniertem Glase), sind mehrfach[5]) die Brechungsindizes von Metallen in dieser Weise bestimmt worden. Die Herstellung der Prismen sowohl als die Beobachtungen sind sehr schwierige, da das Resultat als Quotient zweier sehr kleiner

1) Bei W. Rathenau, Die Absorption des Lichtes in Metallen. Dissert. Berlin 1889.

2) Bei W. Wernicke, Pogg. Ann. Ergzgbd. 8, S. 75, 1878. — Auch die Beobachtungen von W. Wien (Wied. Ann. 35, S. 48, 1888) ergeben annähernde Bestätigung.

3) Betreffs der Formeln vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 24, S. 144, 1885. — P. Drude, Wied. Ann. 42, S. 666, 1891.

4) A. Kundt, Wied. Ann. 34, S. 459, 1888.

5) Vgl. z. B. Du Bois u. Rubens, Wied. Ann. 41, S. 507, 1890.

Größen erhalten wird. Die Resultate stimmen meist gut überein mit den aus den Reflexionsbeobachtungen erhaltenen; z. B. wird das auffallende Resultat bestätigt, daß bei verschiedenen Metallen $n < 1$ ist.

Diese kleinen Brechungsindizes von Silber, Gold, Kupfer und besonders Natrium sind sehr auffallend; sie besagen ja, daß sich in diesen Metallen das Licht viel schneller fortpflanzt, als in Luft.

Vergleichen wir diese optischen Konstanten mit der Forderung (11) der elektromagnetischen Theorie, so springt ein Widerspruch sofort in die Augen: Es würde nämlich, da $\varepsilon = n^2(1 - \varkappa^2)$ sein soll, bei allen Metallen die Dielektrizitätskonstante ε negativ sein, da $\varkappa = tg\, 2\bar{\psi}$, und $2\bar{\psi}$ bei allen Metallen größer als 45°, d. h. $\varkappa > 1$ ist. Eine negative Dielektrizitätskonstante hat aber keinen Sinn. Auch die zweite der Beziehungen (11): $n^2\varkappa = \sigma T$ wird nicht bestätigt, da z. B. bei Quecksilber (vgl. oben S. 340) und gelbem Licht $\sigma T = 20$ ist, während $n^2\varkappa$ den Wert 8,6 hat. Für Silber ist σT viel größer als bei Quecksilber, während trotzdem $n^2\varkappa$ viel kleiner als bei Quecksilber ist.

Wir treffen hier wieder auf dieselbe Tatsache, die wir schon oben konstatiert haben, als wir die Brechungsindizes durchsichtiger Körper mit den Dielektrizitätskonstanten verglichen haben. Angenähert stimmt die elektromagnetische Theorie mit den Erscheinungen gut überein, die numerischen Werte der optischen Konstanten kann man aber nicht aus dem elektrischen Verhalten entnehmen. Die Erweiterung der Theorie, welche diesen Widerspruch hebt, soll im folgenden Kapitel gemacht werden. — Es ist aber sehr bemerkenswert, daß für genügend lange Wellen der Widerspruch verschwindet. Wenigstens kann nach den Versuchen von Hagen und Rubens[1]) das Reflexionsvermögen der Metalle für Wellenlängen $\lambda > 0{,}012$ mm quantitativ aus ihrer elektrischen Leitfähigkeit berechnet werden. Die Forscher bedienten sich dabei der Methode der Reststrahlen (vgl. oben S. 346,). Für die längsten Wellen ($\lambda = 0{,}025$ mm, Reststrahlen von Flußspat) maßen sie nicht das Reflexionsvermögen R der Metalle, sondern bestimmten das Verhältnis E ihres Emissionsvermögens bei hoher Temperatur zu dem Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers (Hohlraum mit Loch) von gleicher Temperatur. Nach dem Kirch-

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 11. S. 873, 1903.

hoffschen Satz (vgl. unten III. Abschnitt, II. Kapitel, § 4) ist nämlich E gleich dem Absorptionsvermögen des Metalls, d. h. der nicht vom Metall reflektierten Energie. Es besteheht daher die Gleichung $E = 1 - R$. Da nun für sehr lange Wellen für alle Metalle R sich asymptotisch dem Werte 1 nähert, so erhält man eine größere Genauigkeit, wenn man R aus E bestimmt, als wenn man R direkt bestimmt, denn die E der einzelnen Metalle unterscheiden sich prozentisch voneinander viel stärker als die R. — Zur numerischen Brechung folgt aus (11):

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 + \sigma^2 T^2}, \quad n^2\varkappa^2 = -\tfrac{1}{2}\varepsilon + \sqrt{\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 + \sigma^2 T^2}.$$

Nun ist für Quecksilber (vgl. oben S. 340) $\sigma = 9{,}56 \cdot 10^{15}$, daher $\sigma T = \sigma\lambda : 3 \cdot 10^{10} = 320$ für $\lambda = 10\,\mu = 0{,}001$ cm. Diese Zahl ist sehr wahrscheinlich erheblich größer als die Dielektrizitätskonstante ε des Metalls. Vernachlässigt man daher $\frac{1}{2}\varepsilon$ und 1 gegen σT, so wird $n = n\varkappa = \sqrt{\sigma T}$, und nach (27) folgt das Reflexionsvermögen zu:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma T}} = 1 - 2\sqrt{\frac{3 \, . \, 10^{10}}{\sigma\lambda}},$$

das Emissionsvermögen zu:

$$E = 1 - R = \frac{2}{\sqrt{\sigma T}} = 2\sqrt{\frac{3 \, . \, 10^{10}}{\sigma\lambda}}.$$

Unter σ ist die Leitfähigkeit des Metalls bei der gleichen Temperatur zu verstehen, bei der R bezw. E gemessen werden. Bei den Messungen des Emissionsvermögens E, die bei höherer Temperatur stattfinden, ist also σ erheblich kleiner als bei den Messungen des Reflexionsvermögens R bei Zimmertemperatur.

Diese zuerst von Drude aufgestellten Formeln wurden, abgesehen von Wismut, bei allen Metallen für $\lambda > 12\,\mu$, d. h. $\lambda > 0{,}012$ mm sehr gut quantitativ bestätigt, am besten für die größten Wellen $\lambda = 25{,}5\,\mu$. Für kleinere Wellen, z. B. $\lambda = 4\mu$, ergeben zwar die Mittelwerte vieler Metalle noch numerische Übereinstimmung mit der Formel für R, aber die einzelnen Metalle zeigten schon merkliche Abweichungen. Für sichtbares Licht dagegen stimmen die Formeln für R bezw. E gar nicht mehr numerisch, aus Gründen, die im folgenden Kapitel entwickelt werden sollen.

4. Absorbierende Kristalle. Die Ausdehnung des bisherigen Ansatzes für isotrope absorbierende Körper auf Kristalle geschieht

sehr einfach, indem man nach drei zu einander senkrechten optischen Symmetrieachsen verschiedene Dielektrizitätskonstanten und verschiedene Leitfähigkeiten annimmt. Legt man das Koordinatensystem in diese drei Symmetrieachsen, so erhält man das frühere Formelsystem (12) der S. 300, nur bedeuten die ε_1, ε_2, ε_3 komplexe Größen, wenn man die elektrische Kraft als komplexe Größe nach Formel (5) dieses Kapitels (S. 341) zunächst in die Rechnung einführt. Allerdings würde der Ansatz insofern noch zu speziell sein, als die Symmetrieachsen für die Dielektrizitätskonstante im allgemeinen nicht zusammen zu fallen brauchen mit den Symmetrieachsen für die Leitfähigkeit; dies ist erst für Kristalle, die mindestens die Symmetrie des rhombischen Systemes besitzen, notwendig. Indes wollen wir hier den allgemeinsten Fall nicht diskutieren,[1]) da das Charakteristische schon bei der hier getroffenen Vereinfachung hervortritt.

Zur Integration der früheren Differentialgleichungen:

$$\frac{\varepsilon_1'}{c_2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \text{ usw.} \tag{28}$$

machen wir für die Komponenten u, v, w des Lichtvektors den Ansatz:

$$\begin{gathered} u = \varepsilon'_1 X = M e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - (mx + ny + pz)\frac{1 - i\varkappa}{V}\right)}, \\ v = \varepsilon_2' Y = N e^{i\frac{2\pi}{T}(t\ldots)}, \quad w = \varepsilon_3' Z = \Pi e^{i\frac{2\pi}{T}(t\ldots)}, \end{gathered} \tag{29}$$

wobei $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ sein soll, und M, N, Π komplex sein können. Dieser Ansatz entspricht ebenen Wellen, deren Normale die Richtungskosinus m, n, p besitzt. V ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenebenen, $\varkappa$ ihr Absorptionsindex (vgl. oben S. 342). Setzt man

$$\frac{V}{1 - i\varkappa} = \omega, \tag{30}$$

so gilt das frühere Fresnelsche Gesetz (18) der S. 301:

---

1) Dessen Behandlung ist vom Verf. in Winkelmanns Hdb. d. Phys. Optik, 2. Aufl., S. 1283 u. ff. angedeutet und von W. Voigt in seinem Kompendium d. theoret. Physik **2**, S. 719 u. ff., Leipzig, 1896 und in Ann. d. Phys. **9**, S. 367, 1902 genauer ausgeführt, auch von F. Pockels in seinem Lehrb. d. Krist. Optik, S. 369 u. ff. dargestellt.

$$(31)\qquad \frac{m^2}{a_0{}^2-\omega^2}+\frac{n^2}{b_0{}^2-\omega^2}+\frac{p^2}{c_0{}^2-\omega^2}=0,$$

dabei sind aber $a_0{}^2$, $b_0{}^2$, $c_0{}^2$, komplexe Größen. Diese Gleichung zerfällt also in zwei, aus denen man V und $\varkappa$ gesondert als Funktion der Richtung m, n, p der Wellennormale berechnen kann.

Für die M, N, Π ergeben sich nach den früheren Relationen (15), (19) und (20) der S. 301 und 302 die Beziehungen:

$$(32)\qquad Mm+Nn+\Pi p=0$$

$$(33)\qquad M:N:\Pi=\frac{m}{a_0{}^2-\omega^2}:\frac{n}{b_0{}^2-\omega^2}:\frac{p}{c_0{}^2-\omega^2},$$

$$(34)\qquad M_1\,M_2+N_1\,N_2+\Pi_1\,\Pi_2=0\,.$$

Da nach (33) die M, N, Π komplex sind, so ergeben sich für jede Richtung m, n, p zwei elliptisch polarisierte Wellen. Denn schreibt man $M=\mathfrak{M}\cdot e^{i\delta_1}$, $N=\mathfrak{N}\cdot e^{i\delta_2}$, so bedeutet $\delta_1-\delta_2$ die Phasendifferenz zwischen der Komponente u und v des Lichtvektors; bei geradlinig polarisiertem Licht müßte $\delta_1-\delta_2=0$ sein. Die Gleichung (32) drückt aus, daß die Ebene der Schwingungsbahn senkrecht zur Wellennormale steht, (34) besagt, daß für beide Wellen die Schwingungsellipsen einander ähnlich sind, aber inverse Lage zueinander haben.[1])

Die aus (31) abzuleitende Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Richtung m, n, p ist sehr kompliziert. Das Fresnelsche Gesetz wird also, trotz der scheinbaren Identität mit der Formel (31), bedeutend modifiziert. Dagegen liegen die Verhältnisse bedeutend einfacher bei schwach absorbierenden Kristallen, wie sie z. B. bei Beobachtungen im durchgehenden Lichte[2]) stets vorliegen. Kann man nämlich $\varkappa^2$ gegen 1 vernachlässigen, so ist $\omega^2=V^2\,(1+2i\varkappa)$. Setzt man daher

$$(35)\qquad a_0{}^2=a^2+i\,a'^2,\quad b_0{}^2=b^2+i\,b'^2,\quad c_0{}^2=c^2+i\,c'^2,$$

so wird

$$(36)\quad \frac{m^2}{a_0{}^2-\omega^2}=\frac{m^2}{a^2-V^2-i(2\varkappa V^2-a'^2)}=\frac{m^2}{a^2-V^2}\left(1+i\,\frac{2\varkappa V^2-a'^2}{a^2-V^2}\right).$$

1) Betreffs des näheren Nachweises hiervon vgl. Winkelmanns Hdb. d. Phys. Optik, 2. Aufl., S. 1287.

2) Im reflektierten Lichte sind die Wirkungen starker Absorption gut zu beobachten, z. B. an Magnesium- (oder Baryum-)platincyanür. Derartige Kristalle besitzen polarisierten Metallglanz.

Daher zerfällt (31) in die beiden Gleichungen:

$$\frac{m^2}{a^2 - V^2} + \frac{n^2}{b^2 - V^2} + \frac{p^2}{c^2 - V^2} = 0, \tag{37}$$

$$\begin{aligned} 2\varkappa V^2 \left\{ \frac{m^2}{(a^2 - V^2)^2} + \frac{n^2}{(b^2 - V^2)^2} + \frac{p^2}{(c^2 - V^2)^2} \right\} \\ = a'^2 \frac{m^2}{(a^2 - V^2)^2} + b'^2 \frac{n^2}{(b_2 - V^2)^2} + c'^2 \frac{p^2}{(c^2 - V^2)^2}. \end{aligned} \tag{38}$$

Die Gleichung (37) ist das gewöhnliche Fresnelsche Gesetz. Bei kleiner Absorption wird dasselbe also nicht modifiziert. Die Gleichung (38) stellt $\varkappa$ als Funktion von m, n, p dar. Nach (33) sind bei kleiner Absorption die M, N, Π annähernd reell, d. h. die beiden Wellen im Kristall nur schwach elliptisch polarisiert. Bezeichnet man mit $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ die Richtungskosinus der großen Achse der Schwingungsellipse, so ist nach (33) und (36), da $\mathfrak{M}$ der reelle Teil von M ist usw.:

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{N} : \mathfrak{P} = \frac{m}{a^2 - V^2} : \frac{n}{b^2 - V^2} : \frac{p}{c^2 - V^2}. \tag{39}$$

Die $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ bestimmen sich also geradeso wie die Schwingungsrichtungen in durchsichtigen Kristallen.

Vermöge (39) und der Beziehung $\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 = 1$ schreibt sich (38):

$$2\varkappa V^2 = a'^2 \mathfrak{M}^2 + b'^2 \mathfrak{N}^2 + c'^2 \mathfrak{P}^2, \tag{40}$$

d. h. nach der auch hier gültigen Relation (18′) der S. 303:

$$2\varkappa = \frac{a'^2 \mathfrak{M}^2 + b'^2 \mathfrak{N}^2 + c'^2 \mathfrak{P}^2}{a^2 \mathfrak{M}^2 + b^2 \mathfrak{N}^2 + c^2 \mathfrak{P}^2}. \tag{41}$$

Der Absorptionsindex $\varkappa$ ist also gerade wie die Fortpfanzungsgeschwindigkeit V eine eindeutige Funktion der Schwingungsrichtung.

Man kann dieses Gesetz leicht verifizieren, wenn man einen parallel zu den Symmetrieebenen geschnittenen Würfel eines gefärbten Kristalls im durchgehenden Lichte betrachtet. Derselbe erscheint verschieden gefärbt, je nach der Richtung der Lichtstrahlen (Trichroismus bei rhombischen, Dichroismus bei hexagonalen und tetragonalen Kristallen). Man kann dies z. B. am Turmalin, Beryll, Rauchtopas, Cordierit und besonders am Pennin

wahrnehmen, bei dem die Farben blaugrün und braungelb vorkommen. Wenn man nun das durch einen solchen Würfel hindurchgehende Licht durch ein Nicol analysiert, so hängt die Farbe von der Lage seiner Polarisationsebene ab, indem die extremsten Farben erhalten werden, wenn sie einer Symmetrieachse des Kristalls parallel ist.[1]) Von diesen sechs extremsten Farben, die man mit Hilfe eines Nicols an einem Würfel eines trichroitischen Kristalls wahrnehmen kann, sind nun stets zwei paarweise aneinander gleich, und zwar liegen in diesen Fällen allemal die Schwingungsrichtungen (im Fresnelschen Sinne) identisch (vgl. oben S. 242).

Die Formeln (40) und (41) vereinfachen sich, wenn die Wellennormale in der Nähe einer optischen Achse, z. B. bei A_1, liegt. Ist der Winkel g_1 zwischen Wellennormale N und optischer Achse A_1 so klein, daß man sein Quadrat gegen 1 vernachlässigen kann, so ist $V^2 = b^2$ zu setzen. Nennt man ferner den Winkel der durch A_1 und N gelegten Ebene (NA_1) mit der Ebene der optischen Achsen (xz-Ebene) ψ, so macht die durch N und die eine Schwingungsrichtung $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{P}_1$ gelegte Schwingungsebene den Winkel $\psi/2$ mit der xz-Ebene. Denn nach S. 308 halbiert die Schwingungsebene den Winkel, welchen die Ebenen (NA_1) und (NA_2) miteinander einschließen, da aber N unmittelbar bei der optischen Achse liegen soll, so können wir die durch N und A_2 gelegte Ebene (NA_2) mit der Ebene $(A_1 A_2)$ der optischen Achsen, d. h. der xz-Ebene, identifizieren. Es muß also auch die Schwingungsrichtung $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{P}_1$ den Winkel $\frac{1}{2}\psi$ einschließen mit einer zur Wellennormale N, d. h. zur optischen Achse A_1, senkrechten Richtung S, welche in der xz-Ebene liegt. Die Richtungscosinus von S sind $\cos q$, o, $-\sin q$, falls q den Winkel zwischen der optischen Achse A_1 und der z-Achse bedeutet, d. h. den halben Winkel, den beide optischen Achsen miteinander einschließen (q = halber Achsenwinkel). Daher folgt:

$$\cos\frac{\psi}{2} = \mathfrak{M}_1 \cos q - \mathfrak{P}_1 \sin q. \tag{42}$$

Da nun ferner $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{P}_1$ auch rechtwinklig zur Wellennormale

1) Man erhält beide Farben gleichzeitig, wenn man anstatt eines Nicols einen gewöhnlichen Doppelspat verwendet. (Dichroskopische Lupe, vgl. Müller-Pouillet-Lummer, Optik 9. Aufl., S. 1005.)

N, d. h. zur optischen Achse A_1 steht, welche die Richtungscosinus $\sin q$, o, $\cos q$ hat, so ist auch

$$0 = \mathfrak{M}_1 \sin q + \mathfrak{P}_1 \cos q. \tag{42'}$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_1 = \cos q \cos \frac{\psi}{2}, \quad \mathfrak{N}_1 = \sin \frac{\psi}{2}, \quad \mathfrak{P}_1 = -\sin q \cos \frac{\psi}{2}. \tag{43}$$

Hieraus leitet man $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{P}_2$ ab, da es senkrecht zu $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{P}_1$ und zu m, n, p steht, in der Form:

$$\mathfrak{M}_2 = -\cos q \sin \frac{\psi}{2}, \quad \mathfrak{N}_2 = \cos \frac{\psi}{2}, \quad \mathfrak{P}_2 = \sin q \sin \frac{\psi}{2}. \tag{44}$$

In der Nähe der optischen Achse wird daher nach (40):

$$\begin{aligned} 2\varkappa_1 b^2 &= (a'^2 \cos^2 q + c'^2 \sin^2 q) \cos^2 \frac{\psi}{2} + b'^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ 2\varkappa_2 b^2 &= (a'^2 \cos^2 q + c'^2 \sin^2 q) \sin^2 \frac{\psi}{2} + b'^2 \cos^2 \frac{\psi}{2}. \end{aligned} \tag{45}$$

Diese Formeln zeigen, daß für irgend einen Winkel $\pm \psi$ der Wert von $\varkappa_1$ derselbe ist, wie der von $\varkappa_2$ für einen Winkel $\psi' = \pi \pm \psi$. — Für die optische Achse selbst werden jene Formeln unbestimmt, weil dort ψ seine Bedeutung verliert. Nach früheren Entwicklungen (vgl. S. 305) kann man die Schwingungsrichtung willkürlich wählen. Aus (40) folgt für eine in der Ebene der optischen Achsen polarisierte, d. h. senkrecht zu ihr schwingende Welle, da dann $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{N} = 1$ ist:

$$2\varkappa_s b^2 = b'^2, \tag{46}$$

dagegen für eine senkrecht zur Ebene der optischen Achsen polarisierte, d. h. in dieser Ebene schwingende Welle, da für sie $\mathfrak{M} = \cos q$, $\mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{P} = -\sin q$ ist:

$$2\varkappa_p b^2 = a'^2 \cos^2 q + c'^2 \sin^2 q. \tag{47}$$

Für Zwischenlagen der Polarisationsebene erhält man Zwischenwerte für $\varkappa$, die zwischen $\varkappa_s$ und $\varkappa_p$ liegen. Die Absorption einer in Richtung einer optischen Achse fortgepflanzten Welle hängt also von ihrer Polarisationsrichtung ab. — Durch Einführung der Größen $\varkappa_s$ und $\varkappa_p$ schreibt sich (45):

$$(48)\qquad \varkappa_1 = \varkappa_p \cdot \cos^2\frac{\psi}{2} + \varkappa_s \cdot \sin^2\frac{\psi}{2}, \quad \varkappa_2 = \varkappa_p \cdot \sin^2\frac{\psi}{2} + \varkappa_s \cdot \cos^2\frac{\psi}{2}.$$

Bei einachsigen Kristallen ($a = b$, $a' = b'$) ist, falls g den Winkel der Wellennormale gegen die optische Achse bezeichnet, aus (40) sofort abzuleiten für die ordinäre Welle:

(49) $2\varkappa_o V_o^2 = a'^2, \qquad V_o^2 = a^2,$
für die extraordinäre Welle:
$2\varkappa_e^2 V_e^2 = a'^2 \cos^2 g + c'^2 \sin^2 g, \qquad V_e^2 = a^2 \cos^2 g + c^2 \sin^2 g.$

5. Interferenzerscheinungen in absorbierenden zweiachsigen Kristallen. Es möge die Platte eines absorbierenden Kristalls zwischen Analysator und Polarisator bei konvergent einfallendem Lichte gelegt werden. Wir beziehen uns auf die Bezeichnungsweise der §§ 14 und 15 auf S. 328 und 332 und die dortige Figur 91. Die nach einer Richtung H_1 schwingende Welle W_1 hat beim Eintritt in den Kristall die Amplitude $E \cos \varphi$, beim Austritt daher

$$E \cos \varphi \cdot e^{-\frac{2\pi}{T}\frac{\varkappa_1}{V_1} l},$$

wobei l den in der Kristallplatte zurückgelegten Weg bezeichnet. Es ist $l = d : \cos r_1$, falls d die Dicke der Kristallplatte und r_1 der Brechungswinkel der Welle W_1 ist. — Analog ist die Amplitude der Welle W_2 nach dem Austritt aus dem Kristall

$$E \sin \varphi\, e^{-\frac{2\pi}{T}\frac{\varkappa_2}{V_2} l}$$

(es ist näherungsweise für beide Wellen der im Kristall zurückgelegte Weg als gleich angenommen). Nach dem Durchtritt durch den Analysator sind daher die Amplituden der beiden Wellen:

$$(50)\qquad \begin{aligned} &E \cos \varphi \cos(\varphi - \chi) \cdot e^{-\varkappa_1 \sigma_1}, \qquad \sigma_1 = \frac{2\pi}{TV_1}\frac{d}{\cos r},\\ &E \sin \varphi \sin(\varphi - \chi) \cdot e^{-\varkappa_2 \sigma_2}, \qquad \sigma_2 = \frac{2\pi}{TV_2}\frac{d}{\cos r}. \end{aligned}$$

Die Phasendifferenz δ beider Wellen bestimmt sich bei konvergent einfallendem Licht durch die Formel (88) der S. 332.

Betrachten wir näher den Fall der gekreuzten Nicols ($\chi = \pi/2$), nehmen wir ferner eine Platte, welche senkrecht zu einer optischen

Achse (A_1) geschnitten ist, und nennen wir ψ den Winkel, den die Verbindungslinie MA_1 eines in der Nähe der optischen Achse liegenden Punktes M des Gesichtsfeldes[1]) und der Achse A_1 mit der Ebene $A_1 A_2$ der optischen Achsen bildet, so macht (vgl. Figur 101) die Schwingungsrichtung H_1 annähernd den Winkel $\psi/_2$ mit der Richtung A_1 A_2, falls $A_1 M$ klein gegen $A_1 A_2$ ist. Macht ferner die Schwingungsebene P des Polarisators den Winkel α mit der Ebene $A_1 A_2$ der optischen Achsen, so ist in (50) zu setzen $\varphi = \alpha - \psi/_2$, $\chi = \pi/_2$. Die beiden zur Interferenz kommenden Amplituden werden daher

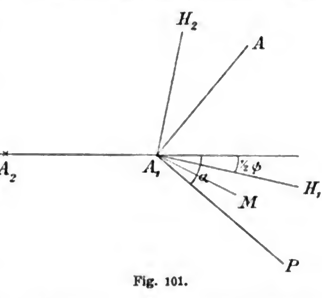


Fig. 101.

$$
\begin{aligned}
&+ E \cos(\alpha - \psi/_2) \sin(\alpha - \psi/_2) e^{-\varkappa_1 \sigma}, \\
&- E \sin(\alpha - \psi/_2) \cos(\alpha - \psi/_2) e^{-\varkappa_2 \sigma},
\end{aligned}
\tag{51}
$$

wobei

$$
\sigma = \frac{2\pi d}{Tb}
$$

ist, da in der Nähe der optischen Achse $V_1 = V_2 = b$ ist, und r nur klein sein soll.

Daher ist die aus dem Analysator austretende Lichtintensität

$$
\begin{aligned}
J = \frac{E^2}{4} \sin^2(2\alpha - \psi) . \\
\cdot \left\{ e^{-2\varkappa_1 \sigma} + e^{-2\varkappa_2 \sigma} - 2 e^{-(\varkappa_1 + \varkappa_2)\sigma} \cdot \cos \delta \right\}.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Für die optische Achse selber führt folgende Betrachtung zum Ziel: Die einfallende Amplitude E werde in die Komponenten parallel und senkrecht zur Ebene $A_1 A_2$ der optischen Achsen zerlegt. Diese Komponenten sind $E \cos \alpha$ und $E \sin \alpha$. Erstere hat nach dem Austritt aus dem Kristall den Wert

$$
E \cos \alpha \cdot e^{-\varkappa_p \sigma}, \quad \text{letztere } E \sin \alpha \, e^{-\varkappa_s \sigma}.
$$

---

1) Die verschiedenen Punkte des Gesichtsfeldes entsprechen nach S. 334 verschiedenen Neigungen der die Kristallplatte durchsetzenden Strahlen.

Nach dem Durchtritt durch den Analysator ergibt erstere Komponente die Amplitude

$$E \cos\alpha \sin\alpha\, e^{-\varkappa_p \sigma}, \quad \text{letztere} \; -E \sin\alpha \cos\alpha\, e^{-\varkappa_s \sigma}.$$

Eine relative Phasendifferenz δ haben diese beide Wellen nicht, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Richtung der optischen Achse für beide Wellen die gleiche ist. Folglich ist die aus dem Analysator austretende Lichtintensität für die optische Achse:

$$J' = \frac{E^2}{4} \sin 2\alpha \left(e^{-\varkappa_p \sigma} - e^{-\varkappa_s \sigma}\right)^2. \tag{53}$$

Den ersten Faktor in (52) gleich Null gesetzt, ergibt die Lage der dunkeln Hauptisogyre $\psi = 2\alpha$. Während aber die schwarze Isogyre bei ungefärbten Kristallen durch die optische Achse selbst hindurchgeht, ist sie bei pleochroitischen Kristallen durch einen hellen Achsenpunkt unterbrochen, wenn nicht gerade $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi/_2$ ist, d. h. wenn nicht gerade die Kristallplatte in der ersten Hauptlage liegt. Denn nach (53) ist J' von Null verschieden, falls $\sin 2\alpha \gtrless 0$ und $\varkappa_p$ von $\varkappa_s$ verschieden ist.

Der zweite Faktor in (52) gleich Null gesetzt, ergibt dunkle Ringe um die optische Achse, da der Wert dieses zweiten Faktors von $\cos\delta$ abhängt, und $\cos\delta$ mit wachsender Entfernung von der optischen Achse periodisch Maxima und Minima annimmt. Doch werden diese Ringe (bei homogener Beleuchtung) nur da vollkommen schwarz, wo $\varkappa_1 = \varkappa_2$ ist, d. h. nach (48) für $\psi = \pm \pi/_2$, denn dort verschwindet für $\cos\delta = 1$ wirklich der zweite Faktor. Die ganze Erscheinung der Ringe wird um so undeutlicher, je stärker die Absorption sich bemerklich macht, d. h. je dicker die Platte ist. Denn das von der Phasendifferenz δ in (52) abhängige Glied hat einen Faktor, den man nach (48) schreiben kann $e^{-(\varkappa_p + \varkappa_s)\sigma}$. Wenn der Kristall nun überhaupt zu den gefärbten gehört, so muß mindestens einer von den beiden Absorptionsindizes $\varkappa_p$ und $\varkappa_s$ von Null verschieden sein, d. h. bei genügend großem σ, d. h. bei genügender Plattendicke d, verschwindet dies Glied, d. h. der Einfluß von δ. Man kann dann den zweiten Faktor von J in (52) schreiben:

$$F = e^{-2\varkappa_1 \sigma} + e^{-2\varkappa_2 \sigma}. \tag{54}$$

Diese Glieder können, obgleich σ groß ist, noch merkbare Werte geben, da $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ klein sein können für gewisse Stellen M des Gesichtsfeldes, falls von den $\varkappa_p$ und $\varkappa_s$ eines klein ist. Man kann nun nachweisen, daß F für $\psi = 0$, π ein Maximum, für $\psi = \pm \pi/_2$ ein Minimum wird. Denn es ist nach (48)

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = \sigma \sin \psi \, (\varkappa_p - \varkappa_s)(e^{-2\varkappa_1 \sigma} - e^{-2\varkappa_2 \sigma}),$$

daher sind Maxima oder Minima vorhanden bei $\psi = 0$, π und $\varkappa_1 = \varkappa_2$, d. h. $\psi = \pm \pi/_2$. Für $\psi = 0$, π ist aber

$$F = e^{-2\varkappa_p \sigma} + e^{-2\varkappa_s \sigma} = F_1, \tag{55}$$

für $\psi = \pm \pi/_2$ ist

$$F = 2 \cdot e^{-(\varkappa_p + \varkappa_s)\sigma} = F_2. \tag{56}$$

Setzt man $e^{-2\varkappa_p \sigma} = x$, $\quad e^{-2\varkappa_s \sigma} = y$,

so wird $\quad \frac{1}{2} F_1 = \frac{x+y}{2}$, $\quad \frac{1}{2} F_2 = \sqrt{xy}$.

Da nun aber stets das arithmetische Mittel größer als das geometrische ist (um so mehr, je mehr x und y, d. h. $\varkappa_p$ und $\varkappa_s$ voneinander verschieden sind), so entspricht der Wert $\psi = 0$, π einem Maximum, der Wert $\psi = \pm \pi/_2$ einem Minimum von F.

Außer der Hauptisogyre ($\psi = 2\alpha$) durchzieht also stets noch ein senkrecht zur Ebene der optischen Achsen ($\psi = \pm \pi/_2$) verlaufendes schwarzes Büschel das Gesichtsfeld. Dieses fällt mit der Hauptisogyre zusammen in der zweiten Hauptlage der Kristallplatte ($\alpha = \pi/_4$).

Durch die Absorption sind schon besondere Erscheinungen wahrnehmbar, wenn der Analysator oder Polarisator fortgelassen wird. Für ersteren Fall treten aus der Kristallplatte die beiden rechtwinklig zueinander schwingenden Amplituden $E \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\psi\right) e^{-\varkappa_1 \sigma}$ und $E \sin\left(\alpha - \frac{1}{2}\psi\right) e^{-\varkappa_2 \sigma}$. Werden diese nicht auf eine gemeinsame Schwingungsrichtung zurückgeführt, so interferieren sie nicht, und die resultierende Intensität ergibt sich einfach als Summe der Intensitäten beider einzelnen Komponenten. Es ist daher

$$J = E^2 \left\{ \cos^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\psi\right) e^{-2\varkappa_1 \sigma} + \sin^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\psi\right) e^{-2\varkappa_2 \sigma} \right\}. \tag{57}$$

Für die optische Achse selbst ergibt sich:

$$J' = E^2 \left\{ cos^2 \alpha \, e^{-2\varkappa_p \sigma} + sin^2 \alpha \, e^{-2\varkappa_s \sigma} \right\}. \tag{58}$$

Untersuchen wir folgende beiden Hauptfälle

1. $\alpha = 0$. Es wird

$$J = E^2 \left\{ cos^2 \frac{1}{2} \psi \, e^{-2\varkappa_1 \sigma} + sin^2 \frac{1}{2} \psi \, e^{-2\varkappa_2 \sigma} \right\}.$$

$$J' = E^2 \, e^{-2\varkappa_p \sigma}.$$

Da $\frac{\partial J}{\partial \psi} \sim sin \, \psi \left\{ \sigma (\varkappa_s - \varkappa_p) \left(sin^2 \frac{1}{2} \psi \, e^{-2\varkappa_2 \sigma} - cos^2 \frac{1}{2} \psi \, e^{-2\varkappa_1 \sigma} \right) + \frac{e^{-2\varkappa_2 \sigma} - e^{-2\varkappa_1 \sigma}}{2} \right\}$,

so wird $\frac{\partial J}{\partial \psi} = 0$ für $\psi = 0, \pi$ und $\psi = \pm \pi/_2$.

Für $\psi = 0, \pi$ ist $J = J_1 = E^2 \cdot e^{-\varkappa_p \sigma}$,
für $\psi = \pm \pi/_2$ ist $J = J_2 = E^2 \cdot e^{-(\varkappa_p + \varkappa_s) \sigma}$.

Wenn daher $\varkappa_p < \varkappa_s$ (II. Typus, Kordiorit, Epidot), so ist $J_1 > J_2$, d. h. ein dunkles Büschel liegt senkrecht zur Ebene der optischen Achsen, dasselbe wird aber durch ein helles Achsenbild durchbrochen. — Ist aber $\varkappa_p > \varkappa_s$ (I. Typus, Andalusit, Titanit), so ist $J_2 > J_1$. Dann liegt ein buntes Büschel in der Ebene der optischen Achsen und dasselbe setzt sich durch die Achse selbst hindurch fort.

2. $\alpha = \pi/_2$: $J = E^2 \left\{ sin^2 \frac{1}{2} \psi \, e^{-2\varkappa_1 \sigma} + cos^2 \frac{1}{2} \psi \, e^{-2\varkappa_2 \sigma} \right\}$,

$$J' = E^2 \cdot e^{-2\varkappa_s \sigma}.$$

Für $\psi = 0, \pi$ ist $J = J_1 = E^2 \cdot e^{-2\varkappa_s \sigma}$,
für $\psi = \pm \pi/_2$ ist $J = J_2 = E^2 \cdot e^{-(\varkappa_p + \varkappa_s) \sigma}$.

Wenn daher $\varkappa_p < \varkappa_s$, so ist $J_1 < J_2$, d. h. ein dunkles Büschel liegt in der Achsenebene und setzt sich durch die Achse fort. — Ist aber $\varkappa_p > \varkappa_s$, so ist $J_1 > J_2$, d. h. ein dunkles Büschel liegt senkrecht zur Ebene der optischen Achsen; dasselbe wird aber durch ein helles Achsenbild durchbrochen.

Wird sowohl Analysator als Kompensator fortgelassen, d. h. betrachten wir eine senkrecht zu einer optischen Achse geschnittene Platte eines zweiachsigen, pleochroitischen Kristalls im durchgehenden natürlichen Lichte, so erhält man

$$J = E^2 (e^{-2\varkappa_1 \sigma} + e^{-2\varkappa_2 \sigma}), \tag{59}$$

für die optische Achse selbst:

$$J' = E^2 (e^{-2\varkappa_p \sigma} + e^{-2\varkappa_s \sigma}). \tag{60}$$

Denn wir können das natürliche Licht auffassen als zwei nach beliebigen aufeinander senkrechten Richtungen schwingende Komponenten gleicher Amplitude, welche inkohärent sind. In (60) bedeutet daher $2E^2$ die Intensität des einfallenden Lichtes. Da wir nun schon oben S. 358 [Formel (54)] konstatiert haben, daß der Ausdruck (59) ein Minimum wird für $\psi = \pm \pi/2$, so erblickt man ein senkrecht zur Achsenebene verlaufendes dunkles Büschel, welches durch ein helleres Achsenbild durchbrochen wird. Diese im natürlichen Licht auftretenden Achsenbilder sind schon 1819 von Brewster beobachtet worden. Man kann sie leicht wahrnehmen am Andalusit und Epidot.[1])

6. Interferenzerscheinungen in absorbierenden einachsigen Kristallen. Die Kristallplatte sei senkrecht zur optischen Achse geschnitten.

1) Gekreuzte Nicols. Die Schwingungsebene des Polarisators mache den Winkel φ mit der Verbindungslinie AM der optischen Achse A und einem Punkte M des Gesichtsfeldes in einem

1) Der Inhalt dieses und des folgenden Paragraphen ist der Arbeit von W. Voigt (Wied. Ann. 23, S. 577, 1884) entnommen. Betreffs weiterer Ausführung der Eigenschaften pleochroitischer Kristalle und der Erklärung der um die optischen Achsen auftretenden idiophanen Ringe, welche bei Anwendung eines Polarisators allein oder auch im natürlichen Licht sichtbar werden, vgl. die oben zitierte Arbeit von W. Voigt, Ann. d. Phys. 9, S. 367, 1902, deren Resultate auch in Pockels, Lehrb. d. Krist. Optik, S. 389 u. ff. dargestellt sind (auch teilweise kurz referiert in Winkelmanns Hdb. d. Physik, Optik, 2. Aufl., S. 1292). — In einer neueren Arbeit (Ann. d. Phys. 20, S. 108, 1906) behandelt W. Voigt die innere konische Refraktion bei pleochroitischen Kristallen und gelangt durch die theoretische Diskusion zu neuen Erscheinungen, die er zum Teil auch experimentell bestätigen konnte. Siehe auch W. Voigt, Ann. d. Phys. 27, 1002, 1023, 1908.

Polarisationsapperate für konvergentes Licht. Dann ist AM die Schwingungsrichtung H der außerordentlichen Welle, diese hat also, nach dem Austritt aus dem Kristall die Amplitude $E \cos\varphi\, e^{-\varkappa_e \sigma}$ nach dem Austritt aus dem Analysator die Amplitude $E \cos\varphi \sin\varphi\, e^{-\varkappa_e \sigma}$, Die ordentliche Welle hat nach dem Austritt aus der Kristallplatte die Amplitude $E \sin\varphi\, e^{-\varkappa_0 \sigma}$, aus dem Analysator $-E \sin\varphi \cos\varphi\, e^{-\varkappa_0 \sigma}$. Daher ist die aus dem Analysator austretende Lichtintensität:

$$(62) \qquad J = \frac{E^2 \sin^2 2\varphi}{4} \left\{ e^{-2\varkappa_0 \sigma} + e^{-2\varkappa_e \sigma} - 2 \cos\delta\, e^{-(\varkappa_0 + \varkappa_e)\sigma} \right\}.$$

In der optischen Achse ist $\varkappa_0 = \varkappa_e$, $\delta = 0$, daher

$$(62) \qquad J' = 0.$$

Es ergeben sich Interferenzringe, die aber vorschwinden, wenn die Kristallplatte genügende Dicke hat, so daß die Absorption genügend zur Wirkung kommt. Das Gesichtsfeld ist vom dunkeln Kreuz $\varphi = 0$, $\pi/_2$ durchzogen, dessen Balken parallel den Schwingungsrichtungen des Analysators und Kompensators liegen. Außerhalb dieses Kreuzes ist das Gesichtsfeld hell bei denjenigen Kristallen, für welche a'^2 sehr klein (vgl. (49) auf S. 356), aber c'^2 bedeutend ist (I. Typus, Magnesiumplatinzyanür), d. h. bei denen die Absorption in Richtung der optischen Achse klein ist. Dagegen ist bei den Kristallen des II. Typus (Turmalin), bei denen a'^2 groß und c'^2 klein ist, das Gesichtsfeld überall dunkel.

2. Analysator oder Polarisator allein vorhanden. Beide Fälle ergeben dasselbe. Ist nur der Polarisator vorhanden, und macht seine Schwingungsebene den Winkel φ mit der Richtung AM, so ist die Intensität der außerordentlichen Welle $E^2 \cos^2\varphi\, e^{-2\varkappa_e \sigma}$, die der ordentlichen $E^2 \sin^2\varphi\, e^{-2\varkappa_0 \sigma}$. Daher

$$(63) \qquad J = E^2 (\sin^2\varphi\, e^{-2\varkappa_0 \sigma} + \cos^2\varphi\, e^{-2\varkappa_e \sigma}).$$

In der optischen Achse ist $\varkappa_0 = \varkappa_e$, d. h.

$$(64) \qquad J = E^2 e^{-2\varkappa_0 \sigma}.$$

Bei Kristallen des ersten Typus ($\varkappa_0 < \varkappa_e$) ergibt sich daher dunkles Büschel bei $\varphi = 0$, π, d. h. parallel zur Schwingungs-

richtung, also senkrecht zur Polarisationsebene des Polarisators. Das dunkle Büschel wird durch ein helles Achsenbild durchbrochen. — Bei Kristallen des zweiten Typus ($\varkappa_o > \varkappa_e$) ergibt sich ein dunkles Büschel bei $\varphi = \pm \pi/_2$, d. h. es liegt parallel zur Polarisationsebene des Polarisators. Das dunkle Büschel geht durch die Achse selbst hindurch.

3) Durchgehendes natürliches Licht. Die Intensität der ordentlichen Welle ist $E^2 \cdot e^{-2\varkappa_o \sigma}$, die der senkrecht dazu schwingenden außerordentlichen Welle ist $E^2 \cdot e^{-2\varkappa_e \sigma}$, daher

$$J = E^2 (e^{-2\varkappa_o \sigma} + e^{-2\varkappa_e \sigma}). \tag{65}$$

In der optischen Achse selber ist $\varkappa_o = \varkappa_e$, d. h.

$$J' = 2\, E^2\, e^{-2\varkappa_o \sigma}. \tag{66}$$

$2E^2$ bedeutet die Intensität des einfallenden natürlichen Lichtes. — In Kristallen des ersten Typus erscheint ein heller Achsenfleck mit dunkler Umgebung, in Kristallen des zweiten Typus ein dunkler Achsenfleck mit heller Umgebung.

Kapitel V.

Die Dispersion der Körper.

1. Theoretische Grundlage. Man gelangt zu einer die beobachteten Erscheinungen gut darstellenden Theorie, wenn man die Annahme einführt, daß die kleinsten, elektrisch geladenen Teile eines Körpers die Möglichkeit zu Eigenschwingungen besitzen. Diese werden, je nachdem ihre Periode näher oder ferner liegt, zur Periode der von außen auftreffenden Lichtschwingungen

mehr oder weniger stark angeregt.[1]) Solche durch eine Lichtwelle, d. h. eine oszillierende elektrische Kraft angeregten Schwingungen sind ohne weiteres verständlich, wenn man die durch die Elektrolyse notwendig gemachte Vorstellung verallgemeinert, daß jedes Molekül eines Körpers aus positiv und negativ geladenen Atomen oder Atomgruppen, den sogenannten Ionen, besteht. Diese Ionen sind im allgemeinen nicht als identisch anzunehmen mit den durch Elektrolyse erhaltenen Ionen, und daher werden sie zweckmäßig durch ein anderes Wort, z. B. Elektronen, bezeichnet. Da aber mit diesem Wort in neuerer Zeit eine ganz besimmte Art von Ionen bezeichnet wird, so soll hier zunächst noch das allgemeinere Wort „Ionen" gebraucht werden, um als „Elektronen" die bestimmte Art von Ionen zu charakterisieren, von der weiter unten die Rede ist.

Bei einem Leiter sind die Ionen frei beweglich, bei einem Isolator haben dieselben aber gewisse Gleichgewichtslagen, um die sie schwingen können. Die Summe der Ladungen der positiven und negativen Ionen muß in jedem Volumelement Null sein, da an keiner Stelle eines nicht von außen geladenen Körpers freie Elektrität auftritt.

Fassen wir zunächst nur die positiven Ladungen ins Auge und bezeichnen mit e_1 die Ladung eines positiven Ions, mit m_1 seine ponderabele Masse, mit ξ_1 die Verschiebung desselben nach der x-Achse aus der Gleichgewichtslage, so muß die Bewegungs-

---

1) Der Gedanke, die Dispersionserscheinungen durch Eigenschwingungen kleiner Teile zu erklären, rührt wohl von Fresnel her und wurde durch Cauchy weiter entwickelt. Wie Lord Rayleigh gefunden hat (Phil. Mag. 48, p. 151, 1899), hat zuerst Maxwell im Cambr. Calendar f. 1869 (Math. Tripos Examen.) eine Theorie der anomalen Dispersion zu geben versucht. Seine Arbeit ist aber nicht weiter bekannt geworden und unabhängig von ihm haben dann Sellmeier, v. Helmholtz und Ketteler ihre Theorien der Dispersion aufgestellt. — Die molekularen Schwingungen kann man von verschiedenen Standpunkten aus rechtfertigen, auch von der mechanischen Lichttheorie aus. Vom elektrischen Standpunkt kann man Eigenschwingungen durch zwei verschiedene Betrachtungen einführen; die hier angestellten schließen sich der v. Helmholtzschen Auffassung an und ihrer von Reiff (Theorie molekularelektrischer Vorgänge, 1896) gegebenen Darstellung, welche auch für andere Gebiete eine interessante Durchführung dieser Vorstellungen enthält. Diese Auffassung hat den Vorzug größerer Anschaulichkeit vor der anderen, von Koláček (Wied. Ann. 32, S. 224, 1887) benutzten.

gleichung dieses Ions die Form besitzen, falls eine äußere elektrische Kraft der x-Komponente X wirkt[1]):

$$m_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = e_1 X - \frac{4\pi e_1^2}{\vartheta_1} \xi_1 - r_1 e_1^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t}. \tag{1}$$

Es ist nämlich $e_1 X$ die gesamte, von außen wirkende Kraft. Das zweite Glied der rechten Seite bezeichnet die (elastische) Kraft, welche durch die Verschiebung des Ions geweckt wird und dasselbe in die ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt. Der Faktor $e_1{}^2$ ist zugesetzt, um anzudeuten, daß das Vorzeichen dieser Kraft vom Vorzeichen der Ladung unabhängig ist. — Das dritte Glied der rechten Seite bezeichnet eine der Bewegung des Ions entgegenstehende Reibungskraft. Auch dieses Glied enthält den Faktor $e_1{}^2$, weil es vom Vorzeichen der Ladung unabhängig sein muß. m_1, ϑ_1, r_1 sind positive Konstanten. Die Bedeutung von ϑ_1 erkennt man, falls man die Gleichgewichtslage der Ionen unter Wirkung der Kraft X bestimmt. Wenn nämlich ξ_1 von der Zeit t unabhängig ist, so verschwindet in (1) die linke Seite und das Reibungsglied, und es folgt:

$$e_1 \xi_1 = \frac{\vartheta_1}{4\pi} X. \tag{2}$$

ϑ_1 gibt also die Leichtigkeit an, mit welcher die Ionen aus ihrer ursprünglichen Lage zu verschieben sind, d. h. sozusagen ist ϑ_1 proportional zu dem reziproken elastischen Widerstand (oder dem Elastitätskoeffizienten). — Für Leiter ist $\vartheta_1 = \infty$ zu setzen.

Eine ganz analoge Gleichung gilt für die negativ geladenen Ionen:

$$m_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = e_2 X - \frac{4\pi e_2^2}{\vartheta_2} \xi_2 - r_2 e_2^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t}. \tag{3}$$

Auch hier sind m_2, ϑ_2, r_2, positiv, e_2 ist aber negativ.

Die elektrische Strömung nach der x-Achse besteht nun aus drei Bestandteilen. 1) Der Strömung, wie sie im freien Äther (ohne Vorhandensein ponderabler Moleküle) unter Einwirkung einer Kraft X besteht. Die Stromdichte (elektrostatisch gemessen) hat nach (13) auf S. 255 den Wert:

$$(j_x)_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}. \tag{4}$$

---

1) Alle Größen (e_1, X) sollen in elektrostatischem Maße gemessen sein. Die Gleichung (1) würde auch gelten, wenn das Ion gar keine Masse m_1 besitzt, aber wenn die Selbstinduktion bei seiner Bewegung zu berücksichtigen ist.

2) Der Strömung durch die Verschiebung der positiven Ladungen. Hat die Verschiebung während des Zeitelementes dt den Wert $d\xi_1$ und bezeichnet $\mathfrak{N}'$ die Anzahl positiver Ionen, welche auf der Längeneinheit, $\mathfrak{N}''$ die Anzahl positiver Ionen, welche auf der Querschnittseinheit vorhanden sind, so tritt durch die Querschnittseinheit während dt die Ladungsmenge

$$e_1 \mathfrak{N}'' \cdot d\xi_1 \mathfrak{N}' = e_1 \mathfrak{N}_1 d\xi_1 ,$$

wobei $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{N}''$ die in der Volumeinheit vorhandene Ionenzahl der Gattung 1 bezeichnet. In der Zeiteinheit tritt also durch die Querschnittseinheit die Elektrizitätsmenge:

$$(5) \qquad (j_x)_1 = e_1 \mathfrak{N}_1 \frac{d\xi_1}{dt} = e_1 \mathfrak{N}_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial t},$$

wobei $\frac{\partial \xi_1}{\partial t}$ als Differentialquotient nach der Zeit aufzufassen ist. $(j_x)_1$ bezeichnet die Stromdichte, welche durch die Bewegung der Ionen der Gattung 1 hervorgerufen wird.

3) Der Strömung durch die Verschiebung der negativen Ladungen. Dieselbe schreibt sich analog

$$(j_{x2}) = e_2 \mathfrak{N}_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t}, \qquad (6)$$

denn eine Verschiebung einer negativen Ladung nach der negativen x-Achse ergibt einen nach der positiven x-Achse gerichteten Strom.

Die gesamte Stromdichte nach der x-Achse ist also

$$(7) \qquad j_x = (j_x)_0 + (j_x)_1 + (j_x)_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(e_1 \mathfrak{N}_1 \xi_1 + e_2 \mathfrak{N}_2 \xi_2).$$

Analog lauten die Stromkomponenten nach der y- und z-Achse.

Weil jedes abgrenzbare Volumen keine freie Ladung hat, muß die Beziehung erfüllt sein:

$$(8) \qquad e_1 \mathfrak{N}_1 + e_2 \mathfrak{N}_2 = 0 .$$

Wir halten nun, wie immer, an den Grundgleichungen (7) und (11) (S. 252, 254) der Maxwellschen Theorie fest und setzen die Magnetisierungskonstante $\mu = 1$, so daß $4\pi s_x = \partial\alpha/\partial t$ usw. wird. Wir haben dann in jenen Grundgleichungen, sowie (1), (3) und (7) die theoretische Grundlage für alle Dispersionserscheinungen.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (1) und (3) läßt sich nun sofort hinschreiben, wenn man X als periodische Funktion der Zeit annimmt. Es wird dann nämlich ξ_1 und ξ_2 proportional der gleichen periodischen Funktion der Zeit, vermehrt um einen gewissen Bestandteil, der die Eigenschwingungen der Ionen, die nach (1) und (3) für $X=0$ stattfinden, darstellt. Diesen Bestandteil kann man aber bei Betrachtung stationärer Zustände ignorieren, da er wegen der Reibungswiderstände r_1, r_2 im Laufe der Zeit gedämpft wird. Wir können aber setzen

$$\xi_1 = A_1 \cdot e^{i\frac{t}{\tau}}, \quad \xi_2 = A_2 \cdot e^{i\frac{t}{\tau}}, \tag{9}$$

$$\tau = T : 2\pi, \tag{10}$$

wobei A_1 und A_2 noch unbestimmte Funktionen des Ortes sind, die aber die Zeit nicht mehr enthalten, während T die Periode der von außen eindringenden Kraft, d. h. der Lichtschwingungen, ist. Eigentlich haben ξ_1 und ξ_2 nur die Bedeutung der reellen Teile der in (9) hingeschriebenen komplexen Größen, indes können wir sie jenen komplexen Größen zunächst selbst gleichsetzen und am Schluß der Rechnung wieder zur physikalischen Bedeutung, d. h. zu den reellen Teilen, übergehen. Dadurch werden die Rechnungen bedeutend vereinfacht.

Es ist nun nach (9):

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{i}{t} \xi_1, \quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\tau^2} \xi_1. \tag{11}$$

Daher kann man (1) schreiben als:

$$e_1 \xi_1 \left(1 + \frac{i}{\tau} \frac{r_1 \vartheta_1}{4\pi} - \frac{1}{\tau^2} \frac{m_1 \vartheta_1}{4\pi e_{12}}\right) = \frac{\vartheta_1}{4\pi} X,$$

oder für

$$a_1 = \frac{r_1 \vartheta_1}{4\pi}, \quad b_1 = \frac{m_1 \vartheta_1}{4\pi e_1{}^2} \tag{12}$$

folgt

$$e_1 \xi_1 = \frac{1}{4\pi} X \frac{\vartheta_1}{1 + \frac{i}{\tau} a_1 - \frac{b_1}{\tau^2}}. \tag{13}$$

Analog ergibt sich $e_2 \xi_2$ durch Vertauschung des Index 1 mit dem Index 2. Wir haben daher nach (7):

$$(14) \qquad j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1 + \frac{\vartheta_1 \mathfrak{N}_1}{1 + \frac{i}{\tau} a_1 - \frac{b_1}{\tau_2}} + \frac{\vartheta_2 \mathfrak{N}_2}{1 + \frac{i}{\tau} a_2 - \frac{b_2}{\tau_2}}\right\}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der früheren Formel (17) der S. 256 $j_x = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$, so erkennt man, daß an Stelle der Dielektrizitätskonstanten ε die komplexe, von der Schwingungsperiode $T = \tau \cdot 2\pi$ abhängige Größe tritt:

$$(15) \qquad \varepsilon' = 1 + \sum_h \frac{\vartheta_h'}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$(15') \qquad \vartheta_h' = \vartheta_h \mathfrak{N}_h .$$

Die Σ ist über die einzelnen, schwingungsfähigen Ionen zu erstrecken. Man kann eventuell mehr als zwei Gattungen derselben annehmen. Dieselben sind hier (bei den schnellen Wechselzahlen, welche die Lichtschwingungen besitzen, und in Isolatoren) nicht identisch anzunehmen mit den bei der Elektrolyse gefundenen Ionengattungen.

Die in (15) auftretenden Konstanten können wir noch anschaulicher interpretieren. Für sehr langsame Perioden, wie sie bei langsamen elektrischen Schwingungen (oder elektrostatischen Versuchen) eintreten, ist, falls man $\tau = \infty$ setzt, nach (15)

$$(16) \qquad \varepsilon = \varepsilon'_\infty = 1 + \Sigma\vartheta_h' .$$

ε hat die Bedeutung der bei solchen Versuchen maßgebenden Dielektrizitätskonstante. ϑ_h' kann nach Gleichung (2) und (13) die Dielektrizitätskonstante der h'ten Ionengattung genannt werden. Die resultierende Dielektrizitätskonstante ist also die Summe der Dielektrizitätskonstanten des Äthers und aller Ionengattungen.

Ferner hängt die Konstante b_h mit der Eigenschwingungsdauer T_h zusammen, welche die h'te Ionengattung besitzen würde, falls ihr Reibungskoeffizient a_h vernachlässigt würde. Für diesen Fall ($X = o$, $a_h = r_h = o$) folgt nämlich aus (1) und (11)

$$b_h = \tau_h^2, \quad \tau_h = T_h : 2\pi. \tag{17}$$

Nun haben wir oben S. 342 gesehen, daß eine komplexe Dielektrizitätskonstante Lichtabsorption bedingt. Nennen wir n den Brechungsindex, $\varkappa$ den Absorptionsindex, so ist nach den dortigen Entwicklungen [vgl. die dortige Formel (11)] und der hier abgeleiteten Formel (15):

$$\varepsilon' = n^2(1 - i\varkappa)^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta_h'}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{\tau_h^2}{\tau^2}}. \tag{18}$$

Aus dieser Formel kann man durch Trennung der reellen und imaginären Bestandteile zwei Relationen ableiten, aus denen man n und $\varkappa$ berechnen kann.[1])

2. Vervollständigung der Theorie. Die bisherigen Betrachtungen sind der Ausgangspunkt für die Dispersionstheorie in der einfachsten Form, sie sind aber nicht ganz streng. Durch Gleichung (4) ist X definiert als die elektrische Feldstärke im Äther, während man in Gleichung (1) unter X die Kraft zu verstehen hat, welche das Ion in Bewegung setzt. Beide Begriffe sind aber im allgemeinen nicht identisch, und darauf nehmen die Dispersionstheorien von Helmholtz[2]), Lorentz[3]) und Planck[4]) Rücksicht. — Die Feldstärke im Äther nimmt ganz verschiedene sehr große positive oder negative Werte an, wenn man sich einem Ion stark annähert; im Mittel ist die Feldstärke offenbar gleich dem Werte in einem symmetrisch zu den Ionen zwischen ihnen liegenden

1) Daß die obige Drudesche Theorie nur angenäherte Gültigkeit hat, folgt aus einer Untersuchung von Rubens und Hertz, Berl. Ber. 1912, S. 256. Übrigens ist sich Drude dieser Tatsache klar bewußt gewesen (vgl. hierzu 2. Vervollständigung der Theorie), s. oben und S. 368 der 2. Aufl.). Neuerdings hat Sommerfeld die Dispersion, die ein vorn und hinten abgehackter Wellenzug erfährt, diskutiert (Festschrift f. Heinrich Weber, Verlag Teubner, 1912). Es wäre sehr erwünscht, wenn auch die Dispersion einer Folge von abgehackten Wellenzügen untersucht würde, da vermutlich der zweite Wellenzug ganz anders als der erste im dispergierenden Medium fortgepflanzt wird, so daß, falls $n < 1$, Signalgeschwindigkeiten größer als die Lichtgeschwindigkeit c auftreten sollten. Etwas derartiges vermutete bereits W. Wien (vgl. Sommerfeld l. c.).

2) H. v. Helmholtz, Berl. Ber. 1892, S. 1093.

3) H. A. Lorentz, La théorie elektromagn. de Maxwell, Leide, 1892.

4) M. Planck, Berl. Ber. 1902, S. 470; 1903, S. 480; 1904, S. 740; 1905, S. 382.

Punkte P, der von allen Ionen möglichst gleich weit entfernt ist. Unter X in Gleichung (4) ist nun dieser Mittelwert zu verstehen Dieser Mittelwert wird durch die Ionenladungen nicht beeinflußt, da ihre Wirkungen sich wegen der symmetrischen Lage von P in P aufheben müssen. — Die erregende Kraft, welche auf ein Ion wirkt, ist nun die am Orte des Ions bestehende Kraft, wenn man sich dort die Ladung des Ions fortdenkt. Denn das Ion kann sich nicht durch eine innere, von ihm selbst herrührende Kraft in Bewegung setzen, sondern nur durch Kräfte, die aus seiner Umgebung herrühren. Denken wir uns nun zunächst die Ionen in ihren Ruhelagen, so würde der Ort jedes Ions ein symmetrisch zu den anderan Ionen liegender Punkt sein, d. h. an ihm würden die Wirkungen der umgebenden Ionen sich aufheben und die erregende Kraft wäre in diesem Falle identisch mit dem Mittelwerte X der Feldstärke im Äther. Wenn nun nur eine Gattung von Ionen bestände, so würde auch für Ionen, die aus ihrer Ruhelage verschoben sind, die erregende Kraft identisch mit X bleiben, denn auch bei verschobenen Ionen liegt der Ort jedes Ions symmetrisch zu den anderen Ionen gleicher Gattung, da wir voraussetzen, daß die Lichtwellenlänge groß gegen den Ionen-Abstand ist, d. h. daß in der näheren Umgebung eines Ions alle Ionen gleicher Gattung sich um gleichviel verschieben. — Die Verhältnisse werden aber anders, wenn wir mehrere Ionen-Gattungen haben. Haben sich die Ionen e_1 um ξ_1, die Ionen e_2 um ξ_2 verschoben, so liegt der Ort eines Ions e_1 nicht mehr symmetrisch zu den Ionen e_2, sondern er ist um die Strecke $\xi_1 - \xi_2$ von seiner Gleichgewichtslage aus nach der positiven x-Achse relativ zu den Ionen der Gattung 2 verschoben; diese müssen also eine elektrische Kraft auf das Ion 1 äußern, welche proportional zu $-e_2 \mathfrak{N}_2 (\xi_1 - \xi_2)$ ist, falls die Verschiebung $\xi_1 - \xi_2$ genügend klein ist. Der Proportionalitätsfaktor ergibt sich nun (durch eine kompliziertere Rechnung[1]) zu $4\pi/3$, so daß die aus Ion e_1 erregende Kraft X' sich ergibt zu

$$X' = X - \frac{4\pi}{3} e_2 \mathfrak{N}_2 (\xi_1 - \xi_2).$$

1) Vgl. M. Planck, Berl. Ber. 1902, S. 484. Die dortigen Entwicklungen gebrauchen ein etwas anderes Bild, welches aber im Grunde auf das hier benutzte zurückgeführt werden kann. Zum Zweck möglichst elementarer Veranschaulichung und Kürzung ist hier von den Entwicklungen und dem Bilde bei Planck abgewichen worden.

Nun nimmt Planck nur eine Gattung beweglicher Ionen an, es ist also $\xi_2 = 0$ zu setzen, und wegen der Beziehung (8) kann man schreiben

$$X' = X + \frac{4\pi}{3} e_1 \mathfrak{N}_1 \xi_1 .$$

Setzt man diesen Wert X' in der Bewegungsgleichung (1) anstatt des dort gebrauchten X ein, so entsteht

$$m_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = e_1 X - 4\pi e_1{}^2 \xi_1 \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{\mathfrak{N}_1}{3}\right) - r_1 e_1{}^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \tag{1'}$$

d. h. an Stelle von (13) tritt

$$e_1 \xi_1 = \frac{1}{4\pi} X \frac{\vartheta_1}{1 - \frac{1}{3} \mathfrak{N}_1 \vartheta_1 + \frac{i}{\tau} a_1 - \frac{b_1}{\tau^2}}, \tag{13'}$$

wobei die a_1 und b_1 ihre Bedeutungen nach (12) behalten haben. — An Stelle von (18) tritt also:

$$\varepsilon' = n^2 (1 - i\varkappa)^2 = 1 + \frac{\mathfrak{N}_1 \vartheta_1}{1 - \frac{1}{3} \mathfrak{N}_1 \vartheta_1 + \frac{i}{\tau} a_1 - \frac{b_1}{\tau_2}} . \tag{18'}$$

Wenn man in dieser Weise den Einfluß mehrerer beweglicher Ionen-Gattungen einführen wollte, so fallen die Formeln wesentlich komplizierter aus, besonders ist die Abhängigkeit des ε' von τ^2 eine formal andere und kompliziertere als nach Formel (18). Planck führt diese Erweiterung in seine Theorie nicht ein, und annähernd kann man ja auch zur Darstellung der optischen Eigenschaften mit nur einer beweglichen Ionengattung im allgemeinen auskommen, wenn nämlich die benutzten Schwingungsdauern nicht einer Eigenschwingungsdauer der Ionen zu nahe kommen und einer bestimmten Gruppe von Eigenschwingungsdauern (z. B. der im Ultravioletten liegenden) wesentlich näher liegen als den anderen. Dieser Fall tritt oft ein; man kann dann annähernd die Ionen mit ultravioletten Eigenschwingungen als eine einzige bewegliche Gattung mit einer gewissen mittleren Eigenwellenlänge zusammenfassen, dagegen die Ionen mit ultraroten Eigenschwingungen als unbeweglich ansehen. Für das ganze Bereich des Spektrums gilt aber diese Annäherung nicht, und es müßte die Theorie dann für mehrere bewegliche Ionengattungen durchgeführt werden.

Die Plancksche Theorie ist nun insofern noch von allen anderen Dispersionstheorien verschieden, als die Ursache für die dämpfende

Kraft, welche auf die Ionen wirkt, lediglich in ihren Strahlungsverlusten gesehen wird. Wenn nämlich ein Ion seine Geschwindigkeit verändert, so ist das gleichbedeutend mit einer Stromstärkeänderung. Diese muß aber immer eine elektromotorische Kraft (Selbstinduktion) im Äther hervorbringen, welche eine Energieausstrahlung bedeutet. Bei Durchführung dieser Betrachtung ergibt sich nach **Planck**[1]) nach einigen Transformationen die Beziehung

$$r_1 = \frac{2}{3c^3} \cdot \frac{4\pi^2}{T_h^2} = k \cdot \frac{2}{3c^3} \cdot \frac{4\pi e_1^2}{m_1 \vartheta_1},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet, d. h. $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm : sec ist, und T_h die nach (17) berechnete Eigenschwingungsdauer der Ionen.

Durch diese Annahme von **Planck** über die Ursache der Dämpfung ergeben sich im allgemeinen aber nur sehr kleine Absorptionsindizes $\varkappa$, so daß man bei merklich absorbierenden, z. B. auch gefärbten Körpern, wohl außer der Strahlungsdämpfung auch noch eine Reibungsdämpfung einführen muß.

Im folgenden soll wieder an die Entwicklungen des § 1 angeknüpft werden, da die strengere Theorie für mehrere bewegliche Elektronengattungen sehr kompliziert und noch nicht durchgeführt ist. Das Wesentliche ist auch durch Diskussion der angenäherten Theorie des § 1 zu erhalten. Nur bei einigen Punkten soll auch auf die strengere Theorie, speziell auf Formel (18′) zurückgegriffen werden.

Betreffs der genaueren Durchführung der Konsequenzen dieser Theorie vgl. die zitierten Arbeiten von **Planck**.

3. Normale Dispersion. Bei den durchsichtigen Körpern ist eine Absorption nicht zu bemerken. Man muß für diese Körper annehmen, daß die Reibungskoeffizienten a_h nur klein sind, so daß man den Betrag a_h/τ vernachlässigen kann gegen $1 - (\tau_h/\tau)^2$. Dieses ist offenbar immer nur gestattet, wenn die Periode T des Lichtes nicht nahe bei einer Eigenschwingung T_h der Ionen liegt, denn sonst würde $\tau_h/\tau = 1$ sein, und es würde Absorption aufteten, selbst wenn a_h nur klein ist. Die durchsichtigen Körper sind daher als solche aufzufassen, deren Eigenschwingungsdauern nicht mit den Perioden des sichtbaren Lichtes zusammenfallen, und deren Reibungskoeffizienten klein

1) M. **Planck**, Wied. Ann. **60**, S. 593, 1897.

sind. In diesem Falle wird bei Vernachlässigung von a_h/τ die rechte Seite von (18) reell, so daß $\varkappa = 0$ wird und der Brechungsindex den Wert annimmt:

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta_h'}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}. \tag{19}$$

Wenn die Eigenschwingungsdauern sich viel von den Perioden des Lichtes unterscheiden, so kann man für n^2 eine schnell konvergierende Reihenentwicklung benutzen. Es sind die Eigenschwingungsdauern im Ultravioletten τ_v zu unterscheiden von den Eigenschwingungsdauern im Ultraroten τ_r. Für erstere ist τ_v/τ ein kleiner Bruch, daher

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^2} = 1 + \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^4 + \text{usw.} \tag{20}$$

Für letztere ist τ/τ_r ein kleiner Bruch, daher:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\tau_r}{\tau}\right)^2} = -\frac{\tau^2}{\tau_r^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^2} = -\frac{\tau^2}{\tau_r^2}\left(1 + \left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^4 \cdots\right), \tag{21}$$

Benutzt man diese Reihenentwicklungen, und führt man an Stelle der τ die Perioden T selbst ein nach (10) und (17), so entsteht aus (19)

$$\begin{aligned} n^2 = 1 + \Sigma\vartheta_v' + \frac{\Sigma\vartheta_v' T_v^2}{T^2} + \frac{\Sigma\vartheta_v' T_v^4}{T^4} + \cdots \\ - T^2 \Sigma \frac{\vartheta_r'}{T_r^2} - T^4 \Sigma \frac{\vartheta_r'}{T_r^4} - \cdots \end{aligned} \tag{22}$$

Es hat sich nun in der Tat eine vierkonstantige Dispersionsformel:

$$n^2 = -A' T^2 + A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4} \tag{23}$$

mit positiven Koeffizienten A', A, B, C bisher den Beobachtungen über die Abhängigkeit des n von T bei durchsichtigen Körpern meist sehr gut angeschlossen. Wir erkennen in (23) die abgebrochenen Reihenentwicklungen von (22) und verstehen daher theoretisch, weshalb die Koeffizienten A', A, B, C positiv sein müssen

Zugleich ergibt sich, daß das von der Periode T freie Glied A der Dispersionsformel die physikalische Bedeutung hat:

$$A = 1 + \Sigma\vartheta_v' . \tag{24}$$

Da nach (16) die Dielektrizitätskonstante ε die Bedeutung hat

$$\varepsilon = 1 + \Sigma\vartheta_h' = 1 + \Sigma\vartheta_v' + \Sigma\vartheta_r' ,$$

so ergibt sich

$$\varepsilon - A = \Sigma\vartheta_r' , \tag{25}$$

d. h. die Differenz zwischen Dielektrizitätskonstante und dem von T freien Gliede der Dispersionsformel ist stets positiv und hat die Bedeutung der Summe der Dielektrizitätskonstanten der Ionen, deren Eigenschwingungen im Ultraroten liegen. Hierdurch werden also die oben S. 264 konstatierten Abweichungen der ursprünglichen Maxwellschen Theorie von der Erfahrung erklärt.

Eine solche Differenz zwischen ε und A muß also immer bestehen, wenn die Dispersion nicht durch die dreikonstantige Formel

$$n^2 = A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4} \tag{26}$$

darzustellen ist; denn der Koeffizient A' in der Formel (23) rührt gerade von den Ionen her, welche Eigenschwingungen im Ultraroten besitzen. Für diesen Satz bildet das Verhalten des Wassers eine glänzende Bestätigung. Denn unter allen durchsichtigen Körpern erreicht der Koeffizient A' der vierkonstantigen Dispersionsformel den größten Betrag an Wasser, und dies steht sowohl im Einklang damit, daß Wasser am meisten von allen Körpern Wärmestrahlen absorbiert, als damit, daß bei Wasser die Differenz zwischen ε und A am größten ist. — Unter der Annahme, daß nur ein einziges Absorptionsgebiet im Ultraroten liegt, kann man die Lage desselben aus A' und $\varepsilon - A$ berechnen. Denn es ist dann (22), (23) und (25):

$$A' = \frac{\vartheta_r'}{T_r^2}, \quad \varepsilon - A = \vartheta'_r, \quad \text{d. h. } T_r^2 = \frac{\varepsilon - A}{A'} . \tag{27}$$

Nach Ketteler ist nun für Wasser $A' = 0{,}0128 \cdot 10^8 \cdot c^2 sec^{-2}$, wobei $c = 3 \cdot 10^{10}$ ist. Ferner ist $\varepsilon - A = 77$. Hieraus berechnet

sich die dem ultraroten Absorptionsgebiet entsprechende Wellenlänge (in Luft oder Vakuum gemessen) zu

$$\lambda_r^2 = c^2 T_r = \frac{77}{0{,}0128} 10^{-8} = 60 \cdot 10^{-6},$$

d. h.

$$\lambda_r = 7{,}75 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0{,}08 \text{ mm}. \tag{28}$$

Diese Wellenlänge liegt nun in Tat weit im Ultraroten. Experimentelle Untersuchungen ergaben, daß das Wasser nicht nur ein Absorptionsgebiet im Ultraroten hat[1]), daß die Größenordnung der am stärksten absorbierten Wellenlängen aber in der Tat mit (28) übereinstimmt.[2])

Weitere quantitative Bestätigungen der Dispersionsformel (19) haben sich am Flintglas, Flußspat, Quarz, Steinsalz, Sylvin ergeben, indem man zur Untersuchung auch sehr langwellige Strahlen verwendete.[3]) Schreibt man (19) in der Form

$$n^2 = 1 + \Sigma \vartheta_h' + \Sigma \frac{\vartheta_h' \tau_h^2}{\tau^2 - \tau_h^2},$$

d. h. in der Form:

$$n^2 = b^2 + \Sigma \frac{M_h}{\lambda^2 - \lambda_h^2}, \tag{29}$$

so erkennt man, daß b^2 mit der Dielektrizitätskonstante ε identisch sein muß. Bei den genannten Körpern konnte man nun n^2 durch die Formel (29) in der Tat gut darstellen, z. B. bei Quarz (ordinärer Strahl) durch die Konstanten:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0{,}0106, & \lambda_1^2 &= 0{,}0106, \\ M_2 &= 44{,}224, & \lambda_2^2 &= 78{,}22, \\ M_3 &= 713{,}55, & \lambda_3^2 &= 430{,}56, & b^2 = 4{,}58. \end{aligned}$$

Es ist $\lambda_h = T_h \cdot c$ gesetzt, und Einheit von λ_h ist der tausendste Teil eines Millimeters (μ).[4]) Diese 7 Konstanten M_1, M_2, M_3, λ_1, λ_2, λ_3, b^2 müssen nach (29) die Relation erfüllen:

1) Vgl. F. Paschen, Wied. Ann. 53, S. 334, 1894.

2) Vgl. Rubens u. Aschkinaß, Wied. Ann. 65, S. 252, 1898.

3) Vgl. Rubens u. Nichols, Wied. Ann. 60, S. 418, 1897. — Paschen, Wied. Ann. 54, S. 672, 1895.

4) Wenn man M_h und λ_h^2 nach absolutem Maß, d. h. in cm ausdrücken will, so sind die hier gegebenen Zahlwerte mit 10^{-8} zu multiplizieren, da $1\mu = 10^{-4}$ cm ist.

(30) $$b^2 - 1 = \Sigma \vartheta_h' = \frac{M_1}{\lambda_1^2} + \frac{M_2}{\lambda_2^2} + \frac{M_3}{\lambda_3^2}.$$

Die rechte Seite hat hier den Zahlwert: 3,2; die linke Seite ist 3,6. Diese Differenz wird veranlaßt durch Molekülgattungen, deren Eigenperioden so weit im Ultravioletten liegen, daß man für sie $\tau_h = 0$ setzen kann.[1]) Nennt man die Summe ihrer Dielektrizitätskonstanten ϑ_o', so wird nach (29):

$$b^2 = 1 + \vartheta_o' + \Sigma \vartheta_h', \quad M_h = \vartheta_h' \cdot \lambda_h^2.$$

An Stelle von (30) tritt daher:

(30′) $$b^2 - 1 - \Sigma \frac{M_h}{\lambda_h^2} = \vartheta_o'.$$

Die Dielektrizitätskonstante des Quarzes hat sich nun zu $\varepsilon = 4{,}55$ bis 4,73 ergeben, was mit dem Wert b^2 sehr gut übereinstimmt.

Flußspat: $M_1 = 0{,}00612$, $\lambda_1^2 = 0{,}00888$,
$M_2 = 5099$, $\lambda_2^2 = 1258$,
$b^2 = 6{,}09$, $\varepsilon = 6{,}7$ bis $6{,}9$.

Auch hier ist (30) nicht genau erfüllt.)

Steinsalz: $M_1 = 0{,}018$, $\lambda_1^2 = 0{,}0162$,
$M_2 = 8977$, $\lambda_2^2 = 3149$,
$b^2 = 5{,}18$, $\varepsilon = 5{,}81$ bis $6{,}29$.

[(30) ist annähernd erfüllt. $\vartheta_o' = 0{,}18$.]

Sylvin: $M_1 = 0{,}0150$, $\lambda_1^2 = 0{,}0234$,
$M_2 = 10747$, $\lambda_2^2 = 4517$,
$b^2 = 4{,}55$, $\varepsilon = 4{,}94$.

Die Relation (30) ist nicht erfüllt. Es ist nach (30′) $\vartheta_o' = 0{,}53$.)

Der Schluß, daß die Differenz zwischen ε und A nach Formel (25) auf Eigenschwingungen und Absorption im Ultraroten deutet, läßt sich nicht umkehren, d. h. auch wenn die Dielektrizitätskonstante ε und das von der Periode freie Glied A der vierkonstantigen Dispersionsformel (23) übereinstimmen, brauchen Eigenschwingungen und Absorptionen im Ultraroten nicht ganz ausgeschlossen zu sein. Nach (25) wären nur die

1) Hiernach sollte also z. B. elektrisch hocherhitzter Quarz im Vakuum eine Lichtquelle für das äußerste Ultraviolett sein.

Dielektrizitätskonstanten ϑ_r' dieser Ionengattungen, deren Eigenschwingungen im Ultraroten liegen, sehr klein. Trotzdem kann aber merkliche Absorption für $\tau = \tau_r$ eintreten. Denn nach (18) tritt dann in ε' das Glied $\vartheta_r' : i \cdot a_r/\tau_r$ auf. Dieser Term hat nach (12) den Wert $-i\, 2T_r \mathfrak{N}_r : r_r$, wobei r_r den in (1) definierten Reibungswiderstand bedeutet. Der Wert dieses Gliedes bleibt also endlich, auch wenn ϑ_r sehr klein wird. So sehen wir in der Tat bei vielen Körpern, z. B. den Kohlenwasserstoffen, daß die Differenz zwischen ε und A sehr klein ist, und trotzdem sind diese Körper für Wärmestrahlen nicht vollständig absorptionsfrei.

Aus der Dispersionsformel (22) oder (23) folgt, daß n^2 beständig abnimmt, wenn T wächst. Dies kann man in der Tat bei allen durchsichtigen Körpern beobachten, es ist der normale Verlauf, daher bezeichnet man ihn als normale Dispersion.

4. Berechnung der Elektronenkonstanten aus der Dispersion. Beziehung der Elektronenzahl zur chemischen Valenz. Aus (29) und (15') [S. 368] folgt

$$M_h = \mathfrak{N}_h \vartheta_h \lambda_h^2,$$

aus (17), (10) und (12) folgt

$$\lambda_h^2 = \pi \frac{m_h \vartheta_h}{e_h^2} c^2,$$

daher

$$M_h : \lambda_h^4 = e_h^2 \mathfrak{N}_h : \pi m_h c^2. \tag{32}$$

Führt man die nach elektromagnetischem Maße gemessene Elektrizitätsmenge e' ein durch die Beziehung (vgl. oben S. 252)

$$e_h' = e_h : c, \tag{33}$$

so ergibt (32):

$$M_h : \lambda_h^4 = e_h'^2 \mathfrak{N}_h : \pi m_h. \tag{32'}$$

Nach der Planckschen Theorie folgt aus (18'), da gemäß unserer Annahme $\varkappa = o$ ist (vgl. S. 373 oben)

$$n^2 = 1 + \frac{\mathfrak{N}_1 \vartheta_1}{1 - \frac{1}{3}\mathfrak{N}_1 \vartheta_1 - b_1/\tau^2} = 1 + \frac{\mathfrak{N}_1 \vartheta_1}{1 - \frac{1}{3}\mathfrak{N}_1 \vartheta_1} + \frac{\mathfrak{N}_1 \vartheta_1 b_1 : (1 - \frac{1}{3}\mathfrak{N}_1 \vartheta_1)}{\tau^2 (1 - \frac{1}{3}\mathfrak{N}_1 \vartheta_1) - b_1},$$

daher haben (unter Berücksichtigung von (12) [S. 367]) nach dieser Theorie die Größen M_h und λ_h der Dispersionsformel (29) die Bedeutung:

$$M_h = \frac{\mathfrak{N}_1 \vartheta_1}{(1 - \frac{1}{3}\mathfrak{N}_1 \vartheta_1)^2} \cdot \frac{m_1 \vartheta_1}{e_1^2} \pi c^2, \qquad \lambda_h^2 = \pi \frac{m_1 \vartheta_1}{e_1^2} \frac{c^2}{1 - \frac{1}{3}\mathfrak{N}_1 \vartheta_1}. \tag{31'}$$

Also auch nach dieser Theorie gilt die Relation (32). Wenn man nun die experimentell gefundenen Zahlenwerte für M_h und λ_h einsetzt, so ergibt sich die linke Seite von (32) stets wesentlich kleiner für die ultraroten Eigenschwingungen, als für die ultravioletten Eigenschwingungen, z. B. ist für Flußspat, wenn man $M_h : \lambda_h^4$ in absolutem Maß (nach cm) ausdrückt, d. h. die im Text hier gegebenen Werte von M_h und λ_h^2 mit 10^{-8} multipliziert (vgl. Anm. 4 der S. 375):

$$\frac{M_r}{\lambda_r^4} = 3{,}23 \cdot 10^5, \quad \frac{M_v}{\lambda_v^4} = 0{,}778 \cdot 10^{10}.$$

Setzt man nun in Gleichung (8) S. 366, welche ausdrückt, daß keine freie elektrische Ladung auftritt, den aus (32) folgenden Wert für $e_h \mathfrak{N}_h$ ein, so folgt

$$\sum \frac{M_h}{\lambda_h^4} \cdot \frac{m_h}{e_h} = \frac{M_r}{\lambda_r^4} \cdot \frac{m_r}{e_r} + \frac{M_v}{\lambda_v^4} \cdot \frac{m_v}{e_v} = 0.$$

Daher muß beim Flußspat, wie überhaupt bei allen Körpern, bei denen Quotienten $M_h : \lambda_h^4$ von zweierlei verschiedener Größenordnung gleichzeitig auftreten, auch bei den Ionengattungen $e_h : m_h$ zweierlei verschiedene Größenordnung besitzen. Da nun bei allen Körpern $M_v : \lambda_v^4$ viel größer als $M_r : \lambda_r^4$ ist, so muß bei den ultravioletten Eigenschwingungen (Index v) e/m viel größer sein, als bei den ultraroten Eigenschwingungen (Index r). Das Verhältnis beider e/m ergibt sich aus Obigem für Flußspat zu $2 \cdot 10^4$.

Nun hat man in der Tat schon auf anderen Gebieten Quotienten $e : m$ von zweierlei verschiedener Größenordnung gefunden, nämlich bei der Elektrolyse, bei der die Ladung e an ponderable Masse geknüpft ist, und bei den Kathodenstrahlen, bei denen eine negative Ladung an die Teilchen der Kathodenstrahlen gebunden ist. Für erstere ergibt sich z. B. für Wasserstoff[1]) (aus dem elektrochemischen Äquivalent) $e' : m = 0{,}965 \cdot 10^4$, für letztere (aus der magnetischen Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen[2])) $e' : m = 1{,}77 \cdot 10^7$. Man nimmt nun in neuerer Zeit an, daß die Kathoden-

1) Für diesen hat $e' : m$ noch den größten Wert unter allen Elementen, da Wasserstoff das kleinste Atomgewicht hat.

2) Nach Classen, Jahrb. d. Hamburger wiss. Anstalten, Heft 25, 1907. — Nach anderen Beobachtern ist $e' : m$ zum Teil etwas kleiner, aber meist größer als $1 \cdot 10^7$. Vgl. dazu J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen. Deutsch von Marx, Leizig, 1905. S. 117.

strahlen aus dem negativen Elementarquantum der Elektrizität ohne ponderable Masse bestehen (sogenannte freie Elektronen), und daß ihre Masse m nur eine scheinbare, durch Selbstinduktion hervorgerufen sei. Es muß nämlich ein bewegtes Elektron, da es einen elektrischen Strom durch seine Bewegung erzeugt, auch ein magnetisches Feld erzeugen, d. h. elektrische Trägheit bei Geschwindigkeitsänderungen besitzen, die man Selbstinduktion nennt. Diese freien Elektronen findet man noch in mehreren anderen Gebieten, z. B. in den photoelektrischen Effekten, in den β-Strahlen des Radiums, beim Zeemanneffekt, der unten im Kapitel VII besprochen wird. In allen diesen Fällen ergibt sich ein annähernd konstantes Verhältnis $e:m$, während für die mit ponderabler Masse behafteten Ionen $e:m$ je nach dem Träger, d. h. der Masse m, verschieden und stets viel kleiner ist als bei den freien negativen Elektronen; das Verhältnis beider $e:m$, bezogen auf Wasserstoff, ist rund $2 \cdot 10^3$, wie aus obigen Zahlen folgt.

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem auf S. 378, so liegt der Schluß nahe, daß die ultravioletten Eigenschwingungen den freien negativen Elektronen (mit konstantem für sie charakteristischen Verhältnis $e'/m = 1{,}77 \cdot 10^7$) zugehören, daß dagegen die ultraroten Eigenschwingungen hervorgebracht werden durch Schwingungen des ganzen positiv geladenen Moleküls oder eines Teiles desselben. Diese Anschauung kann man in der Tat weiter durchführen und erhält dabei gewisse Bestätigungen durch den chemischen Aufbau des Moleküls.[1])

Nennen wir nämlich p_h die Anzahl Ionen bzw. Elektronen der h-ten Gattung, die pro Molekül vorhanden sind, M das Molekulargewicht, d die Dichte der Substanz, H die absolute Masse eines Atoms Wasserstoff, so ist

$$d = \frac{\mathfrak{N}_h}{p_h} H M, \tag{33}$$

daher nach (32'):

$$p_h \frac{e_h'}{m_h} \cdot \frac{e_h'}{H} = \pi \frac{M}{d} \cdot \frac{M_h}{\lambda_h^4}. \tag{34}$$

1) Hier soll nur der Ausgangspunkt mitgeteilt werden. Betreffs weiterer Ausführung vgl. P. Drude, Ann. d. Phys. 14, S. 667, 936, 1904. — S. ferner Haber, Verhandl. D. Phys. Ges. 13, S. 1117, 1911 und weitere, daselbst behandelte Literatur. E. Malelung (Phys. Ztschr. 11, S. 898, 1911) zeigt, daß die ultraroten Eigenfrequenzen vermutlich aus den elastischen Eigenschaften herzuleiten sind.

Für die ultravioletten Eigenschwingungen ist nun nach unserer Annahme e_h' gleich dem Elementarquantum e' der Elektrizität, für $e_h' : H$ ist daher der aus der Elektrolyse gewonnene Wert $e' : m = 0{,}965 \cdot 10^4$ zu benuten. Setzt man ferner für $e_h' : m_h$ in (34) den aus den Kathodenstrahlen gefundenen Wert $1{,}77 \cdot 10^7$ ein, so ergibt sich nach (34) aus den ultravioletten Eigenschwingungen die Zahl p_v der pro Atom vorhandenen, bei den Lichtschwingungen in Bewegung gesetzten Elektronen:

$$p_v = 1{,}84 \cdot 10^{-11} \frac{M}{d} \cdot \frac{M_v}{\lambda_v^4}.$$

Da nun z. B. beim Flußspat $M = 78$, $d = 3{,}18$, $M_v : \lambda_v^4 = 0{,}778 \cdot 10^{10}$ ist (vgl. oben), so folgt für ihn $p = 3{,}5$. Man sollte eine ganze Zahl für p_v erwarten, indes ist zu berücksichtigen, daß die Werte von M_v und λ_v, welche aus der Dispersionskurve des Flußspats nur durch eine Art Extrapolation gewonnen werden, nicht ganz zuverlässig sind, da man nur mit Lichtwellen beobachtet hat, welche größer als die ultravioletten Eigenwellenlängen waren. Jedenfalls kann man sagen, daß p_v ungefähr $= 4$ ist, also gleich der Summe der im Flußspatmolekül vorhandenen chemischen Valenzen. Es ist nun sehr bemerkenswert, daß sich bei allen Substanzen für p_v Zahlen[1]) ergeben, welche von der Größenordnung der im Molekül vorhandenen Valenzsumme sind und mit dieser bei homologen Verbindungen wachsen bzw. abnehmen. Dies wird nun verständlich durch folgende Anschauung:

Ein einwertiges Atom von elektropositivem Charakter bezeichnet ein solches, welchem ein negatives Elementarquantum durch ein anderes Atom von elektronegativem Charakter entzogen werden kann, ein zweiwertiges ein solches, dem zwei Elementarquanta entzogen werden können usw. Durch die Valenz wird also bei den elektropositiven Atomen die Anzahl der verhältnismäßig lose an das Atom geketteten negativen Elektronen bezeichnet; außerdem gibt es im Atom noch sehr viele andere, aber fester gebundene Elektronen.[2])

Die Eigenschwingungsdauer T_h eines Elektrons muß nun um

1) Siehe Erfle, Ann. d. Phys. **24**, S. 672, 1907.

2) Dies kann man schließen wegen der Kompliziertheit der Emissionsspektren. — Der Einfluß dieser Elektronen ist auch gekennzeichnet durch die Größe ϑ_0' (30').

so größer sein, je loser es an das Atom gekettet ist, und daher muß die Valenzzahl (bei elektropositiven Atomen) gleich der Elektronenzahl sein, welche die größte (im Ultravioletten liegende) Eigenschwingungsdauer haben, falls diese bei allen lose gebundenen Elektronen im Atom die gleiche ist. Dies wird nun im allgemeinen nicht der Fall sein, und daher kann man im allgemeinen aus der Dispersion auch nur einen gewissen Grenzwert[1]) für die Zahl der beweglichen Elektronen erhalten. Das Wasserstoffmolekül dagegen enthält zwei Valenzen von elektropositivem Charakter, die wegen ihrer Gleichheit auch die gleiche Eigenschwingungsdauer haben werden, und in der Tat erhält man aus der Dispersion des Wasserstoffes[2]) mit der Annahme $p_v = 2$ für e_v'/m_v den Wert $1{,}5 . 10^7$, d. h. jedenfalls annähernd den bei Kathodenstrahlen gefundenen Wert.

Daß also oben beim Flußspat sich ebenfalls Übereinstimmung zwischen p_v und der Valenzzahl ergeben hat, ist von diesem Standpunkte exakt jedenfalls nicht notwendig, einmal wegen des komplizierteren Molekülbaues, der wahrscheinlich mehrere ultraviolette Eigenperioden enthält, andererseits wegen der Anwesenheit der zwei elektronegativen Atome Fluor. Über die Ausdehnung der Resultate auf diese komplizierteren Fälle, sowie über die Verwertung der ultraroten Eigenschwingungen vom Standpunkte der hier gegebenen Entwicklungen, speziell der Formel (34), vgl. die oben Anm. 2, S. 379 zitierte Arbeit von Drude.

5. Abhängigkeit dss Brechungsindex von der Dichte. Nach Formel (19) S. 373 folgt

$$n^2 - 1 = \sum \frac{\mathfrak{N}_h \vartheta_h}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}, \tag{35}$$

d. h. es müßte, da die Ionen bzw. Elektronenzahl $\mathfrak{N}_h$ proportional zur Dichte der Substanz ist, $n^2 - 1$ proportional zur Dichte sein. Nach der strengeren, in § 2 vervollständigten Theorie fällt dies Resultat anders aus, denn aus Formel (18') S. 371 folgt (bei unmerklicher Absorption):

---

1) Das Genauere hierüber vgl. in dem oben Anm. 2 S. 379 zitierten Aufsatz von Drude.

2) Auch bei Fortsetzung der Dispersion in das Gebiet der Reststrahlen hinein. Vgl. hierüber J. Koch, Ann. d. Phys. **17**, S. 668, 1905.

$$n^2 = 1 + \frac{\mathfrak{N}_1 \vartheta_1}{1 - \frac{1}{3}\mathfrak{N}_1\vartheta_1 - \frac{b_1}{\tau^2}}$$

daher

$$\frac{n^2+2}{n^2-1} = \frac{3}{\mathfrak{N}_1 \vartheta_1}(1 - b_1/\tau^2). \tag{35'}$$

Nun ist nach den vorliegenden Beobachtungen weder $n^2 - 1$ genau proportional zur Dichte, noch auch $n^2 + 2 : n^2 - 1$ genau umgekehrt proportional zur Dichte, indes ist letztere Relation (35') viel genauer erfüllt als erstere Relation (35). Dies zeigt sich besonders beim Wechsel des Aggregatzustandes, wie folgende Tabelle lehrt, die sich auf die D-Linie bezieht (d bezeichnet die Dichte der Substanz):

	Temperatur	$\frac{n^2-1}{d}$			$\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d}$		
		Dampf	Flüssigkeit	Diff.	Dampf	Flüssigkeit	Diff.
Wasser	10°	0,3101	0,3338	−0,0237	0,2068	0,2061	+0,0007
Schwefelkohlenstoff	10°	0,4347	0,4977	−0,0630	0,2898	0,2805	+0,0093
Chloroform	10°	0,2694	0,3000	−0,0306	0,1796	0,1790	+0,0006

Die annähernde Konstanz des Aggregates $(n^2 - 1 : n^2 + 2) \cdot {}^1\!/\!_d$ zeigt jedenfalls die Überlegenheit der strengeren Theorie des § 2 gegenüber dem einfacheren Ansatz des § 1. Daß $n^2 - 1 : n^2 + 2$ nicht genau der Dichte proportional ist, mag mindestens teilweise seinen Grund darin haben, daß nicht nur eine Gattung von schwingungsfähigen Elektronen mit ultravioletten Eigenschwingungen existiert, sondern daß tatsächlich bei allen drei Substanzen auch schwingungsfähige Ionen mit ultraroten Eigenschwingungen vorhanden sind. In diesen Fällen gilt aber die Formel (35') streng genommen nicht mehr, wenigstens wenn man nicht den Brechungsindex für sehr kleine Wellenlängen beobachtet, so daß die ultraroten Eigenschwingungen keinen Einfluß haben (vgl. dazu die Bemerkung oben S. 371).

6. Anomale Dispersion. Normale Dispersion des n^2 tritt allemal ein, wenn man die Untersuchung beschränkt auf ein Gebiet von Schwingungsperioden T, welches nicht durch eine Eigenschwingungsperiode des Körpers hindurchgeht. Sowie aber das

letztere eintritt, muß der normale Verlauf des n^2 gestört werden. Denn aus (19) folgt, daß für Perioden T, welche kleiner als eine Eigenperiode T_h ist, für welche also $1-(\tau_h/\tau)^2$ den negativen Wert $-\zeta$ hat, n^2 das große negative Glied: $-\vartheta_h':\zeta$ enthält, während für T, welche größer als T_h sind, $1-(\tau_h/\tau)^2$ den positiven Wert ζ' annimmt, daher n^2 das positive Glied $+\vartheta_h':\zeta'$ enthält. Wenn daher T beständig wächst, so nimmt n^2 im allgemeinen ab, beim Hindurchgehen durch ein Absorptionsgebiet aber zu. Im Absorptionsgebiet selbst ist die Formel (19) nicht zu gebrauchen, vielmehr ist dann n^2 und $\varkappa$ aus (18) mit Berücksichtigung von a_h zu berechnen. Jedenfalls müssen die Werte von n^2 kontinuierlich zusammenhängen. Man erhält daher den in Figur (102) dargestellten Verlauf des n^2 und des Absorptionsindex $\varkappa$. Letzterer ist bei kleinem a_h nur in unmittelbarer Nähe von T_h von Null verschieden, aber dann auch um so bedeutender, je kleiner a_h ist. Denn aus (18) folgt für $T=T_h$:

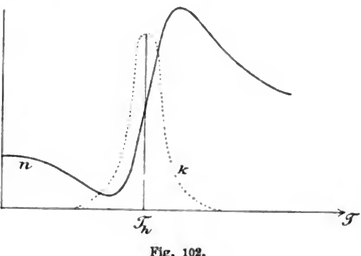


Fig. 102.

$$2n^2\varkappa = \frac{T}{2\pi}\frac{\vartheta_h'}{a_h} = \frac{2T\Re_h}{r_h}. \tag{36}$$

Je kleiner also a_h, d. h. r_h ist, um so schärfere und schmalere Absorptionsstreifen besitzt der Körper, während bei großem a_h die Absorption sich über größere Gebiete von Wellenlängen erstreckt, aber mit geringerer Intensität.

Der in Figur (102) angedeutete Gang der anomalen Dispersion wird nun in der Tat bei Körpern mit auswählender starker Absorption (z. B. Fuchsin) gut bestätigt.[1]) Die Gase und Metalldämpfe zeichnen sich durch sehr schmale und intensive Absorptions-

1) Vgl. Ketteler, theoret. Optik, Braunschweig, 1885, S. 548 ff. — Eine gute Bestätigung der Theorie auch im Absorptionsgebiete selbst hat Pflüger (Wied. Ann. 65, S. 173, 1898) am Cyanin erhalten.

streifen aus. Auch in der Nähe dieser schmalen Absorptionsstreifen tritt anomale Dispersion des n^2 auf.

Experimentell kann man das Vorhandensein anomaler Dispersion am einfachsten dadurch erkennen, daß ein Prisma des betreffenden Körpers von einer Lichtlinie ein Spektrum entwirft, in welchem die Farbenfolge nicht die normale ist. Die Erscheinung kann aber dadurch kompliziert werden, daß im Spektrum an mehreren Stellen zwei Farben aufeinander fallen können. Daher ist es übersichtlicher, wenn man die **Kundtsche** Methode der gekreuzten Prismen anwendet, indem ein durch ein Glasprisma mit vertikaler brechender Kante entworfenes normales, sehr schmales, horizontales Spektrum betrachtet wird durch ein Prisma der zu untersuchenden Substanz mit horizontaler brechender Kante.

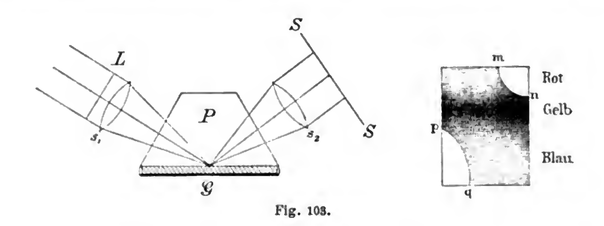


Fig. 103.

Es entsteht eine Lichtlinie, welche bei anomaler Dispersion aus Stücken in verschiedener Höhe besteht, welche durch dunkle Stellen, die den Absorptionsgebieten entsprechen, voneinander getrennt sind.

Ein Übelstand dieser Prismenmethoden ist es, daß bei starker Absorption nur Prismen von sehr kleinem brechendem Winkel benutzt werden können. Daher ist die Methode von **Mach** und **Arbes**[1]) günstig, welche die anomale Dispersion aus der Totalreflexion erschließt. Ein Fuchsinlösung wird in den horizontal liegenden Glastrog G gefüllt, und auf ihn das Flintglasprisma P gesetzt. Von der Lichtlinie L, die in einer Vertikalebene liegt, konzentriert die Sammellinse s_1 die Lichtstrahlen auf der Grenzfläche Glas-Fuchsinlösung. Die Linse s_2 sammelt die reflektierten Strahlen und entwirft ein reelles Bild von L auf dem Schirm S.

1) E. **Mach** und J. **Arbes**, Wied. Ann. 27, S. 436, 1886.

Dieses Bild wird aber vorher durch ein geeignet gestelltes Glasprisma in ein Spektrum verbreitert. Dasselbe zeigt dann die in der Figur dargestellte Helligkeitsverteilung, in der die Kurve $mnpq$ der Totalreflexion zu erkennen ist. Das Absetzen dieser Kurve zwischen n und p läßt auf einen Blick die anomale Dispersion erkennen. (Zwischen n und p liegt ein dunkler Streifen, da für die dort liegenden Farben der Brechungsindex des Flintglases gleich dem der Fuchsinlösung ist, sodaß überhaupt keine Reflexion eintritt.) Direkt im Gebiete maximaler Absorption kann man allerdings auch nach dieser Methode den Brechungsindex nicht immer bestimmen, denn in diesem Gebiete ist oft die partielle Reflexion wegen der hohen Absorption so groß (vgl. Metallreflexion), daß die partielle Reflexion kontinuierlich in die Totalreflexion übergeht, so daß keine scharfe Grenzkurve auftritt. Man kann dann aber n und $\varkappa$ aus den partiellen Reflexion wie bei den Metallen bestimmen.

Eine glänzende Bestätigung der hier dargelegten Anschauungen hat sich u. a.[1]) durch die Tatsache ergeben, daß Quarz für sehr langwellige Strahlen ($\lambda = 56\mu$) einen viel größeren Brechungsindex besitzt ($n = 2{,}18$) als für sichtbares Licht. Die Formel (29) liefert mit Annahme der auf S. 375 angegebenen Konstantenwerte des Quarzes $n = 2{,}20$. Wenn man daher die Strahlen eines Auerbrenners durch ein Quarzprisma spektral zerlegt, so findet man jenseits der violetten Seite des Spektrums diese langwelligen Strahlen, welche daher so in einfacher Weise durch Abblendung von den andern Strahlen zu isolieren sind.

Das Gegenstück zu einem sehr schmalen Absorptionsstreifen bietet der Fall, daß in (18) oder in (15) nicht a_h, sondern b_h oder τ_h zu vernächlässigen ist, daß wir uns also in einem Absorptionsgebiete befinden, in welchem keine Eigenschwingungen liegen (dieselben würden vielmehr erst bei viel kleineren Schwingungen eintreten). Dann wäre nach (18):

$$n^2(1 - i\varkappa)^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta_h'}{1 + \frac{a_h^2}{\tau^2}} \left(1 - i\frac{a_h}{\tau}\right) + \sum \frac{\vartheta_v'}{1 - \left(\frac{\tau_v}{\tau}\right)^2}. \tag{37}$$

Die Σ über den Index v bezieht sich auf die im Ultravioletten liegenden Eigenschwingungen. Nimmt man deren Perioden als

1) Rubens u. Aschkinaß, Wied. Ann. 67, S. 459, 1899.

sehr klein gegen T an, so folgt nach (37), falls man wiederum in Übereinstimmung mit der Bezeichnung der S. 376 $\Sigma\vartheta_r' = \vartheta_o'$ setzt und den reellen und imaginären Teil trennt:

$$(38) \qquad n^2(1-\varkappa^2) = 1 + \vartheta_o' + \sum \frac{\vartheta_h' \tau^2}{\tau^2 + a_h^2}, \quad 2n^2\varkappa = \sum \frac{\vartheta_h' a_h \tau}{\tau^2 + a_h^2}.$$

Ist nur eine Ionengattung h vorhanden, so ergibt sich, daß n mit abnehmender Periode T von $T = \infty$ an zunächst beständig abnimmt und die Absorption, welche ein sehr breites Gebiet einnimmt, ein Maximum für eine gewisse Periode T erreicht. Diese Formeln scheinen bei manchen Substanzen die Dispersionserscheinungen darzustellen, die man im Gebiete der durch elektrische Vorgänge erhaltenen großen Wellenlängen von $\lambda = \infty$ bis zu etwa $\lambda = 1$ cm herab beobachtet.[1])

7. Die Dispersion der Metalle. Wenn wir Leiter der Elektrizität in den Kreis der Betrachtungen ziehen, so haben wir zu berücksichtigen, daß in Leitern Elektrizitätsmengen unter dem Einfluß einer konstanten elektrischen Kraft fortdauernd verschoben werden, ohne eine bestimmte Gleichgewichtslage anzunehmen. Die bei den Elektrolyten benutzte Vorstellung, daß die verschobenen Elektrizitätsmengen an bestimmte Massen (Ionen) geknüpft sind, übertragen wir insofern auf die Metalle, als auch in ihnen die Bewegung der Ionen oder Elektronen so erfolgt, als ob sie träge Masse m besäßen. Dieselbe kann aber auch scheinbare Masse sein, indem die Trägheit durch die Selbstinduktion veranlaßt wird (vgl. oben S. 372).

Für diese (Leitungs-) Ionen muß man ihre Konstante ϑ unendlich groß setzen, da nach (2) ϑ_1 proportional ist der Verschiebung der Ionen aus der ursprünglichen Lage unter der Einwirkung einer konstanten elektrischen Kraft. Die Bewegungsgleichung der Ionen entsteht daher aus der Gleichung (1) der S. 365, wenn man dort $\vartheta_1 = \infty$ setzt, d. h. sie ist:

$$(39) \qquad m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = eX - re^2\frac{\partial\xi}{\partial t},$$

oder wenn man nach (5) die von diesen Ionen hervorgerufene Strömung $j_x = e\,\mathfrak{N}\frac{\partial\xi}{\partial t}$ einführt:

---

1) Dies hat Drude näher in Wied. Ann. 64, S. 131, 1908 ausgeführt.

$$\frac{m}{e^2\mathfrak{N}}\frac{\partial j_x}{\partial t}+\frac{r}{\mathfrak{N}}j_x=X.^{1)} \tag{40}$$

Hierin ist m die (scheinbare oder wirkliche) Masse eines Ions, e die Ladung desselben, $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Ionen in der Volumeneinheit. Aus (40) erkennt man, daß, falls zwei Leitungs-Ionengattungen vorhanden sind (eine positiv und eine negativ geladene Gattung), deren Reibungswiderstände r_1 und r_2 sind, für konstante Ströme die Beziehung besteht

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{r_1}+\frac{\mathfrak{N}_2}{r_2}=\sigma, \tag{41}$$

wobei σ die nach elektrostatischem Maß gemessene spezifische elektrische Leitfähigkeit des Körpers ist vgl. S. 340).

Für periodische Änderungen wird nach (40), da $X=-i\tau\frac{\partial X}{\partial t}$ ist,

$$j_x\left\{\frac{i}{\tau}\frac{m}{e^2\mathfrak{N}}+\frac{r}{\mathfrak{N}}\right\}=-i\tau\frac{\partial X}{\partial t}$$

oder

$$j_x=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{\frac{4\pi\tau\mathfrak{N}}{-\frac{m}{\tau e^2}+ir}\right\}. \tag{42}$$

Durch derartige Zusatzglieder ist die frühere Formel (14) der S. 368 zu erweitern, so daß, wenn man zur Abkürzung setzt

$$m:e^2=m' \tag{43}$$

die resultierende komplexe Dielektrizitätskonstante ε' die Gestalt annimmt:

$$\varepsilon'=1+\sum_h\frac{\vartheta_h'}{1+i\frac{a_h}{\tau}-\frac{b_h}{\tau^2}}+4\pi\tau\sum_k\frac{\mathfrak{N}}{ir-\frac{m'}{\tau}}. \tag{44}$$

Nimmt man an, daß die Schwingungen weit von den Eigenschwingungen der Ionengattungen h entfernt seien, so daß a_h zu vernachlässigen ist, so entsteht aus (44), da $\varepsilon'=n^2(1-i\varkappa)^2$ ist, durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$n^2(1-\varkappa^2)=1+\sum\frac{\vartheta_h'}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}-4\pi\sum\frac{m'\mathfrak{N}}{r^2+\left(\frac{m'}{\tau}\right)^2}. \tag{45}$$

1) Hier bezeichnet X wie sonst die mittlere Feldstärke im Äther zwischen den Ionen. Ob streng genommen die erregende Kraft der Leitungsionen auch noch modifiziert wird durch die Verschiebung der gebundenen Elektronen, mag unerörtert bleiben. Es würde dadurch das Dispersionsgesetz für die Metalle modifiziert werden, der wesentliche Inhalt dieses Paragraphen aber bestehen bleiben.

$$n^2\varkappa = 2\pi\tau \sum \frac{r\mathfrak{N}}{r^2 + \left(\frac{m'}{\tau}\right)^2}. \tag{46}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß bei Metallen wohl $\varkappa > 1$ sein kann, da die rechte Seite von (45) nicht nur wegen des zweiten Termes, sondern besonders auch wegen des dritten Termes, der mit der Masse m der Leitungs-Ionen proportional ist, negativ werden kann. Dies wird bei bestimmten m' und τ um so eher eintreten, je kleiner r, d. h. je größer die spezifische Leitfähigkeit ist. Ferner ist durch die Gleichung (46) der zweite Widerspruch erklärt, der oben auf S. 349 konstatiert wurde, daß nämlich bei den Metallen $n^2\varkappa$ kleiner als σT ist. Setzt man nämlich $m' = 0$ (oder $\tau = \infty$), so ergibt (46) tatsächlich [mit Rücksicht auf (41)] die von der ursprünglichen Maxwellschen Theorie geforderte Beziehung

$$n^2\varkappa = 2\pi\tau\,\Sigma\frac{\mathfrak{N}}{r} = \sigma T,$$

sobald aber m'/τ nicht vernachlässigt wird gegen r (und gerade bei schnellen Perioden [τ klein] und großer Leitfähigkeit [r klein] wird dies nicht gestattet sein), so ergibt sich nach (46) $n^2\varkappa < \sigma T$.[1])

Noch allgemeinere Formeln als (45) und (46) könnte man durch Hinzuziehung der in (38) gebildeten Ausdrücke erhalten, was der Annahme entspräche, daß außer den eigentlichen Leitungs-Ionen noch leitende Bestandteile vorhanden wären, welche aber unter Wirkung einer konstanten elektrischen Kraft nur um einen endlichen Betrag aus ihrer ursprünglichen Lage verschoben werden (sogenannte innere Leitfähigkeit, wie man sie durch Leiter, welche in einem Isolator eingebettet sind, im Groben nachahmen kann). Ob diese erweiterte Annahme notwendig ist, könnte erst eine weit vollständigere Untersuchung der Dispersion der Metalle ergeben, als sie bisher ermöglicht worden ist.

Die Formeln (45) und (46) geben auch Aufschluß darüber, daß nur bei so guten Leitern, wie sie die Metalle sind, Lichtabsorption durch die elektrische Leitfähigkeit hervorgerufen wird, während bei den besten elektrolytischen Leitern die Leitfähigkeit noch immer so gering ist, daß sie, wie es auch die Beobachtung bestätigt, sehr gut durchsichtig sein können, z. B. ist bei bestleitender Schwefel-

1) Betreffs weiterer Ausführung und Berechnung der Elektronenzahl vgl. meinen Aufsatz in der phys. Zeitsch. S. 161, Jan. 1900, und in Ann. d. Phys. **14**, S. 936, 1904. Siehe ferner Erfle, Ann. d. Phys. **23**, S. 594, 1907; **24**, 709, 1907.

säure oder Salpetersäure die spezifische elektrische Leitfähigkeit etwa $7 \cdot 10^{-5}$ mal so groß als beim Quecksilber. Da bei letzterem (vgl. oben S. 340) $\sigma = 10^{16}$ ist, so wäre also bei den bestleitenden Elektrolyten $\sigma = 7 \cdot 10^{11}$. Nun ist aber für Lichtschwingungen etwa $T = 2 \cdot 10^{-15}$, daher ist $\sigma T = 14 \cdot 10^{-4} = 0{,}0014$. Nach Formel (41) ist aber $n^2 \varkappa$ stets kleiner, jedenfalls nie größer als σT. Daher ist $\varkappa$, d. h. die Lichtabsorption, sehr gering, wenigstens die durch die Leitfähigkeit bedingte.

Kapitel VI.

Natürlich-aktive Körper.

1. Allgemeine Grundlage. Wenn ein linear polarisierter Lichtstrahl senkrecht auf eine planparallele Glasplatte fällt, so hat die Polarisationsebene des austretenden Strahles dieselbe Lage wie die des eintretenden. In derselben Weise verhalten sich im allgemeinen alle Körper, auch Kristallplatten, welche senkrecht zu einer optischen Achse geschnitten sind.

Indes gibt es eklatante Ausnahmen von dieser Regel bei den sogenannten natürlich[1])-aktiven Körpern: So z. B. dreht eine senkrecht zur optischen Achse geschnittene Quarzplatte die Polarisationsebene sehr bedeutend; auch Zuckerlösungen besitzen eine leicht nachweisbare Drehung. Letzteres Resultat ist um so auffallender, als man eine Lösung als einen völlig isotropen Körper anzusehen geneigt ist, während die besprochene Erscheinung entschieden gegen die Isotropie des Körpers spricht. Denn bei vollkommener Isotropie könnte aus Symmetrierücksichten eine Ablenkung der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes in irgend einem bestimmten Sinne nicht möglich sein.

Diese Erscheinung spricht also dafür, daß die Zuckerlösung in

1) Dieser Zusatz dient zur Unterscheidung von den später zu besprechenden magnetisch-aktiven Körpern.

optischer Hinsicht keine einzige Symmetrieebene besitzt, da sonst, wenn z. B. die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit ihr zusammenfiele, keine Drehung derselben stattfinden könnte. Der Natur der Lösung entspricht es aber, daß sie sich in allen Richtungen gleich verhält. Es läßt sich hiernach die Gestalt der Differentialgleichungen, welche die optischen Vorgänge in einer Zuckerlösung beschreiben können, dahin charakterisieren, daß dieselbe ungeändert bleiben muß bei einer beliebigen Drehung des ganzen Koordinatensystems, daß dagegen die Gestalt der Differentialgleichungen sich ändern muß, wenn nur eine der Koordinatenachsen in die entgegengesetzte Richtung gelegt wird, d. h. wenn z. B. x und y unverändert bleiben, während z mit $-z$ vertauscht wird. Körper, für welche Differentialgleichungen dieser Gestalt gelten, heißen dissymmetrisch-isotrope.

Dagegen nennt man einen Kristall, der, wie Quarz, keine optische Symmetrieebene besitzt, einen dissymmetrisch-kristallinischen Körper.

2. Isotrope Körper. Bei einer Lösung kann eine Unsymmetrie nur in der Gestaltung des Moleküls selbst liegen, nicht in der gegenseitigen Anordnung der Moleküle, und in der Tat haben le Bel und van't Hoff das Drehungsvermögen direkt mit der chemischen Konstitutionsformel in Verbindung setzen können. Jedes Molekül eines „rechtsdrehenden" Zuckers können wir uns hiernach durch eine „Rechtsschraube", jedes Molekül eines „linksdrehenden" Zuckers durch eine „Linksschraube" versinnlichen. Es ist klar, daß eine Anhäufung von lauter Zuckermolekülen der ersten Art sich optisch von einer Anhäufung von Zuckermolekülen der zweiten Art unterscheiden kann; denn wenn auch die Moleküle einer jeden Art noch so regellos durcheinanderliegen mögen, so sind die einen einem Haufen von lauter Rechtsschrauben, die andern einen Haufen von lauter Linksschrauben vergleichbar. — Bei einem festen Körper kann die Dissymmetrie in der gegenseitigen Anordnung der Moleküle liegen.

Eine Erweiterung unserer bisherigen Theorie versuchen wir in den Gleichungen (1) auf S. 365 des vorigen Kapitels[1]), während wir an den sogenannten Grundgleichungen der Maxwellschen Theorie (S. 252 u. 254) nach wir vor festhalten.

1) Von einer Vervollständigung dieser Gleichungen entsprechend der Gleichung (1') S. 371 wollen wir hier absehen, da dies für den vorliegenden Zweck nicht wesentlich ist.

Die dissymmetrische Konstitution eines Körpers ist nun nur dadurch zu erkennen, daß man die Eigenschaften an einer Stelle mit denen einer benachbarten Stelle vergleicht; ein genau punktförmiges Gebilde kann keine dissymmetrischen Eigenschaften haben, diese können immer erst bei räumlich ausgedehnten Gebilden hervortreten. Die notwendige Erweiterung unserer früheren Anschauungen über die Ionenbeweglichkeit muß also darin bestehen, daß wir die Verschiebung ξ eines Ions nicht nur von der elektrischen Kraft X an der Stelle des Ions als abhängig betrachten, sondern auch von den elektrischen Kraftkomponenten der unmittelbar benachbarten Stellen. Mathematisch drückt sich diese Idee dadurch aus, daß in der Gleichung (1) der S. 365 oder der Gleichung (2) außer X auch noch die Differentialquotienten von X, Y, Z nach den Koordinaten vorkommen müssen. Berücksichtigt man nun die Bedingung der Isotropie, d. h. daß keine Koordinatenrichtung vor der anderen ausgezeichnet ist, so kommt man zu folgendem Ansatz als einer möglichen Erweiterung von (2) im vorigen Kapitel:

$$e\xi = \frac{\vartheta}{4\pi}\left(X + f'\left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right), \tag{1}$$

zu welcher Gleichung sich zwei analoge zuordnen, die man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben aus (1) ableiten kann. In (1) könnte wegen der Isotropie auch noch das Glied $\frac{\partial X}{\partial x}$ auftreten. Dieses muß aber deshalb verschwinden, weil sonst

$$e\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \sim \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

wäre, d. h. es könnte eine Anhäufung freier Ladung entstehen, da die rechte Seite im allgemeinen, z. B. bei Lichtschwingungen, nicht verschwindet.

Wir würden z. B. ein dissymmetrisch-isotropes Medium erhalten, wenn die Moleküle einer Lösung alle dieselben unregelmäßigen Tetraeder wären, während die Tetraeder, welche zu ihnen spiegelbildlich gleich sind, nicht vorhanden oder mindestens kleiner an Zahl wären. — Eine direkte Versinnlichung der Gleichung (1) erhält man, wenn man annimmt, daß in jedem Molekül mehrere miteinander gekoppelte Ionen (Elektronen) vorhanden sind, deren

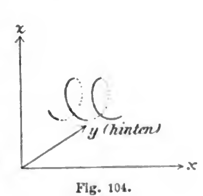


Fig. 104.

Bahnen unter dem Einfluß der Molekularstruktur nicht kurze gerade Linien, sondern kurze, in einem Sinne gewundene Schraubenlinien sind. Die Achsen dieser Schraubenlinien sind regellos im Raume verschieden gerichtet. Betrachten wir z. B. eine rechts gewundene Schraubenbahn (vgl. Figur 104), deren Achse parallel zur x-Achse geht. Die Komponente X treibt das geladene Ion beständig nach rechts, ein positives Y treibt aber das Ion auf der Oberseite der Schraube nach links, ein auf der Unterseite mit ihm gekoppeltes Ion aber nach rechts. Es resultiert daher eine Wirkung nach rechts, welche proportional zu $-\frac{\partial Y}{\partial z}$ ist, da es auf den Unterschied der Y oben und unten ankommt. Ebenfalls treibt ein positives Z das Ion auf der Vorderseite der Schraube nach links, ein mil ihm gekoppeltes Ion auf der Hinterseite nach rechts. Der resultierende Effekt nach rechts ist proportional zu $+\frac{\partial Z}{\partial y}$. Es entsteht daher der Ansatz (1), wobei f' negativ sein würde bei rechts gewundenen Ionenbahnen und wenn das Koordinatensystem in der der Figur 104 entsprechenden Weise gewählt wird.

Nach dem Ansatz (1) ist die frühere Gleichung (1) der S. 365 zu erweitern in

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e\left(X + f'\left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right) - \frac{4\pi e^2}{\vartheta}\xi - re^2\frac{\partial \xi}{\partial t}. \tag{2}$$

Für periodische Veränderlichkeit mit der Zeit entsteht, falls wir die Strömung $(j_x)_1 = e\mathfrak{N}\frac{\partial \xi}{\partial t}$ einführen:

$$(j_x)_1 = \frac{\vartheta \mathfrak{N}}{4\pi\left(1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left(X + f'\left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right), \tag{3}$$

wobei

$$a = \frac{r\vartheta}{4\pi}, \quad b = \frac{r\vartheta}{4\pi e^2} = \tau_1{}^2. \tag{4}$$

Wir wollen im folgenden a/τ vernachlässigen, was gestattet ist, wenn die Lichtschwingungen nicht nahe zusammenfallen mit der Eigenperiode einer Ionengattung. Die ganze, von allen Ionengattungen und vom Äther herrührende Strömung ist dann

$$j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon X + f\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right\}, \tag{5}$$

wobei

$$
(6)\qquad \begin{aligned}
\varepsilon &= 1 + \Sigma \frac{\vartheta_h \mathfrak{N}_h}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}, \\
f &= \Sigma \frac{\vartheta_h f_h' \mathfrak{N}_h}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Die Grundgleichungen (7) der S. 252 werden daher:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon X + f\left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right) &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon Y + f\left[\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right]\right) &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon Z + f\left[\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right]\right) &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.
\end{aligned} \qquad (7)
$$

An den Grundgleichungen (11) der Seite 254 halten wir, wie stets, auch hier fest. Beim Ansatz dieser Gleichungen ist aber zu berücksichtigen, daß hier die magnetische Stromdichte s_x nicht wie sonst durch die Formeln $4\pi s_x = \partial\alpha/\partial t$ bestimmt wird, sondern es kommt noch ein Anteil hinzu. Denn wenn sich die Elektronen nach der x-Achse bewegen, so tritt zugleich wegen der Schraubengestalt ihrer Bahn eine Rotation derselben um die x-Achse ein, d. h. es entsteht eine Stromsolenoid, welches magnetische Kraftlinien parallel zur Achse erzeugt. Diese so erzeugte Kraftlinienzahl N_x muß offenbar proportional zu $e N \partial\xi/\partial t$ sein, d. h. man kann setzen:

$$
N_x = \frac{4\pi g'}{c} e \mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial t},
$$

wobei der Faktor $1/c$ zugefügt ist, weil e elektrostatisch definiert ist, und die Kraftlinienanzahl N_x von der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke im Solenoid in einfacher Weise abhängt. Der Faktor g' muß nun proportional zu der durch (1) definierten Konstanten f' sein, denn beide werden lediglich durch die Schraubenstruktur der Elektronenbahnen bestimmt. Es läßt sich leicht zeigen, daß $g' = -f'$ ist.[1]) Daher nehmen die Grundgleichungen

1) Dies folgt sowohl bei Verfolgung des hier gegebenen speziellen Bildes von der Schraubenstruktur der Elektronenbahnen (vgl. dazu P. Drude, Gött. Nachr. 1904, Heft 1. — Winkelmanns Hdb. d. Phys. II. Aufl. Optik. S. 1341), als auch ohne spezielles Bild aus der allgemeinen Forderung, daß die Gleichungen dem Energieprinzip genügen sollen (vgl. dazu W. Voigt, Wied. Ann. **69**, S. 307; 1899. — Gött. Nachr. 1903, S. 155). — Auf den Nachweis der Beziehung zwischen g' und f' ist hier verzichtet, da sie für die hier angestellten Betrachtungen gleichgültig ist.

(11) hier die Gestalt an (weil $4\pi \cdot s_x$ gleich der Änderung der gesamten Kraftlinienzahl ist):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{4\pi g'}{c^2} e\,\mathfrak{N} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \text{usw.} \tag{8}$$

In dem mit g' multiplizierten Glied kann nun für $e\,\mathfrak{N}\frac{\partial \xi}{\partial t}$ der aus (3) folgende Näherungswert (es ist a/τ vernachlässigt):

$$(j_x)_1 = e\,\mathfrak{N}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\vartheta\,\mathfrak{N}}{4\pi\left(1 - \frac{b}{\tau^2}\right)} \frac{\partial X}{\partial t}$$

eingesetzt werden, wenn man die Glieder vernachlässigt, welche die Aktivitätskonstanten f' oder g' in höherer, als erster Potenz enthalten. Dieses ist bei der Kleinheit dieser Konstanten in der Tat stets gestattet. Dadurch nimmt die Gleichung (8) die Form an:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{g'\,\vartheta\,\mathfrak{N}}{c^2(1 - b/\tau^2)} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$g = \sum \frac{\vartheta_h\, g'_h\, \mathfrak{N}_h}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2},$$

wobei sich die Summe Σ und der Index h auf den allgemeineren Fall bezieht, daß mehrere Elektronen-Gattungen vorhanden sind, welche sich in Schraubenbahnen bewegen, so werden die Gleichungen (8):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{g}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Als Grenzbedingungen beim Übergang des Lichtes über die Grenze zweier verschiedener Körper ergibt sich nach denselben Überlegungen, wie sie oben S. 258 angestellt sind, Stetigkeit der der Grenze parallelen elektrischen und magnetischen Kraftkomponenten.

Wir haben damit eine vollständige Theorie der Lichterscheinungen in natürlich aktiven Körpern gewonnen.

Aus den Gleichungen (7) folgt, daß

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0$$

ist. Aus den Gleichungen (7) und (9) erhält man daher durch Elimination von α, β, γ analog wie oben S. 262:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon X+(f-g)\left[\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right)=\Delta X.$$

Berücksichtigt man nun die Beziehung $g'=-f'$, d. h. $g=-f$, so wird:

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon X+2f\left[\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right)=\Delta X. \tag{10}$$

Gleichungen derselben Form genügen Y, Z, α, β, γ.

3. Die Drehung der Polarisationsebene. Pflanzen sich ebene Wellen nach der z-Achse fort, so ist zu setzen:

$$X=Me^{\frac{i}{\tau}(t-pz)}, \quad Y=Ne^{\frac{i}{\tau}(t-pz)}, \quad Z=0. \tag{11}$$

p bedeutet die reziproke Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Setzt man die Werte (11) in (10) ein, so erhält man die Beziehungen:

$$\varepsilon M-\frac{i}{\tau}2fpN=Mp^2c^2,$$
$$\varepsilon N+\frac{i}{\tau}2fpM=Np^2c^2.$$

Diesen Gleichungen kann man durch zwei Wertsysteme genügen, nämlich durch

$$\varepsilon-p^2c^2=2\frac{pf}{\tau}, \quad M=iN, \tag{12}$$

und

$$\varepsilon-p^2c^2=-2\frac{pf}{\tau}, \quad M=-iN. \tag{13}$$

Es ergibt sich also hier das eigentümliche Resultat, daß zwei Wellen mit verschiedenem p, d. h. auch mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten existieren. Ferner haben die Wellen imaginäre y-Amplituden, wenn sie reelle x-Amplituden besitzen.

Um die physikalische Bedeutung hiervon zu erkennen, ist zu berücksichtigen, daß die eigentliche physikalische Bedeutung von X und Y erhalten wird, wenn auf der rechten Seite von (11) nur der reelle Teil genommen wird. Es folgt daher

für $iN=M$:

$$X=M\cos\frac{1}{\tau}(t-pz), \quad Y=M\sin\frac{1}{\tau}(t-pz). \tag{14}$$

für $iN = -M$:

$$X = M \cos \frac{1}{\tau}(t - pz), \quad Y = -M \sin \frac{1}{\tau}(t - pz). \tag{15}$$

Diese Gleichungen stellen **zirkular polarisierte Wellen** dar, und zwar ist, da bei unserer oben S. 251 festgesetzten Lage des Koordinatensystems die x-Achse nach rechts, die y-Achse nach oben geht, wenn man der z-Achse entgegensieht, die erste Welle links zirkular polarisiert, da sie eine dem Uhrzeiger entgegengerichtete Drehung darstellt; die zweite Welle ist rechts-zirkularpolarisiert (Definition vgl. oben S. 236).

Diese beiden Wellen haben nun also verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V, und zwar ist nach (12) für die erste Welle:

$$p' = \frac{1}{V'} = -\frac{f}{\tau c^2} + \frac{1}{c}\sqrt{\frac{f^2}{\tau^2 c^2} + \varepsilon}, \tag{16}$$

für die zweite Welle nach (13):

$$p'' = \frac{1}{V''} = +\frac{f}{\tau c^2} + \frac{1}{c}\sqrt{\frac{f^2}{\tau^2 c^2} + \varepsilon}. \tag{17}$$

Es ergibt sich hiernach das Resultat, daß der Brechungsexponent für rechts- und links-zirkularpolarisiertes Licht in aktiven Körpern etwas verschieden sein muß, und daß ein natürlicher Lichtstrahl bei schiefer Inzidenz in zwei räumlich getrennte Strahlen zerlegt wird, von denen der eine rechts-, der andere links-zirkularpolarisiert ist. Diese Folgerungen der Theorie hat in der Tat v. Fleischl[1]) an Zuckerlösungen und anderen Flüssigkeiten experimentell nachweisen können.

Der Effekt der Superposition zweier sich mit den Geschwindigkeiten V' und V'' fortpflanzenden rechts- und links-zirkularpolarisierten Wellen ist

$$\begin{aligned} X &= X' + X'' = 2M \cos \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{p' + p''}{2} z\right) \cos \frac{1}{\tau} \frac{p'' - p'}{2} z, \\ Y &= Y' + Y'' = 2M \cos \frac{1}{\tau}\left(t - \frac{p' + p''}{2} z\right) \sin \frac{1}{\tau} \frac{p'' - p'}{2} z, \end{aligned} \tag{18}$$

An einer bestimmten Stelle, d. h. für ein bestimmtes z, besteht

1) E. v. Fleischl, Wied. Ann. 24, S. 127, 1885. — Leichter gelingt es, die zirkulare Doppelbrechung für Quarz in Richtung der optischen Achse nachzuweisen. Bei Quarz ist die Konstante f viel größer als in Flüssigkeiten.

daher eine linearpolarisierte Lichterregung, da nach (18) X und Y von gleicher Phase sind. Die Lage der Polarisationsebene zur x-Achse bestimmt sich aus

$$Y:X = tg\,\frac{1}{\tau}\,\frac{p''-p'}{2}\,z\,,$$

d. h. diese Lage wechselt mit z. Die Polarisationsebene dreht sich also um die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes gleichmäßig herum, und zwar auf der Strecke z um den Winkel:

$$\delta = \frac{z}{\tau}\,\frac{p''-p'}{2} = \frac{f}{\tau^2 c^2}\,z = 4\pi^2\,\frac{f}{\lambda_0{}^2}\,z\,. \tag{19}$$

falls $\lambda_0 = Tc$ die Wellenlänge der betreffenden Lichtsorte im Vakuum bezeichnet. Da pc den Brechungsindex n des Körpers gegen das Vakuum bedeutet, so ist

$$\delta = \frac{z}{\tau c}\,\frac{n''-n'}{2} = z\,\frac{\pi}{\lambda_0}(n''-n')\,, \tag{19'}$$

falls n'' und n' den Brechungsindex des Körpers für eine rechts- und eine links-zirkularpolarisierte Welle bedeuten. Nach (19) und (19') gilt also:

$$4\pi\,\frac{f}{\lambda_0} = n'' - n'\,. \tag{19''}$$

Wenn also linear polarisiertes Licht senkrecht auf eine Platte der Dicke z eines aktiven Körpers fällt, so ist die Polarisationsebene nach dem Austritt aus der Platte um den Winkel δ gedreht. Je nach dem Vorzeichen von f kann der Drehungswinkel δ in verschiedenem Sinne stattfinden. Aus δ berechnet sich $n''-n'$ nach (19').

Um diese Drehung bequem und scharf zu beobachten, sind besondere Apparate konstruiert worden.[1] Die sogenannten Halbschattenapparate beruhen auf der Benutzung eines zweifach geteilten Gesichtsfeldes, dessen Teile schwach gegeneinander geneigte Polarisationsebenen besitzen. Aber schon bei Anwendung zweier einfacher Nicolscher Prismen als Polarisator und Analysator kann man bei genügend intensiver, homogener Beleuchtung

1) Betreffs der genaueren Beschreibung dieser Apparate sei verwiesen auf Landolt, Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen. Braunschweig, 2. Aufl. — Müller-Pouillet (Lummer), Optik, 9. Aufl., S. 1116 ff., 10. Aufl. S. 1007. — Die Beobachtung der Drehung der Polarisationsebene wird zur quantitativen Zuckerbestimmung praktisch verwertet.

die Lage der Polarisationsebene bei wiederholten Ablesungen auf drei Bogensekunden genau bestimmen, wenn man als Einstellungskriterium den sogenannten Landoltschen Streifen benutzt. Weil nämlich bei Anwendung Nicolscher Prismen das Gesichtsfeld nie genau homogen überall polarisiert ist, so ist bei gekreuzten Nicols nicht das ganze Gesichtsfeld völlig dunkel, sondern es zieht sich ein schwarzer, gekrümmter Streifen, auf den Landolt zuerst aufmerksam gemacht hat, durch das Gesichtsfeld. Die Lage dieses Streifens wechselt nun sehr schnell, wenn die Polarisationsebene des in den Analysator einfallenden Lichtes sich verändert.[1])

4. Kristalle. Um zu einem Ansatz für Kristalle zu gelangen, muß man berücksichtigen, daß die in den Gleichungen (1) (S. 365) der Dispersionstheorie auftretenden Konstanten ϑ_1, r_1 von der Koordinatenrichtung abhängen. Auch die in diesem Kapitel angebrachten Zusatzglieder, welche der optischen Aktivität entsprechen, können in einem Kristall eine viel allgemeinere Gestalt besitzen, als sie im Ansatz (1) der S. 391 enthalten ist.[2]) Jedoch wollen wir der Einfachheit halber die Annahme machen, daß hinsichtlich dieser aktiven Zusatzglieder der Kristall wie ein dissymmetrisch-isotroper Körper behandelt werden soll. Diese Annahme ist zwar nicht ganz streng, wie besonders durch die Untersuchungen von Voigt und Pocklington (vgl. weiter unten) hervorgeht, aus denen die Existenz mehrerer Aktivitätskonstanten für Kristalle notwendig folgt, indes ist die Annäherung im allgemeinen genügend, da die Koeffizienten f der aktiven Zusatzglieder bei allen tatsächlich vorliegenden Körpern überhaupt nur so klein sind, daß die durch die Kristallstruktur bewirkte Veränderlichkeit der f mit der Richtung (abgesehen von einigen besonderen Fällen, vgl. unten) zu vernachlässigen ist.

Wählt man als Koordinatenachsen diejenigen Richtungen, welche die optischen Symmetrieachsen des Kristalls sein würden, falls derselbe keine optische Aktivität besäße, so würden sich unsere Gleichungen (10) erweitern in[3]):

---

1) Vgl. hierüber F. Lippich, Wien. Ber. (2) 85, S. 268, 1892. — Müller-Pouillet (Lummer), Optik, S. 1115.

2) Dies hat W. Voigt (Gött. Nachr. 1904, S. 155. — Ann. d. Phys. 18, S. 645, 1905) theoretisch und experimentell durchgeführt.

3) Es ist C für c geschrieben.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_1 X + 2f\left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right) &= \Delta X, \\
\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_2 X + 2f\left[\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right]\right) &= \Delta Y, \\
\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_3 X + 2f\left[\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right]\right) &= \Delta Z,
\end{aligned} \tag{20}$$

wobei ist:

$$\varepsilon_1 = 1 + \Sigma \frac{\vartheta_h' \mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h'}{\tau}\right)^2}, \quad \varepsilon_2 = 1 + \Sigma \frac{\vartheta_h'' \mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h''}{\tau}\right)^2}, \quad \varepsilon_3 = 1 + \Sigma \frac{\vartheta_h''' \mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h'''}{\tau}\right)^2} \tag{21}$$

$$f = \Sigma \frac{\vartheta_h f_h' \mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}. \tag{22}$$

Hierin bezeichnen $\vartheta_h' \mathfrak{N}_h$, $\vartheta_h'' \mathfrak{N}_h$, $\vartheta_h''' \mathfrak{N}_h$ die drei verschiedenen Dielektrizitätskonstanten der h^{ten} Ionengattung nach den drei Koordinatenrichtungen; τ_h', τ_h'', τ_h''' sind proportional zu den drei Schwingungsdauern nach den drei Achsen; in (22) bezeichnen ϑ_h, τ_h Mittelwerte von ϑ_h', ϑ_h'', ϑ_h''' bzw. τ_h', τ_h'', τ_h'''.

Setzt man zur Integration analog wie oben auf S. 351

$$u = \varepsilon_1 X = M e^{i\psi}, \quad v = \varepsilon_2 Y = N e^{i\psi}, \quad w = \varepsilon_3 Z = \Pi e^{i\psi} \tag{23}$$

$$\psi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx + ny + pz}{V}\right), \tag{24}$$

wobei man u, v, w als Komponenten des Lichtvektors interpretieren kann, so folgt[1]) aus (20), wenn man zur Abkürzung setzt:

$$C^2 : \varepsilon_1 = a^2, \quad C^2 : \varepsilon_2 = b^2, \quad C^2 : \varepsilon_3 = c^2, \tag{25}$$

$$\eta = \frac{4\pi f C}{T \varepsilon^{3/2}}, \tag{26}$$

wobei ε einen Mittelwert von ε_1, ε_2, ε_3 bedeutet, das Gesetz für die Geschwindigkeit V als Funktion der Richtung m, n, p der Wellennormale in der Form:

$$\begin{aligned}
m^2(V^2 - b^2)(V^2 - c^2) + n^2(V^2 - c^2)(V^2 - a^2)& \\
+ p^2(V^2 - a^2)(V^2 - b^2) = \eta^2.&
\end{aligned} \tag{27}$$

---

1) Dies ist näher ausgeführt in Winkelmanns Hdb. d. Phys. Optik, 2. Aufl., S. 1345 ff. — Die Normalenfläche und Strahlenfläche aktiver Kristalle ist näher diskutiert von O. Weder, Die Lichtbewegung in zweiachsigen aktiven Kristallen, Dissertation, Leipzig 1896. — Ztschr. f. Kristallogr. 1896. Vgl. auch F. Pockels, Lehrb. d. Krist. Optik, Leipz. u. Berlin, 1906, S. 322 ff.

Durch Einführung der Winkel g_1 und g_2, welche die Wellennormale mit den optischen Achsen bildet, ergibt sich analog wie oben S. 308:

$$2V_1^2 = a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\cos g_1 \cos g_2 + \sqrt{(a^2 - c^2)^2 \sin^2 g_1 \sin^2 g_2 + 4\eta^2}$$
$$2V_2^2 = a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\cos g_1 \cos g_2 - \sqrt{(a^2 - c^2)^2 \sin^2 g_1 \sin^2 g_2 + 4\eta^2}.$$

Man erkennt hieraus, daß in keiner Richtung, auch nicht für die Richtung einer optischen Achse, die beiden Geschwindigkeiten V_1 und V_2 identisch werden.

Eine in einen aktiven Kristall eindringende Welle zerlegt sich also stets in zwei Wellen verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Diese beiden Wellen sind elliptisch polarisiert, in beiden Wellen ist die Erregungsbahn die gleiche Ellipse, die Ellipsen liegen aber invers zueinander und werden in entgegengesetztem Rotationssinne durchlaufen. Das Achsenverhältnis h der Erregungsellipse bestimmt sich aus:

$$h + \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)^2 \sin^2 g_1 \sin^2 g_2 + 4\eta^2}}{\eta}. \tag{29}$$

In der Richtung der optischen Achsen (g_1 oder $g_2 = 0$) ist daher das Achsenverhältnis $h = 1$, d. h. es findet dann Zirkularpolarisation statt. Bei kleiner Abweichung der Wellennormale von der Richtung einer optischen Achse ist aber die Erregungsbahn schon eine sehr flache Ellipse, da 2η selbst bei stark aktiven Kristallen stets sehr klein gegen die Differenz $a^2 - c^2$ der Quadrate der beiden Haupt-Lichtgeschwindigkeiten ist.

Nach der hier gegebenen angenäherten Theorie würde die Zirkularpolarisation in Richtung beider optischen Achsen dieselbe sein. Pocklington[1]) hat aber im Rohrzucker entgegengesetzten Drehungssinn der Polarisationsebene längs der beiden optischen Achsen gefunden. Zur Erklärung dieser Erscheinung ist die Annahme mehrerer (dreier) von der Richtung im Kristall abhängiger Aktivitätskonstanten f_1, f_2, f_3 notwendig. Ebenso gilt auch nach den Beobachtungen von Voigt (vgl. oben Anm. 2, S. 398) die Formel (29) nicht völlig streng bei Quarz, was ebenfalls dafür

1) H. C. Pocklington, Phil. Mag. (6) 2, S. 361; 1901.

spricht, daß man mit einer einzigen Aktivitätskonstante streng genommen nicht ausreicht.[1])

Zweiachsige aktive Kristalle sind in der Natur bisher nur sehr wenig aufgefunden worden; dagegen sind mehrere Repräsentanten einachsiger aktiver Kristalle vorhanden, z. B. Quarz. Derselbe kommt in zwei spiegelbildlich gleichen kristallographischen Formen vor, und daher gibt es auch sowohl rechts- als linksdrehenden Quarz. Die Drehung der Polarisationsebene durch eine senkrecht zur optischen Achse geschnittene Quarzplatte der Dicke z bestimmt sich gerade wie bei isotropen Medien durch die Formel

$$\delta = 4\pi^2 \frac{f}{\lambda_0^2} z = \frac{\pi}{\lambda_0} z (n'' - n'). \tag{30}$$

Für $z = 1$ mm und gelbes Licht ($\lambda_0 = 0{,}000589$ mm) beträgt $\delta = 21.7^0 = 0{,}12\,\pi$ absolutes Bogenmaß. Daraus berechnet sich

$$4\pi \frac{f}{\lambda_0} = n'' - n' = 0{,}12 \cdot \frac{\lambda_0}{z} = 0{,}000071. \tag{31}$$

Dabei bezeichnen n', n'' die beiden Brechungsindizes. welche der Quarz in der Richtung der optischen Achse infolge seiner Aktivität haben muß. Eine Doppelbrechung $n'' - n'$ in dem aus (31) sich ergebenden Betrage hat nun tatsächlich V. v. Lang am Quarz in Richtung seiner optischen Achse gefunden. Zur besseren Demonstration dieser Doppelbrechung läßt man nach Fresnel zweckmäßig das Licht abwechselnd durch rechts und linksdrehende Quarzprismen gehen, deren Keilwinkel abwechselnd nach verschiedenen Seiten zu liegen.

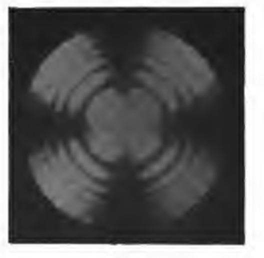


Fig. 105.

Betrachtet man eine einige Millimeter dicke, senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte zwischen gekreuzten Nicols bei einfallendem weißen Lichte, so erscheint die Platte farbig. Die einfallende Polarisationsebene ist nämlich nach dem Durchgang durch die Platte für die verschiedenen Farben

1) Über die weitere Verfolgung der Theorie mit mehreren Aktivitätskonstanten vgl. W. Voigt, Ann. d. Phys. 18, S. 645, 1905.

verschieden gedreht, und es müssen im Gesichtsfelde alle diejenigen Farben ausgelöscht werden, deren Polarisationsebene senkrecht zu der des Analysators liegt. Die Farbe der Quarzplatte wechselt daher auch bei Drehung des Analysators. — Benutzt man einfallendes konvergentes Licht, so tritt die oben S. 339 für einachsige Kristalle beschriebene Interferenzfigur zwischen gekreuzten Nicols erst in einiger Entfernung von der optischen Achse auf. In der Nähe derselben macht sich die Zirkularpolarisation in der Zerstörung des schwarzen Kreuzes der Hauptisogyren geltend. Eine senkrecht zur Achse geschnittene Quarzplatte zeigt daher zwischen gekreuzten Nicols bei konvergenter Beleuchtung das in Figur 105 dargestellte Interferenzbild.

Spiralige Interferenzfiguren treten auf, wenn man zirkularpolarisiertes Licht einfallen läßt. Die Berechnung dieser Airyschen Spiralen ist in den „Vorlesungen über theoretische Optik" von F. Neumann, herausg. v. Dorn, S. 244 ff., Leipzig 1885, gegeben.

5. Die Dispersion der Rotationspolarisation. Die Drehung δ der Polarisationsebene, welche eine Platte eines aktiven isotropen Körpers oder die senkrecht zur Achse geschnittene Platte eines aktiven Kristalls bewirkt, muß mit der Farbe variieren. Wir erhalten das Dispersionsgesetz aus den Formeln (6) und (19), falls wir die Dicke der Platte $z = 1$ setzen und anstatt der Wellenlänge λ_0 im Vakuum die Wellenlänge λ der betreffenden Farbe in Luft einführen[1])

$$\delta = \frac{k}{\lambda^2} \sum \frac{\vartheta_h f_h' \mathfrak{N}_h}{1 - \left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}, \tag{32}$$

wo k eine Konstante bedeutet.

Wenn die Eigenschwingungsdauern der aktiven Ionenarten[2]) so viel kleiner sind als die Periode des angewandten Lichtes, daß $(\tau_h : \tau)^2$ gegen 1 zu vernachlässigen ist, so resultiert die einfachste Form des Dispersionsgesetzes

---

1) In Anbetracht der geringen Dispersion der Luft ist dies gestattet.

2) Wir wollen darunter alle diejenigen Ionenarten verstehen, die einer Bewegungsgleichung nach der Formel (2) genügen, während wir diejenigen Ionenarten inaktiv nennen wollen, für welche die Konstante f' in jener Gleichung (2) den Wert Null hat.

$$\delta = \frac{k'}{\lambda^2}. \tag{33}$$

Annäherungsweise genügt diese Biotsche Formel, doch ist sie nicht genau. Wenn alle Eigenperioden der aktiven Ionen im Ultravioletten liegen, so kann man (32) nach steigenden Potenzen von $(\tau_h : \tau)^2$ entwickeln und erhält dann die Form

$$\delta = \frac{k_1}{\lambda^2} + \frac{k_2}{\lambda^4} + \frac{k_3}{\lambda^6} + \cdots \tag{34}$$

Meist genügt nun schon in der Tat diese Formel mit Benutzung der ersten beiden Glieder (Boltzmannsche Formel), jedoch reicht sie für Quarz, bei dem man δ über ein sehr großes Bereich von Wellenlängen gemessen hat (von $\lambda = 2\mu$ bis $\lambda = 0{,}2\mu$), nicht aus. — Die einzelnen Konstanten k_1, k_2, k_3 können verschiedene Vorzeichen haben, da die f_h' der verschiedenen aktiven Ionengattungen nicht dasselbe Vorzeichen zu haben brauchen.

Wenn auch Eigenschwingungen τ im Ultraroten bei den aktiven Ionen vorhanden wären, so würde (32) nach Potenzen von $(\tau : \tau_r)^2$ zu entwickeln sein. Man erhielte dann die Form:

$$\delta = \frac{k_1}{\lambda^2} + \frac{k_2}{\lambda^4} + \frac{k_3}{\lambda^6} + \cdots + k' + k_1' \lambda^2 + k_2' \lambda^4 + \cdots. \tag{35}$$

Wenn man, wie beim Quarz, die Dispersion über sehr große Gebiete von Farben darstellen will, welche zum Teil den Eigenperioden ziemlich nahe kommen, so vermeidet man zweckmäßiger Potenzentwicklungen und schreibt nach (32):

$$\delta = \Sigma \frac{k_h}{\lambda^2 - \lambda_h^2}. \tag{36}$$

Beim Quarz kennt man nun die Wellenlängen λ_h der dem Lichte am nächsten benachbarten Eigenperioden für die ordinäre Welle, sie betrugen (vgl. oben S. 375) $\lambda_1^2 = 0{,}010627$, $\lambda_2^2 = 78{,}22$, $\lambda_3^2 = 430{,}56$. Einheit von λ_h ist dabei $1\mu = 0{,}001$ mm. Wir schlossen aber schon oben nach der dortigen Formel (30'), daß Quarz noch Ionengattungen haben wird, für welche ihr λ_h so klein ist, daß man noch immer nicht mit den Wellenlängen des benutzen Lichtes in die Nähe dieser λ_h gelangt. Die Aktivitätskoeffizienten k' dieser Ionengattungen, deren λ_h^2 gegen λ^2 also in (36) zu vernachlässigen ist, müssen wir aber berücksichtigen, so daß folgende Dispersionsformel für Quarz entstehen würde:

(37) $$\delta = \frac{k_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{k_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{k_3}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \frac{k'}{\lambda^2}.$$

Wendet man diese Formel auf die Dispersion des Quarzes an, so ergibt sich aus den Beobachtungen, daß $k_2 = k_3 = 0$ sind, d. h. daß die Ionengattungen, deren Eigenschwingungen im Ultraroten liegen, inaktiv sind, dagegen ergibt sich k_1 und k' von verschiedenem Vorzeichen. Es spricht nun sehr zu Gunsten der ganzen Grundlagen der hier dargelegten Theorie, daß man mit Hilfe der Formel

(38) $$\delta = \frac{k_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{k'}{\lambda^2},$$

welche nur zwei Konstanten enthält, da λ_1 aus der Dispersion des Brechungsindex, und nicht aus der Drehung der Polarisationsebene entnommen ist, die Dispersion des δ recht gut darstellen kann, wie folgende Tabelle[1]) lehrt, in der die Drehung δ in Graden pro 1 mm Dicke angegeben ist:

$k_1 = 12{,}200 \quad k' = -5{,}046.$

λ (in μ)	δ beob.	δ ber.
2,140	1,60	1,57
1,770	2,28	2,29
1,450	3,43	3,43
1,080	6,18	6,23
0,67082	16,54	16,56
0,65631	17,31	17,33
0,58932[2])	21,72	21,70
0,57905	22,55	22,53
0,57695	22,72	22,70
0,54610	25,53	25,51
0,50861	29,72	29,67
0,49164	31,97	31,92
0,48001	33,67	33,60
0,43586	41,55	41,46
0,40468	48,93	48,85
0,34406	70,59	70,61
0,27467	121,06	121,34
0,21935	220,72	220,57

1) Die Beobachtungsdaten sind der Zusammenstellung bei Gumlich, Wied. Ann. 64, S. 349, 1898 entnommen.

2) D-Linie.

Vielleicht könnten auch die Konstantenwerte k_1 und k' noch etwas besser den Beobachtungen angepaßt werden. Jedenfalls ist es von Wichtigkeit, daß sich diese zweikonstantige Formel (38) den Beobachtungen genügend anschließt, dagegen stellt die dreikonstantige Formel (37), wenn man darin $k'=0$ setzen würde, die Beobachtungen nicht befriedigend dar. Wir müssen beim Quarz also noch Ionengattungen annehmen, deren Eigenwellenlänge äußerst klein, viel kleiner als λ_1 ist. Vgl. S. 376 Anm.

Wie die Tabelle lehrt, nimmt δ mit abnehmendem λ zu. Dies ist der normale Dispersionsverlauf. Wie aber aus (38) hervorgeht, würden Störungen entstehen (anomale Rotationsdispersion), wenn die Wellenlänge noch kleiner als λ_1 wird, denn dann würde δ negativ werden. Überhaupt entsteht anomale Rotationsdispersion, sowie λ in die Nähe einer Eigenschwingung λ_h kommt. Aber auch wenn λ viel größer als die λ_h ist, kann ein Vorzeichenwechsel von δ, wie selbst die allgemeine Formel (36) lehrt, stets eintreten, sowie mindestens zwei aktive Ionengattungen vorhanden sind, welche verschiedenes Vorzeichen ihres Aktivitätskoeffizienten k_h besitzen. Ebenfalls können in diesen Fällen Maxima und Minima von δ bei Variation von λ auftreten.

Die Fälle sogenannter anomaler Rotationsdispersion sind tatsächlich mehrfach beobachtet worden (vgl. das oben zitierte Werk von Landolt, S. 135). G. H. v. Wyß (Wied. Ann. 33, S. 554, 1888) hat durch Mischung rechts- und linksdrehenden Terpentinöls anomale Rotationsdispersion erzeugt. Im allgemeinen muß jede Substanz in gewissen Schwingungsgebieten anomale Rotationsdispersion zeigen, nur werden allerdings diese Schwingungsgebiete nicht immer in den Bereich der experimentell herstellbaren Strahlung fallen.

6. Absorbierende aktive Körper. Wenn die Wellenlänge λ in der Nähe einer Eigenwellenlänge λ_h einer aktiven Ionengattung liegt, so wird nach (36) die Rotation δ der Polarisationsebene sehr groß. In diesem Falle muß aber Rücksicht auf die oben S. 372 vernachlässigten Reibungskoeffizienten a_h genommen werden. Ebenfalls müssen die a_h berücksichtigt werden, falls der Körper breite Absorptionsgebiete zeigt. In diesen Fällen wird sowohl ε als f in den Formeln (10) komplex, nämlich

$$
(39) \quad \begin{aligned}
\varepsilon &= 1 + \Sigma \frac{\vartheta_h \mathfrak{N}_h}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}}, \\
f &= \Sigma \frac{\vartheta_h f_h' \mathfrak{N}_h}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}}.
\end{aligned}
$$

Die Größe p der Formeln (11) ist daher ebenfalls komplex anzunehmen. Schreibt man sie in der Form (vgl. S. 342):

$$
(40) \qquad p = \frac{1 - i\varkappa}{V},
$$

so bedeutet V Fortpflanzungsgeschwindigkeit, $\varkappa$ Absorptionsindex der Wellen. Da es zwei verschiedene Werte p gibt, welche durch (16 und 17) gegeben sind, so gibt es also auch zwei verschiedene Absorptionsindizes $\varkappa'$ und $\varkappa''$, welche für eine links- und eine rechts-zirkularpolarisierte Welle gelten. Dies ist in der Tat von Cotton (Compt. rend. 120, p. 989, 1044). — Ann. de chim. et de phys. [7] 8, p. 347, 1896) bei Lösungen von Kupfertartrat und Chromtartrat in Kalilauge beobachtet worden. Daß diese Lösungen auch anomale Rotationsdispersion zeigten, erscheint nach dem Vorhergehenden leicht verständlich, da die starke Absorption anzeigt, daß λ dem Gebiete der Eigenschwingungen naheliegt.

Nach (16), (17) und (18) ist, wenn man die beiden Brechungsindizes n', n'' für links- und rechts-zirkularpolarisierte Wellen einführt:

$$
(41) \qquad c(p'' - p') = n'' - n' - i(n''\varkappa'' - n'\varkappa') = \frac{2f}{\tau c} = \frac{4\pi f}{\lambda}.
$$

Ist ein scharfer Absorptionsstreifen vorhanden, dem nach Früherem ein kleines a_h entspricht, so wird der Unterschied von $\varkappa''$ und $\varkappa'$ für den Absorptionsstreifen selbst sehr bedeutend. Denn für $\tau^2 = b_h$ folgt aus (42) und (44):

$$
(42) \qquad n'' - n' = 0, \quad n''\varkappa'' - n'\varkappa' = \frac{2\vartheta_h f_h' \mathfrak{N}_h}{a_h \cdot c}.
$$

Liegt τ weiter von der Eigenperiode τ_h entfernt, und ist a_h genügend klein, so daß man nur bis auf erste Ordnung in $\varkappa$ oder a_h zu entwickeln braucht, so wird nach (41) und (42) das Dispersionsgesetz für die Differenz der Absorptionskoeffizienten von der Form:

$$n'' \varkappa'' - n' \varkappa' = \lambda^2 \Sigma \frac{a_h}{(\lambda^2 - \lambda_h^2)^2} \tag{43}$$

Bei Variation des λ können Vorzeichenwechsel, ferner Maxima und Minima von $n'' \varkappa'' - n' \varkappa'$ eintreten, sobald mehrere Ionenarten mit verschiedenem Vorzeichen ihres Aktivitätskoeffizienten f_h' vorhanden sind.

Übrigens sind die Unterschiede in der Absorption der rechts- und links-zirkularpolarisierten Wellen immer nur klein gegen die Absorptionen selber.

Denn man leitet aus (16) und (17), wenn man f^2 vernachlässigt, und falls nur ein Absorptionsstreifen vorhanden ist, leicht ab

$$\frac{n'' \varkappa'' - n' \varkappa'}{n'' \varkappa'' + n' \varkappa'} = \frac{4 \pi f_h'}{\lambda} n, \tag{44}$$

wobei n das Mittel aus n' und n'' bedeutet.

Es ist nun aber $f_h' : \lambda$ stets eine kleine Zahl.

Ferner ist zu bemerken, daß nicht jeder aktive Körper, welcher Absorptionsstreifen besitzt, die hier besprochenen Erscheinungen zu zeigen braucht. Denn dazu ist notwendig, daß dieselben Ionenarten, welche die Absorption veranlassen, auch aktiv sind. Es ist aber wohl denkbar, daß Absorption und Aktivität verschiedenen Ionengattungen ihre Entstehung verdanken.

Kapitel VII.

Magnetisch-aktive Körper.

A. Hypothese der Molekularströme.

1. Allgemeine Grundlage. Bei sämtlichen Körpern beobachtet man besondere optische Eigentümlichkeiten, wenn sie in starke Magnetfelder gebracht werden. Schon in rein magnetischer Hinsicht verhalten sich die verschiedenen Körper verschieden, näm-

ich hinsichtlich ihrer sogenannten Magnetisierungszahl μ (vgl. oben S. 255). Dieselbe ist größer als 1 bei paramagnetischen Körpern, kleiner als 1 bei diamagnetischen Körpern. Dies Verhalten hat zur Folge, daß ein Magnetfeld in paramagnetischen Körpern eine größere Dichte magnetischer Kraftlinien hervorruft, als im freien Äther, in diamagnetischen Körpern dagegen eine geringere Kraftliniendichte als im freien Äther. Zur Erklärung dieser Erscheinung hat man sich nach Ampère und Weber die Vorstellung gebildet, daß in paramagnetischen Körpern sogenannte Molekularströme vorhanden sind. Diese werden nach der hier benutzten Grundlage der Dispersionstheorie durch Rotationen der Ionenladungen hervorgerufen. Bei vorhandener äußerer magnetischer Kraft werden diese Molekularströme teilweise oder ganz gleich gerichtet, so daß die magnetischen Kraftlinien, welche diese Ströme erzeugen, sich gleichsinnig superponieren über die durch die äußere magnetische Kraft hervorgerufenen Kraftlinien.

Diamagnetische Körper hingegen sollen im unmagnetischen Zustande keine Molekularströme besitzen. Sowie aber diese Körper in ein Magnetfeld gebracht werden, so sollen durch Induktion Molekularströme erzeugt werden, welche sich in unveränderter Stärke erhalten, solange das äußere Magnetfeld unverändert bleibt; man kann sich vorstellen, daß die Ionenladungen in reibungslosen Bahnen rotieren können, so daß die Erhaltung dieser Molekularströme keinen Energieaufwand erfordert. Die Kraftlinien der durch eine Art Induktion hervorgerufenen Molekularströme wirken den Kraftlinien des äußeren Magnetfeldes entgegen, ebenso wie auch sonst die Induktionsströme nach der Lenzschen Regel immer in der Richtung fließen, daß sie die Veränderung der magnetischen Kraftlinien, welche durch eine äußere magnetische Kraft hervorgerufen wird, zu hemmen suchen.

Wenn wir die optischen Eigenschaften eines Körpers in einem starken, durch eine äußere magnetische Kraft hervorgerufenen Magnetfelde berechnen wollen, so haben wir also stets, sowohl bei para- als bei diamagnetischen Körpern, zu berücksichtigen, daß gewisse Ionengattungen in Rotation begriffen sind und Molekularströme bilden. Wenn wir e die Ladung eines rotierenden Ions einer Ionengattung 1 nennen, und T seine Umlaufsdauer, so ist die Stärke des von ihm hervorgerufenen Molekularstroms

(1) $$i = e : T.$$

Wenn nun ein solches, um einen Punkt $\mathfrak{P}$ rotierendes Ion von der elektrischen Kraft einer Lichtwelle getroffen wird, so muß es seine Bahn ändern. Wenn die Umlaufsdauer T sehr klein ist gegen die Schwingungsperiode des Lichtes, so bleibt die Bahn des Ions in ihrer Gestalt und Umlaufsdauer unverändert, das Ion rotiert aber jetzt um einen Punkt $\mathfrak{P}'$, welcher von $\mathfrak{P}$ um eine Strecke ξ in Richtung der elektrischen Kraft der Lichtwelle verschoben ist und periodisch wie die elektrische Kraft der Lichtwelle oszilliert. — Derselbe Effekt muß im Mittel eintreten, wenn die Umlaufsdauer T beliebig groß ist und nicht in rationalem Verhältnis zur Lichtperiode T steht. Von einer Drehung der Bahnebene durch die magnetische Kraft der Lichtwelle können wir absehen, da diese stets viel kleiner als die äußere magnetische Kraft ist. — Durch diese Verschiebung des Molekularstroms werden nun die magnetischen Kraftlinien, welche er erzeugt, mit verschoben, so daß dadurch eine besondere Induktionswirkung entsteht, welche wir berücksichtigen müssen, falls eine Lichtwelle auf Molekularströme trifft.

Wir können diese Induktionswirkung sofort berechnen, wenn wir die Kraftlinienzahl kennen, welche an den Molekularströmen haftet.

Diese ist nun leicht zu finden. Die Bahnen der Molekularströme seien alle parallel einer Ebene, welche senkrecht zu einer Richtung R, der Richtung der äußeren magnetischen Kraft, steht. Wir fassen zunächst eine Linie der Länge l parallel der Richtung R ins Auge. Auf derselben mögen $l \cdot \mathfrak{N}'$ Molekularströme (der Ionengattung 1) liegen, $\mathfrak{N}'$ bezeichnet also die Anzahl Molekularströme auf der Längeneinheit. Diese Ströme kann man als ein Solenoid auffassen, q sei der Querschnitt der Strombahn, d. h. des Solenoids. Die Kraftlinienzahl in diesem Solenoid ist[1])

$$M = 4\pi \mathfrak{N}' iq : c.$$

Wenn nun auf der Flächeneinheit $\mathfrak{N}''$ solcher Solenoide vorhanden sind, so ist die Anzahl magnetischer Kraftlinien auf der Flächeneinheit, welche diesen Molekularströmen anhaftet,

$$M_1 = 4\pi \frac{\mathfrak{N}' \mathfrak{N}'' iq}{c} = 4\pi iq \frac{\mathfrak{N}}{c}$$

1) Die Kraftlinien eines Solenoids sind $4\pi niq$, falls n die Anzahl Windungen pro Längeneinheit ist und i die Stromstärke nach elektromagnetischem Maß bedeutet. Da hier i elektrostatisch definiert ist, so tritt c als Divisor auf.

wobei $\mathfrak{N}$ die Anzahl der rotierenden Ionen der Gattung 1 in der Volumeneinheit bedeutet.

Die Komponenten von M_1 nach den Koordinatenrichtungen sind:

$$(2)\quad \alpha_1 = \frac{4\pi}{c} i q \mathfrak{N} \cos(Kx), \quad \beta_1 = \frac{4\pi}{c} i q \mathfrak{N} \cos(Ky), \quad \gamma_1 = \frac{4\pi}{c} i q \mathfrak{N} \cos(Kz).$$

2. Herleitung der Differentialgleichungen. Wir halten fest an den Grundgleichungen (7) und (11) der Maxwellschen Theorie (vgl. S. 252, 254):

$$(3)\qquad \frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \text{ usw.,} \quad \frac{4\pi}{c} s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \text{ usw.}$$

Während aber bei den bisher betrachteten Erweiterungen der Maxwellschen Theorie nur der Ausdruck j_x für die elektrische Stromdichte durch die Ionenhypothese modifiziert wurde, die magnetische Stromdichte s_x dagegen beständig gleich $1/_4 \pi \cdot \partial\alpha/\partial t$ war, so muß hier, bei der Vorstellung rotierender Ionen, auch s_x eine andere Form annehmen. $4\pi j_x$ und $4\pi s_x$ sind nach (12) auf S. 254 stets definiert durch die Änderung der elektrischen bzw. magnetischen Kraftliniendichte in der Zeiteinheit.

Um nun hier $4\pi s_x$ zu berechnen, ist zu berücksichtigen, daß es aus mehreren Anteilen zusammengesetzt ist. Die Änderung des Kraftlinienverlaufes im Äther, welche die Lichtwelle direkt hervorruft, gibt den Anteil $dy\,dz \cdot \partial\alpha/\partial t$ zum Kraftlinienfluß durch das Rechteck $dy\,dz$. Hierzu kommen nun aber noch Anteile, welche durch die von der Lichtwelle bewirkte Bewegung der Rotationsmittelpunkte $\mathfrak{P}$ der Ionenbahnen veranlaßt werden, da die Kraftlinien M_1 die Bewegung der $\mathfrak{P}$ mitmachen.

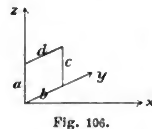


Fig. 106.

Um diese Anteile für s_x zu berechnen, fassen wir ein Rechteckselement $dy\,dz$ senkrecht zur x-Achse ins Auge und fragen, welches ist die Zahl der Kraftlinien, welche bei der Bewegung von $\mathfrak{P}$, deren Komponenten ξ, η, ζ sind, die 4 Seiten *abcd* des Rechtecks schneiden.

Berücksichtigen wir zunächst nur die Kraftlinien α_1 parallel zur x-Achse, so tritt in der Zeiteinheit durch die Seite a in das Rechteck ein die Kraftlinienzahl $\left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_a dz$, dagegen durch die Seite c tritt aus die Zahl $\left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_c dz$. Die unteren Indizes a, c

sollen bedeuten, daß der Wert des Termes $\alpha_1 \cdot \partial\eta/\partial t$ am Orte der betreffenden Seite des Rechtecks zu nehmen ist. Es ist daher

$$\left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_c = \left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_a + dy \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial\eta}{\partial t}\right).$$

Es ist hier α_1 noch unter dem Differentialzeichen nach y stehen gelassen, um zugleich den Fall der inhomogenen Medien, bei denen α_1, β_1, γ_1 Funktionen des Ortes sind, mit einzubegreifen. In homogenen Körpern sind α_1, β_1, γ_1 konstant. Die Kraftlinien α_1, welche bei ihrer Bewegung die Seiten a, c schneiden, bewirken also eine Vermehrung der Kraftlinienzahl, welche das Rechteck durchsetzt, im Betrage von: $-dydz \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\alpha_1 \cdot \frac{\partial\eta}{\partial t}\right)$. Analog geben die Kraftlinien α_1, welche bei ihrer Bewegung die Seiten b, d des Rechtecks schneiden, zum Kraftfluß durch das Rechteck den Anteil $-dydz \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1 \frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)$.

Die Kraftlinien β_1, welche parallel zur y-Achse laufen, können durch die Bewegung ξ von $\mathfrak{P}$ die Seiten des Rechtecks $abcd$ schneiden, und zwar nur die Seiten a und c. Die Kraftlinienzahl, welche das Rechteck durchsetzt, ändert sich nun nur durch eine Drehung der Kraftlinien β_1 um die z-Achse, und zwar im positiven Sinne, falls die Kraftlinien β_1 sich von der $+y$-Richtung etwas zur $+x$-Richtung drehen. Den Effekt dieser Drehung kann man dadurch berechnen, daß man von dem Ausdruck $\left(\beta_1 \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_c dz$, welcher die Kraftlinienzahl ergibt, welche die Seite c in der Zeiteinheit schneidet, subtrahiert den Ausdruck $\left(\beta_1 \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_a dz$, welcher die die Seite a schneidende Kraftlinienzahl darstellt. Da nun ist:

$$\left(\beta_1 \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_c = \left(\beta_1 \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_a + dy \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_1 \cdot \frac{\partial\xi}{\partial t}\right),$$

so folgt durch die Drehung von β_1 zum Kraftfluß durch das Rechteck der Anteil: $+dydz \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_1 \frac{\partial\xi}{\partial t}\right)$.

Analog folgt durch die Drehung der Kraftlinien γ_1 um die y-Achse zum Kraftfluß durch das Rechteck der Anteil: $+dydz \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_1 \frac{\partial\xi}{\partial t}\right)$.

Durch Addition aller Anteile zum Kraftfluß durch das Rechteck wird daher dieser Kraftlinienfluß:

$$dydz \left\{\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1 \frac{\partial\eta}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1 \frac{\partial\zeta}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_1 \frac{\partial\xi}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_1 \frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\right\}.$$

Die Änderung der Kraftlinienzahl in der Zeiteinheit für ein Flächenelement der Größe 1, welches senkrecht zur x-Achse liegt, ist daher, da bei konstantem äußerem Magnetfeld α_1, β_1, γ_1 von t nicht abhängen:

$$(4) \qquad 4\pi s_x = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma_1 \xi - \alpha_1 \zeta) - \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_1 \eta - \beta_1 \xi)\right\}.$$

Die Stromdichte wird, genau betrachtet, durch die Rotation der Ionen in komplizierter Weise modifiziert. Wenn aber die Rotationsdauer der Ionen nicht in einem rationalen Verhältnis zur Lichtperiode steht, so braucht man, um den mittleren Effekt zu finden, nur Rücksicht zu nehmen auf die Bewegung ξ, η, ζ des Rotationsmittelpunktes $\mathfrak{P}$.

Die Stromdichte j_x schreibt sich daher wie früher (vgl. Formel (7) der S. 366) in der Form:

$$(5) \qquad j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + e\mathfrak{N}\frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Für die Bewegung eines Punktes $\mathfrak{P}$, der Mittellage eines rotierenden Ions der Gattung 1, setzen wir dieselbe Gleichung an, wie oben S. 365:[1])

$$(6) \qquad m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = eX - \frac{4\pi e^2}{\vartheta}\xi - re^2\frac{\partial \xi}{\partial t},$$

wenn $\mathfrak{P}$ um eine Gleichgewichtlage schwingen kann (isolierende Ionen), dagegen verwenden wir die Gleichung (34) auf S. 379:

$$(7) \qquad m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = eX - re^2\frac{\partial \xi}{\partial t},$$

wenn $\mathfrak{P}$ einer konstanten Kraft X dauernd folgt, d. h. wenn e ein Leitungsion ist, wie es in Elektrizitätsleitern, z. B. Metallen, vorkommt. m bezeichnet die ponderabele Masse des Ions.

Wenn man es mit periodischen Änderungen zu tun hat, bei denen alle X und ξ proportional zu $e^{i\frac{t}{\tau}}$ sind, erhält man aus (6):

$$(8) \qquad e\frac{\partial \xi}{\partial t}\left\{1 + i\frac{r\vartheta}{4\pi\tau} - \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}\cdot\frac{1}{\tau^2}\right\} = \frac{\vartheta}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t},$$

---

1) Von einer Vervollständigung dieser Gleichung entsprechend der Gleichung (1') S. 371 können wir hier absehen, da dies für den vorliegenden Zweck nicht wesentlich ist.

dagegen aus (7):

$$e\frac{\partial\xi}{\partial t}\left(r+\frac{i}{\tau}\frac{m}{e^2}\right)=X=-i\tau\frac{\partial X}{\partial t}. \tag{9}$$

Setzt man daher, wie früher (vgl. S. 367 (12), S. 369 (17), S. 387 (43))

$$\frac{r\vartheta}{4\pi}=a,\quad \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}=b=\tau_1{}^2,\quad \frac{m}{e^2}=m', \tag{10}$$

so wird nach (5), falls e ein nicht leitendes Ion ist:

$$j_x=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1+\frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1+i\,{}^{a}/_{\tau}-{}^{b}/_{\tau^2}}\right\}, \tag{11}$$

wenn dagegen e ein leitendes Ion ist:

$$j_x=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1+\frac{4\pi\tau\mathfrak{N}}{i\,r-{}^{m'}/_{\tau}}\right\}. \tag{12}$$

In jedem Falle können wir setzen

$$j_x=\frac{\varepsilon'}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t},\quad j_y=\frac{\varepsilon'}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t},\quad j_z=\frac{\varepsilon'}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t}, \tag{13}$$

worin ε' eine im allgemeinen komplexe, von τ abhängige Größe ist.

Wir gewinnen ferner aus (1), (2) und (8) für ein isolierendes Ion:

$$\gamma_1\,\xi=\frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1+i\,{}^{a}/_{\tau}-{}^{b}/_{\tau^2}}\cdot\frac{q}{c\mathrm{T}}\cos(Kz)\,X, \tag{14}$$

aus (9) erhalten wir für ein leitendes Ion:

$$\gamma_1\,\xi=\frac{4\pi\tau\mathfrak{N}}{ir-{}^{m'}/_{\tau}}\cdot\frac{q}{c\mathrm{T}}\cos(Kz)\,X. \tag{14}$$

In jedem Falle können wir setzen

$$\gamma_1\,\xi=\nu\cos(Kz)\,X, \tag{16}$$

wobei ν eine im allgemeinen komplexe Größe bedeutet, welche von τ abhängt. Analog kann man die Produkte $\alpha_1\,\zeta$ usw. schreiben. Setzt man noch

$$\nu\cos(Kx)=\nu_x,\quad \nu\cos(Ky)=\nu_y,\quad \nu\cos(Kz)=\nu_z, \tag{17}$$

so werden nach (13), (4) und (16) die Fundamentalgleichungen (3):

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha+\frac{\partial}{\partial z}(\nu_z X-\nu_x Z)-\frac{\partial}{\partial y}(\nu_x Y-\nu_y X)\right\}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},\\
(18)\quad &\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta+\frac{\partial}{\partial x}(\nu_x Y-\nu_y X)-\frac{\partial}{\partial z}(\nu_y Z-\nu_z Y)\right\}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\gamma+\frac{\partial}{\partial y}(\nu_y Z-\nu_z Y)-\frac{\partial}{\partial x}\nu_z X-\nu_x Z)\right\}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},
\end{aligned}
$$

$$
(19)\quad \frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z},\quad \frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x},\quad \frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}.
$$

Sind mehrere Molekülgattungen vorhanden, so gelten dieselben Formeln (18) und (19), aber die Konstanten ε' und ν bestehen aus Summen:

$$
(20)\quad \varepsilon'=1+\Sigma\frac{\mathfrak{N}_h\vartheta_h}{1+i\frac{a_h}{\tau}-\frac{b_h}{\tau^2}}+4\pi\tau\Sigma\frac{\mathfrak{N}_h}{ir_k-\frac{m'_k}{\tau}},
$$

$$
(21)\quad \nu=\frac{1}{c}\Sigma\frac{\mathfrak{N}_h\vartheta_h}{1+i\frac{a_h}{\tau}-\frac{b_h}{\tau}}\cdot\frac{q_h}{T_h}+\frac{4\pi\tau}{c}\Sigma\frac{\mathfrak{N}_h}{ir_k-\frac{m'_k}{\tau}}\frac{q_k}{T_k}.
$$

Der Index h bezieht sich auf die isolierenden (nicht leitenden) Ionen, der Index k auf die leitenden Ionen. T_h ist mit verschiedenem Vorzeichen einzuführen, je nachdem das positiv geladene rotierende Ion die Kraftlinien des äußeren magnetischen Feldes verstärkt (T_h positiv), oder schwächt (T_h negativ). Bei einem negativ geladenen Ion ist T_h negativ zu nehmen, wenn die Kraftlinien des Molekularstromes in gleichem Sinne, wie die des äußeren Magnetfeldes, liegen. Bei rein paramagnetischen Ionen ist daher T_h positiv für die positiv geladenen Ionen, negativ für die negativ geladenen Ionen. Bei rein diamagnetischen Ionen ist es gerade umgekehrt. Ferner ist q_h als abhängig anzusehen von der Stärke des äußeren Magnetfeldes, denn bei Magnetisierung, welche nicht bis zur Sättigung getrieben ist, sind nicht alle Molekularströme parallel gerichtet, was wir am einfachsten dadurch ausdrücken, daß dann q_h kleiner ist. q_h ist daher proportinal zur Magnetisierung des Körpers anzunehmen. — Nach ihrer Herleitung (vgl. oben S. 411) gelten die Gleichungen (18), (19) ganz allgemein, d. h. auch in inhomogenen Körpern, bei denen ε' und ν Funktionen des Ortes sind.

3. Die magnetische Drehung der Polarisationsebene. Wir wollen den Fall annehmen, daß die Lichtstrahlen parallel zur Magnetisierungsrichtung liegen sollen. Als solche wählen wir die

z-Achse. Es hängt dann X, Y, α, β nur von z und t ab, falls ebene Wellen nach der z-Achse sich fortpflanzen, ferner ist $Z = \gamma = 0$. Ferner ist

$$\nu_x = \nu_y = 0\,, \quad \nu_z = \nu\,,$$

daher werden die Fundamentalgleichungen (18), (19):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha + \nu\frac{\partial X}{\partial z}\right\} &= \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta + \nu\frac{\partial Y}{\partial z}\right\} &= -\frac{\partial X}{\partial z}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \tag{23}$$

Differentiiert man die Gleichungen nach t und setzt für $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ ihre Werte nach (22), so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon'}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\nu}{c}\frac{\partial^3 Y}{\partial t\,\partial z^2}, \\ \frac{\varepsilon'}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \frac{\nu}{c}\frac{\partial^3 X}{\partial t\,\partial z^2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Zur Integration setzen wir wie oben S. 395:

$$X = M e^{\frac{i}{\tau}(t - pz)}, \quad Y = N e^{\frac{i}{\tau}(t - pz)}. \tag{25}$$

Dann ergibt (24):

$$\begin{aligned} \varepsilon' M &= p^2 c^2 \left(M + i\frac{\nu}{c\tau} N\right), \\ \varepsilon' N &= p^2 c^2 \left(N - i\frac{\nu}{c\tau} M\right). \end{aligned}$$

Diesen Gleichungen kann man durch zwei Wertsysteme genügen, nämlich durch:

$$p^2 c^2 \left(1 + \frac{\nu}{c\tau}\right) = \varepsilon', \quad M = i N, \tag{26}$$

und

$$p^2 c^2 \left(1 - \frac{\nu}{c\tau}\right) = \varepsilon', \quad M = -i N. \tag{27}$$

Nach der oben S. 396 gegebenen Interpretation der dortigen analogen Gleichungen (12) und (13) pflanzen sich also eine rechts- und eine linkszirkularpolarisierte Welle mit verschiedenen Ge-

schwindigkeiten fort. Die erste Welle (26) ist links-zirkularpolarisiert, ihr zugehöriges p ist

$$p'c = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{1 + \frac{\nu}{c\tau}}}. \tag{28}$$

Das zugehörige p der rechts-zirkularpolarisierten Welle ist

$$p''c = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{1 - \frac{\nu}{c\tau}}}. \tag{29}$$

Durch Superposition beider zirkularpolarisierten Wellen ergibt sich, wenn wir zunächst annehmen, daß ε' nnd ν, d. h. auch p' und p'' reell sind, linearpolarisiertes Licht, dessen Polarisationsebene sich beim Fortschreiten nach z gleichmäßig dreht um den Winkel

$$\delta = \frac{z}{\tau} \frac{p'' - p'}{2}. \tag{30}$$

Wenn $\nu : c\tau$ klein gegen 1 ist, wie es im allgemeinen stets der Fall ist, so erhält man aus (30):

$$\delta = \frac{\nu \sqrt{\varepsilon'}}{2c^2\tau^2} z. \tag{30'}$$

Bei positivem ν ist der Drehungssinn von rechts nach links. d. h. dem Uhrzeiger entgegen, wenn man der Fortpflanzung des Lichtes entgegenblickt. In gleichem Sinne rotieren bei Magnetisierung nach der positiven z-Achse die positiven, paramagnetischen Ionen. Wenn also ν positiv ist, so erfolgt eine Drehung der Polarisationsebene im Sinne der paramagnetischen Molekularströme.

Da der Drehungssinn nur von der Magnetisierungsrichtung abhängt, so geht bei bestimmter Magnetisierung des Körpers die Drehung der Polarisationsebene weiter, wenn die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes umgekehrt wird. Läßt man daher linearpolarisiertes Licht in einen magnetisierten Körper einfallen und an der Hinterfläche desselben reflektieren, so ist die Polarisationsebene des an der Vorderfläche wieder austretenden Lichtes doppelt gedreht gegen die ursprüngliche Lage. — Bei einem natürlich-aktiven Körper wäre bei dieser Anordnung eine Drehung der Polarisationsebene nicht vorhanden. Denn in einem natürlich-

aktiven Körper ist der Sinn der Drehung der Polarisationsebene, wenn man immer der Fortpflanzungsrichtung entgegensieht, stets derselbe, d. h. die Drehung nach ihrer absoluten Lage wechselt mit der Fortschreitungsrichtung der Wellen.

Ob nun die Drehung δ im Sinne der paramagnetischen Molekularströme erfolgt, oder ihnen entgegen, ist aus dem Magnetisierungscharakter des Körpers (para- oder diamagnetisch) nicht zu bestimmen, denn das Vorzeichen von ν kann man aus der Magnetisierungsdichte μ des Körpers nicht berechnen, sobald mehr als eine rotierende Ionengattung vorhanden ist.[1]) Die Magnetisierungszahl μ ist nach (19) der S. 256 dadurch definiert, daß die gesamte Kraftlinienzahl M_z nach der z-Achse gleich $\mu\gamma$ ist. Nach (2) ist nun bei Magnetisierung nach der z-Achse die gesamte Kraftlinienanzahl der Flächeneinheit (die sogenannte Induktion):

$$M_z = \mu\gamma = \gamma + \frac{4\pi}{c}\Sigma iq\mathfrak{N} = \gamma + \frac{4\pi}{c}\Sigma e\mathfrak{N}\frac{q}{\mathrm{T}}. \tag{31}$$

Hierdurch ist die Magnetisierungszahl μ anschaulich interpretiert. Je nachdem

$$\frac{4\pi}{c}\Sigma e\mathfrak{N}\frac{q}{\mathrm{T}} \gtrless 0, \tag{32}$$

ist daher der Körper para- oder diamagnetisch. Aus dem Vorzeichen dieser Summe kann man aber nicht auf das Vorzeichen von ν schließen. — Nehmen wir z. B. den einfachsten Fall, daß zwei nicht leitende paramagnetische Ionengattungen 1 und 2 vorhanden sind, es sei $e_1 = -e_2 = e$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}$, $\mathrm{T}_1 = -\mathrm{T}_2 = \mathrm{T}$, $q_1 = q_2 = q$. Dann wird nach (31):

$$(\mu - 1)\gamma = \frac{4\pi}{c}\cdot 2e\mathfrak{N}\frac{q}{\mathrm{T}} > 0.$$

Nach (21) ist aber, wenn wir a_h und b_h vernachlässigen:

$$\nu = \frac{\mathfrak{N}}{c}\frac{q}{\mathrm{T}}(\vartheta_1 - \vartheta_2).$$

1) Auf diesen Punkt hat auch Reiff in seinem Buche: „Theorie molekularelektrischer Vorgänge" 1896 aufmerksam gemacht. Der Reiffsche Standpunkt unterscheidet sich dadurch von dem hier benutzten, daß er nicht rotierende Ionen, sondern drehbare Molekularmagnete voraussetzt, welche nicht mit elektrischer Ladung behaftet sind.

Das Vorzeichen von ν hängt also von der Differenz der beiden Dielektrizitätskonstanten $\mathfrak{N}\vartheta_1$ und $\mathfrak{N}\vartheta_2$ ab.

In der Tat ergeben auch die Beobachtungen, daß der Charakter der Magnetisierbarkeit nicht auf den Sinn der magnetischen Drehung der Polarisationsebene schließen läßt.

4. Die Dispersion der magnetischen Rotationspolarisation. Führt man die Wellenlänge $\lambda_0 = Tc$ der benutzten Lichtsorte im Vakuum ein, so schreibt sich (30'):

$$\delta = \frac{2\pi^2 \nu \sqrt{\varepsilon'}}{\lambda_0^2} z = \frac{2\pi^2 \nu n}{\lambda_0^2} z, \tag{33}$$

wobei $\sqrt{\varepsilon'} = n$ den Brechungsindex des (unmagnetisierten) Körpers bezeichnet.

Wenn man zunächst n als konstant annimmt, was in roher Annäherung gestattet ist, so würde auch ν als konstant anzusehen sein. Dann ist also δ umgekehrt proportional zu λ_0^2, analog wie bei der natürlichen Rotationspolarisation. Als rohe Annäherung kann man dies wirklich annehmen.

Schreibt man aber $\varepsilon' = n^2$ in der Form[1]) (es ist λ die Wellenlänge in Luft, anstatt λ_0 eingeführt):

$$n^2 = 1 + \frac{A_1}{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} + \frac{A_2}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2} + \frac{A_3}{1 - \left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)^2} + \cdots, \tag{34}$$

so wird nach (21):

$$\nu = \frac{A_1'}{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} + \frac{A_2'}{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2} + \frac{A_3'}{1 - \left(\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)^2} + \cdots, \tag{35}$$

wobei die A_1', A_2', A_3'.. Konstanten sind, welche unabhängig von den A_1, A_2, A_3... sind.

Die Anzahl der Konstanten, welche in die Dispersionsformel der magnetischen Rotationspolarisation eingehen, hängt also von der Konstantenanzahl ab, welche zur Darstellung der Dispersion des Brechungsindex n notwendig sind, d. h. von der Anzahl der Eigenschwingungsperioden, welche zu berücksichtigen sind.

Innerhalb des sichtbaren Lichtes kommt man in den meisten Fällen damit aus, daß man eine ultraviolette Eigenschwingung λ_1

1) Vgl. Formel (19) auf S. 373. Diese Form gilt nur im Bereich der normalen Dispersion und falls keine Leitungsionen zu berücksichtigen sind.

annimmt, und außerdem noch beliebig viele ultraviolette Eigenschwingungen, deren λ_2, λ_3. usw. gegen λ zu vernachlässigen ist. Dann wird die Dispersionsformel (34):

$$n^2 = 1 + A_2 + A_3 + .. + \frac{A_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2}$$
$$= 1 + A_1 + A_2 + A_3 + .. + \frac{A_1 \lambda_1^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2},$$

oder

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_1^2}. \tag{36}$$

In diesem Falle muß sich nach (35) die Dispersionsformel für ν schreiben:

$$\nu = \frac{A_1' \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + A_2' + A_3' + .. = a' + \frac{b' \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2}, \tag{37}$$

d. h. die Dispersionsformel für die magnetische Drehung δ nach (33) in der Form, falls $2\pi^2 z = 1$ gesetzt wird:

$$\delta = n \left(\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b'}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \right). \tag{38}$$

Dies ist eine zweikonstantige Dispersionsformel, da λ_1 aus der Dispersion des n zu entnehmen ist. Sie genügt in der Tat den Beobachtungen gut,[1]) wie folgende Tabellen lehren:

Schwefelkohlenstoff.

$\lambda_1 = 0{,}212\,\mu$, $\lambda_1^2 = 0{,}0450$,
$a = 2{,}516$, $b = 0{,}0433$,
$a' = -0{,}0136$, $b' = +0{,}1530$.

Spektr. Linie	n ber.	n beob.	δ ber.	δ beob.
A	1,6115	1,6118	—	—
B	1,6179	1,6181	—	—
C	1,6210	1,6214	0,592	0,592
D	1,6307	1,6308	0,762	0,760
E	1,6439	1,6438	0,999	1,000
F	1,6560	1,6555	1,232	1,234
G	1,6805	1,6800	1,704	1,704
H	1,7033	1,7032	—	—

1) Eine Zusammenstellung anderer, bisher vorgeschlagener, einkonstantiger Dispersionsformeln hat Poincaré gegeben in der Ztschrft. L'éclairage électrique XI, S. 488, 1897. Diese Formeln stellen die Beobachtungen sämtlich nicht völlig befriedigend dar. — Messungen der magnetischen Rotationsdispersion im Ultrarot hat für die Kristalle Flußspat, Sylvin und Steinsalz Ulfilas Meyer ausgeführt (Ann. d. Phys. **30**, 607, 1909).

Kreosot.

$\lambda_1 = 0{,}1845\,\mu$, $\lambda_1{}^2 = 0{,}0340$,
$a = 2{,}2948$, $b = 0{,}0227$,
$a' = -0{,}1799$, $b' = +0{,}3140$.

Spektr. Linie	n ber.	n beob.	δ ber.	δ beob.
B	1,5319	1,5319	0,515	—
C	1,5336	1,5335	0,573	0,573
D	1,5386	1,5383	0,745	0,758
E	1,5454	1,5452	0,990	1,000
F	1,5515	1,5515	1,226	1,241
G	1,5636	1,5639	1,723	1,723
H	1,5744	1,5744	2,206	—

Wenn man, was das einfachste ist, die Vorstellung zugrunde legt, daß eine positiv geladene und eine negativ geladene rotierende Ionenart vorhanden ist, so zeigt die Verschiedenheit des Vorzeichens von a' und b', daß diese Ionen in entgegengesetztem Sinne rotieren.

Die Dispersionsformeln (33), (34) und (35) zeigen, daß die Drehung δ sehr groß wird, wenn λ in der Nähe einer Eigenwellenlänge λ_1 liegt. Dieses Resultat ist in der Tat von Macaluso und Corbino[1]) am Natriumdampf bestätigt worden. Indes werden ihre Beobachtungen nicht durch die hier entwickelte Theorie dargestellt. Wie nämlich die Dispersionsformel (38) ergibt, und wie auch eine strengere Diskussion zeigt, bei der die Reibungsglieder a/τ nicht vernachlässigt werden, besitzt die Drehung δ nach der Theorie ein verschiedenes Vorzeichen zu beiden Seiten des Absorptionsstreifens, d. h. für $\lambda \gtrless \lambda_1$. Nach den Beobachtungen ist aber das Vorzeichen von δ zu beiden Seiten des Absorptionsstreifens dasselbe.

Dies zeigt daher, daß für diesen Fall, d. h. wohl überhaupt für alle Gase und Dämpfe unser bisheriger Ansatz

1) Macaluso und O. M. Corbino, C. R. **127**, S. 548, 951, 1898. — Rend. d. R. Accad. d. Linc. (5) **7**, S. 293, 1898; **8**, S. 38, 116, 1899. — N. Cim. (4) **9**, S. 384, 1899. — O. Corbino, Rend. d R. Accad. d. Linc. **10**, S. 137, 1901. — N. Cim. (5) **3**, S. 1, 1902. — Vgl. dazu auch H. Becquerel, C. R. **127**, S. 647, 899, 953, 1898. — R. Ladenberg fand (Ann. d. Phys. **38**, 249, 1912), daß die Dispersion der magnetischen Rotationsdispersion in leuchtendem Wasserstoff sich ebenso verhält wie die von Metalldämpfen, daß also offenbar die obige

die Erscheinungen nicht darstellt. Zu diesem Schluß führt auch noch ein zweiter Umstand, der im folgenden Paragraphen behandelt wird.

5. Magnetisierung senkrecht zu den Lichtstrahlen. Als Magnetisierungsrichtung wählen wir die z-Achse, als die der Lichtstrahlen die x-Achse. Dann hängt alles nur von x und t ab, und es ist $\nu_x = \nu_y = 0$, $\nu_z = \nu$. In der letzten der Gleichungen (18) (S. 414) würde allein der Koeffizient ν vorkommen, nämlich in der Verbindung $-\nu \frac{\partial X}{\partial x}$, doch dies Glied verschwindet, weil wegen der ersten der Gleichungen (19) $X = 0$ ist. Daher hat nach dem bisherigen Ansatz die Magnetisierung überhaupt keinen Einfluß auf das optische Verhalten, wenn die Lichtwellen sich senkrecht zur Magnetisierungsrichtung fortpflanzen. Andrerseits ist aber ein solcher Einfluß neuerdings bei Metalldämpfen nachgewiesen worden. Dies bildet eine zweite Ursache dafür, daß wir noch nach einer anderen Hypothese zur Darstellung der optischen Eigenschaften im Magnetfelde suchen.

Man könnte ja den bisherigen Ansatz dadurch erweitern, daß offenbar der magnetisierte Körper eine nicht isotrope Struktur erhält durch gegenseitige Anziehung seiner Molekularströme in der Kraftlinienrichtung. Indes führt eine andere Hypothese direkter und vollständiger zum Ziel. Auch diese stützt sich auf gewisse beobachtete Eigenschaften der Körper im Magnetfelde.

B. Hypothese des Halleffektes.

1. Allgemeine Grundlage. Wir lassen die Annahme rotierender Ionen fallen, benutzen aber wie früher die Vorstellung beweglicher Ionen. Ein starkes Magnetfeld muß nun deshalb besondere, auf die Ionen wirkende, ponderomotorische Kräfte ausüben, weil die bewegten Ionen elektrische Ströme repräsentieren und jedes Stromstück in einem Magnetfelde eine Kraft erfährt, welche senkrecht steht auf dem Stromstück und der Magnetisierungsrichtung. Infolgedessen suchen sich die Stromlinien in einem Magnetfelde seitlich zu verschieben gegen ihre Richtung. Diese Erscheinung ist als Halleffekt tatsächlich bei allen Metallen, besonders bei Wismut und Antimon, beobachtet worden.

Theorie der Molekularströme durch die S. 421ff. dargestellte des Halleffektes zu ersetzen ist.

Wenn ein Stromstück der Länge dl und der Stromstärke i_m (nach elektromagnetischem Maße) senkrecht schneidet die Kraftlinien eines Magnetfeldes der Intensität $\mathfrak{H}$,[1]) so ist die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$ auf das Stromelement:

$$\mathfrak{K} = i_m \, dl \, \mathfrak{H} = \frac{i}{c} \, dl \, \mathfrak{H}, \tag{39}$$

falls i die Stromstärke nach elektrostatischem Maße ist. Bei der von uns (S. 252) festgesetzten Lage des Koordinatensystems geht $\mathfrak{K}$ nach der x-Achse, wenn i nach der y-Achse und $\mathfrak{H}$ nach der z-Achse läuft.

Wenn nun ein Ion der Ladung e in der Zeit dt sich um $d\eta$ nach der y-Achse verschiebt, so ist auf der Länge $d\eta$ nach S. 366 eine Stromstärke $i = e\mathfrak{N}' \frac{\partial \eta}{\partial t}$ vorhanden, wobei $\mathfrak{N}'$ die Anzahl der Ionen der Längeneinheit ist. Daher ist nach (39), da $dl = d\eta$ ist:

$$\mathfrak{K} = \frac{e}{c} \mathfrak{N}' d\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathfrak{H}.$$

Diese Kraft wirkt auf sämtliche Ionen, die auf der Strecke $d\eta$ liegen. Ihre Anzahl ist $\mathfrak{N}' d\eta$. Die auf ein Ion wirkende Kraft nach der x-Achse ist also:

$$\mathfrak{K}_x = \frac{e}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} \mathfrak{H}_z. \tag{40}$$

Wenn noch eine Magnetisierung nach der y-Achse bestände, so käme durch die Verschiebung ζ noch die Kraft hinzu:

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{e}{c} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \mathfrak{H}_y. \tag{41}$$

Diese beiden Terme (40) und (41) sind auf der rechten Seite der Bewegungsgleichungen (6) oder (7) (S. 412) der Ionen hinzu zu addieren. Nehmen wir nur isolierende, keine Leitungs-Ionen an, wie es bei allen Körpern mit kleiner elektrischer Leitfähigkeit gestattet ist, so folgt daher

1) Wenn die Magnetisierungszahl μ des Raumes von 1 verschieden ist, so ist an Stelle von $\mathfrak{H}$ die Kraftliniendichte (die Induktion) einzusetzen.

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=eX-\frac{4\pi e^2}{\vartheta}\xi-re^2\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\mathfrak{H}_z-\frac{\partial\zeta}{\partial t}\mathfrak{H}_y\right),$$

und durch zyklische Vertauschung der Buchstaben:

$$m\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=eY-\frac{4\pi e^2}{\vartheta}\eta-re^2\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\mathfrak{H}_x-\frac{\partial\xi}{\partial t}\mathfrak{H}_z\right), \tag{42}$$

$$m\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=eZ-\frac{4\pi e^2}{\vartheta}\zeta-re^2\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\mathfrak{H}_y-\frac{\partial\eta}{\partial t}\mathfrak{H}_x\right).$$

2. Herleitung der Differentialgleichungen. Die Fundamentalgleichungen (3) der S. 410 bleiben, wie immer, unverändert. Da wir keine rotierende Ionen voraussetzen, die Ionen daher bei ihrer Bewegung keine magnetischen Kraftlinien mit sich führen, so ist die Magnetisierungszahl $\mu=1$ zu setzen, und es gilt die frühere Beziehung (vgl. S. 256):

$$4\pi s_x=\frac{\partial\alpha}{\partial t},\quad 4\pi s_y=\frac{\partial\beta}{\partial t},\quad 4\pi s_z=\frac{\partial\gamma}{\partial t}. \tag{43}$$

Ferner ist, wie früher (S. 366):

$$4\pi j_x=\frac{\partial}{\partial t}(X+4\pi\Sigma e\mathfrak{N}\xi),$$

$$4\pi j_y=\frac{\partial}{\partial t}(Y+4\pi\Sigma e\mathfrak{N}\eta), \tag{44}$$

$$4\pi j_z=\frac{\partial}{\partial t}(Z+4\pi\Sigma e\mathfrak{N}\zeta).$$

Die Gleichungen (3), (42), (43) und (44) enthalten die vollständige Theorie.[1])

Für periodische Zustandsänderungen und Benutzung der früheren Abkürzungen

$$\frac{r\vartheta}{4\pi}=a,\quad \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}=b, \tag{45}$$

schreibt sich (42):

$$e\xi\left(1+i\frac{a}{\tau}-\frac{b}{\tau^2}\right)-\frac{i\vartheta}{4\pi c\tau}(\eta\mathfrak{H}_z-\zeta\mathfrak{H}_y)=\frac{\vartheta}{4\pi}X. \tag{46}$$

1) Die allgemeinste Theorie ist zu erhalten aus dem oben unter A benutzten Ansatz rotierender Ionen in Verbindung mit dem System (42). Letzteres System kann, streng genommen, überhaupt nie fehlen, sobald bewegliche Ionen vorhanden sind und ein äußeres starkes Magnetfeld. Der Einfachheit halber ist aber hier der Ansatz A völlig getrennt vom Ansatz B.

Legt man die z-Achse in die Richtung des Magnetfeldes, so daß $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_y = 0$, $\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}$ wird, und benutzt man die Abkürzungen:

$$1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2} = \Theta, \quad \frac{\vartheta}{4\pi c\tau e}\mathfrak{H} = \Phi, \tag{47}$$

so wird nach (46):

$$\begin{aligned} e\xi\cdot\Theta - i\cdot e\eta\cdot\Phi &= \frac{\vartheta}{4\pi}X, \\ e\eta\cdot\Theta + i\cdot e\xi\cdot\Phi &= \frac{\vartheta}{4\pi}Y, \\ e\zeta\cdot\Theta \qquad\qquad &= \frac{\vartheta}{4\pi}Z. \end{aligned} \tag{48}$$

Dies kann man nach ξ, η, ζ auflösen und erhält:

$$\begin{gathered} 4\pi e\xi(\Theta^2 - \Phi^2) = \vartheta(\Theta X + i\Phi Y), \\ 4\pi e\eta(\Theta^2 - \Phi^2) = \vartheta(\Theta Y - i\Phi X), \\ 4\pi e\zeta\cdot\Theta = \vartheta Z. \end{gathered} \tag{49}$$

Daher wird nach (44):

$$\begin{aligned} 4\pi j_x &= \frac{\partial X}{\partial t}\left(1 + \sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}\Theta}{\Theta^2 - \Phi^2}\right) + i\frac{\partial Y}{\partial t}\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}\Phi}{\Theta^2 - \Phi^2}, \\ 4\pi j_y &= \frac{\partial Y}{\partial t}\left(1 + \sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}\Theta}{\Theta^2 - \Phi^2}\right) - i\frac{\partial X}{\partial t}\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}\Phi}{\Theta^2 - \Phi^2}, \\ 4\pi j_z &= \frac{\partial Z}{\partial t}\left(1 + \sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\Theta}\right). \end{aligned} \tag{50}$$

Wir wollen dies abkürzen in:

$$\begin{aligned} 4\pi j_x &= \varepsilon''\frac{\partial X}{\partial t} + i\nu\frac{\partial Y}{\partial t}, \\ 4\pi j_y &= \varepsilon''\frac{\partial Y}{\partial t} - i\nu\frac{\partial X}{\partial t}, \\ 4\pi j_z &= \varepsilon'\frac{\partial Z}{dt}. \end{aligned} \tag{51}$$

3. Lichtstrahlen parallel zur Magnetisierung. In diesem Falle hängt alles nur von z und t ab, und die Gleichungen (3), (43) und (51) ergeben:

$$\begin{gathered} \frac{1}{c}\left(\varepsilon''\frac{\partial X}{\partial t} + i\nu\frac{\partial Y}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\beta}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\left(\varepsilon''\frac{\partial Y}{\partial t} - i\nu\frac{\partial X}{\partial t}\right) = \frac{\partial\alpha}{\partial z}, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial z}, \quad \gamma = Z = 0. \end{gathered} \tag{52}$$

Eliminiert man α und β, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon''}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{i\nu}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \\ \frac{\varepsilon''}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + \frac{i\nu}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{53}$$

Setzt man zur Integration wie oben S. 395 u. 415:

$$X = Me^{\frac{i}{\tau}(t-pz)}, \quad Y = Ne^{\frac{i}{\tau}(t-pz)}, \tag{54}$$

so ergibt sich (53):

$$\varepsilon'' M = p^2c^2M - i\nu N, \quad \varepsilon'' N = p^2c^2N + i\nu M,$$

d. h. die zwei Wertsysteme:

$$\begin{aligned} p^2c^2 &= n'^2(1-i\varkappa')^2 = \varepsilon'' + \nu, \quad M = iN, \\ p^2c^2 &= n''^2(1-i\varkappa'')^2 = \varepsilon'' - \nu, \quad M = -iN. \end{aligned} \tag{55}$$

n', $\varkappa'$ entsprechen der links-, n'', $\varkappa''$ der rechts-zirkularpolarisierten Welle. Aus der Bedeutung, welche ε'' und ν nach (50) und (51) haben, folgt:

$$\begin{aligned} n'^2(1-i\varkappa')^2 &= 1 + \sum \frac{\vartheta\,\mathfrak{N}}{\Theta - \Phi}, \\ n''^2(1-i\varkappa'')^2 &= 1 + \sum \frac{\vartheta\,\mathfrak{N}}{\Theta + \Phi}. \end{aligned} \tag{56}$$

Ist τ nicht nahe bei einer Eigenschwingung, so kann man in Θ das imaginäre Glied $i \cdot a/\tau$ vernachlässigen, es ist daher $\varkappa' = \varkappa'' = 0$, und es wird, da Φ stets klein gegen 1, d. h. auch gegen Θ ist:

$$\begin{aligned} n'^2 &= 1 + \sum \frac{\vartheta\,\mathfrak{N}}{\Theta}\left(1 + \frac{\Phi}{\Theta}\right), \\ n''^2 &= 1 + \sum \frac{\vartheta\,\mathfrak{N}}{\Theta}\left(1 - \frac{\Phi}{\Theta}\right). \end{aligned} \tag{57}$$

Die Drehung δ der Polarisationsebene folgt nach (19) (S. 397) zu:

$$\delta = z\frac{\pi}{\lambda_0}(n'' - n') = z\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{n''^2 - n'^2}{n'' + n'}. \tag{58}$$

Setzt man das Mittel aus n'' und n' gleich n, so folgt:

$$\delta = z\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{n''^2 - n'^2}{2n}. \tag{59}$$

Daher ist nach (57):

$$\delta = -\frac{\pi}{n} \cdot \frac{z}{\lambda_0} \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N} \Phi}{\Theta^2}. \tag{60}$$

Dabei ist der Brechungsindex n bis auf erste Ordnung in Φ gegeben durch

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N}}{\Theta}. \tag{61}$$

4. Die Dispersion der magnetischen Drehung der Polarisationsebene. Durch Einführung der Werte von Θ und Φ nach (47) schreiben sich die letzten Gleichungen

$$\delta = -\frac{\pi}{2n} \frac{z}{\lambda_0^2} \mathfrak{H}_z \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N}}{\left(1 - \frac{b}{\tau^2}\right)^2} \cdot \frac{\vartheta}{e}, \tag{62}$$

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N}}{1 - \frac{b}{\tau^2}}. \tag{63}$$

In erster Annäherung ist daher, wie nach der Hypothese A, δ umgekehrt proportional zu λ_0^2.

Genügt (vgl. oben S. 419) zur Darstellung des n^2 die zweikonstantige Dispersionsformel:

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_1^2}, \tag{64}$$

(es ist anstatt λ_0 die Wellenlänge λ in Luft geschrieben), so muß sich nach (62) δ durch die zweikonstantige Dispersionsformel:

$$\delta = \frac{1}{n} \left(\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b' \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2} \right) \tag{65}$$

darstellen ssen. a' und b' müssen verschiedene Vorzeichen besitzen, wenn nur zwei verschiedene Ionenarten, eine positiv- und eine negativ-geladene, vorhanden wären. Dies wäre die einfachste Annahme, die man machen kann.

Die Formel (65) stellt die Beobachtungen an Schwefelkohlenstoff und Kreosot in folgender Weise dar:

Schwefelkohlenstoff.

$\lambda_1{}^2 = 0,0450 \quad a' = +0,1167 \quad b' = +0,2379.$

Spektr. Linie	δ ber.	δ beob.
C	0,592	0,592
D	0,760	0,760
E	0,996	1,000
F	1,225	1,234
G	1,704	1,704

Kreosot.

$\lambda_1{}^2 = 0,0340 \quad a' = -0,070 \quad b' = +0,380.$

Spektr. Linie	δ ber.	δ beob.
C	0,573	0,573
D	0,744	0,758
E	0,987	1,000
F	1,222	1,241
G	1,723	1,723

Der Anschluß der Theorie an die Beobachtungen ist fast ebenso gut, ein wenig schlechter, als der nach der Hypothese der Molekularströme erzielte Anschluß (vgl. oben S. 419 und 420).

Aus (63) folgt, wenn man b/τ^2 ersetzt durch $\lambda_h{}^2/\lambda^2$:

$$2n\frac{dn}{d\lambda} = 2\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\left(1-\frac{\lambda_h{}^2}{\lambda^2}\right)^2}\cdot\frac{\lambda_h{}^2}{\lambda^3}.$$

Da nun nach (31) und (33) oben S. 377 $\lambda_h{}^2 = \pi\frac{m\vartheta}{e'^2}$, so wird, falls für alle Ionengattungen $m:e'$ den gleichen Zahlwert hat, so daß man diesen Faktor vor das Summenzeichen setzen kann:

$$n\frac{dn}{d\lambda} = \frac{\pi}{\lambda^3}\cdot\frac{m}{e'}\sum\frac{\vartheta\mathfrak{N}}{\left(1-\frac{\lambda_h{}^2}{\lambda^2}\right)^2}\cdot\frac{\vartheta}{e'}$$

Daher ergibt (62):

$$\delta = -z\mathfrak{H}_e\frac{e'}{m}\cdot\frac{\lambda}{2c}\cdot\frac{dn}{d\lambda}. \tag{62'}$$

Es entsteht daher eine einkonstantige Dispersionsformel, aus der man $e':m$ berechnen kann. Nach dieser Formel, welche tatsächlich den Gang der Dispersion bei vielen

Substanzen wenigstens annähernd darstellt,[1]) hat Siertsema[2]) bei Luft, Kohlensäure, Wasserstoff, Wasser, Schwefelkohlenstoff, Quarz den Quotienten $e':m$ berechnet. Es ergaben sich für ihn Werte, die zwischen $e'/m = 0{,}75 \cdot 10^7$ bis $1{,}77 \cdot 10^7$ schwankten, also annähernd wiederum das für freie Elektronen charakteristische Verhältnis. Auch entspricht bei diesen Substanzen das Vorzeichen der beobachteten Drehung δ einer negativen Ladung e'.[3]). Nun kann zwar die Formel (62') für diese Substanzen keine ganz strenge sein, weil, wie es besonders bei Wasser eintritt, auch ultrarote Eigenschwingungen Einfluß auf den Brechungsindex haben und für diese e'/m einen viel kleineren Wert hat als für ultraviolette Eigenschwingungen (vgl. oben S. 378). Daher kann $m:e'$ nicht als gemeinsamer Faktor vor die Σ in der Formel für $dn:d\lambda$ gezogen werden. Annähernd ist dies aber um so mehr gestattet, bei je kleineren Wellenlängen die Drehung δ dargestellt werden soll. Daß daher die so berechneten Werte für $e':m$ noch untereinander schwanken, ist leicht in dieser Weise zu erklären, und daß sie annähernd mit dem aus Kathodenstrahlen erhaltenen Wert für $e':m$ übereinstimmen, bildet eine weitere, sehr interessante Bestätigung dafür, daß man die Dispersionserscheinungen von der universellen Elektronentheorie aus zahlenmäßig begründen kann.

Das in (65) aufgestellte Dispersionsgesetz fügt sich diesen Betrachtungen nicht ein. Denn wenn für eine Ionengattung $\lambda_h = 0$ ist, so müßte, bei konstantem $e':m$ für diese Ionengattung auch das zugehörige $\vartheta_h = 0$ sein. Daher müßte dann auch die Konstante $a' = 0$ sein. Annähernd fügt sich daher die Dispersion des Kreosot, für welches sich a' nach (65) sehr klein ergab ($a' = -0{,}070$), diesen Betrachtungen, d. h. der Formel (62'); bei Schwefelkohlenstoff zeigen sich aber stärkere Abweichungen, wie folgende Tabelle lehrt, in welcher die Zahlen der letzten Kolonne in willkürlichem relativem Maße gemessen sind:

1) Formal (ohne die physikalische Bedeutung des Faktors (e'/m) zu interpretieren, welches Siertsema zuerst getan hat), hat H. Becquerel dieses Dispersionsgesetz aufgestellt (C. R. 125, S. 679, 1897).

2) L. H. Siertsema, Commun. Labor. Leiden. Nr. 82, 1902. — Versag v. d. Afd. Naturk. d. Kon. Akad. v. Wetensch. de Amsterdam. S. 499, 1902.

3) Es ergibt sich nämlich die Drehung in dem oben S. 416 besprochenen Sinne positiv, d. h. im Sinne der das Magnetfeld ersetzenden Ströme. — Ulfilas Meyer (s. S. 419 Anm.) fand an Messungen im Ultrarot bei Steinsalz, Sylvin, Flußspat Werte von e'/m zwischen $1{,}21 \cdot 10^7$ und $1{,}51 \cdot 10^7$.

Schwefelkohlenstoff.

Spektr. Linie	$\frac{\delta}{\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dn}$
C	7,29
D	7,48
E	7,60
F	7,41
G	6,00

Die Inkonstanz der Zahlen der letzten Kolonne spricht also dafür, daß Formel (62′) nicht streng gültig ist. In der Tat haben bei Schwefelkohlenstoff ultrarote Eigenschwingungen merklich Einfluß auf den Brechungsindex. Wenn man daher $e' : m$ nach (62′) bei Schwefelkohlenstoff berechnet, so muß das Resultat je nach den benützten Farben etwas schwanken.

5. Die Wellenlänge liegt nahe bei einer Eigenwellenlänge. Wenn die Lichtperiode nahe bei einer Eigenschwingung liegt, so darf der Reibungsterm a/τ nicht vernachlässigt werden. Wir wollen annehmen, daß T nahe benachbart sei der Eigenperiode T_1 der Ionengattung 1, und setzen daher $\tau = \sqrt{b_1}\,(1+g) = \tau_1\,(1+g)$, wobei g klein gegen 1 sein soll. In den Formeln (56) kann man dann, da Φ kein ist, bei allen Gliedern der Σ, welche sich nicht auf die Ionengattung 1 beziehen, setzen:

$$\frac{1}{\theta - \Phi} = \frac{1}{1 - \frac{b}{\tau_1^2}}\left(1 + \frac{\Phi}{1 - \frac{b}{\tau_1^2}}\right), \tag{66}$$

so daß unter Benutzung der Abkürzungen:

$$1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N}}{1 - \frac{b}{\tau_1^2}} = A, \quad \sum \frac{\Phi \vartheta \mathfrak{N}}{\left(1 - \frac{b}{\tau_1^2}\right)^2} = A',$$
$$\frac{a_1}{\tau_1} = h, \quad \frac{\vartheta_1}{4\pi c \tau_1 e_1} \mathfrak{H} = \varphi, \quad \vartheta_1 \mathfrak{N}_1 = B; \tag{67}$$

aus (56) entsteht, wenn man nur auf erste Ordnung in g entwickelt und $g \cdot \varphi$ vernachlässigt gegen g oder φ:

$$n'^2 (1 - i\varkappa')^2 = A + A' + \frac{B}{2g + ih - \varphi}, \tag{68}$$

$$n''^2 (1 - i\varkappa'')^2 = A - A' + \frac{B}{2g + ih + \varphi}. \tag{69}$$

Der imaginäre Bestandteil der rechten Seite von (68) wird möglichst groß, d. h. es tritt für eine links-zirkularpolarisierte Welle maximale Absorption ein, falls ist:

$$2g = +\varphi, \text{ d. h. } \tau^2 = \tau_l^{\,2} = \tau_1^{\,2}(1+\varphi), \tag{70}$$

für eine rechts-zirkularpolarisierte Welle tritt dagegen maximale Absorption auf bei

$$2g = -\varphi, \text{ d. h. } \tau^2 = \tau_r^{\,2} = \tau_1^{\,2}(1-\varphi). \tag{71}$$

Durch die Magnetisierung parallel den Lichtstrahlen wird also bei einfallendem natürlichem Licht ein ursprünglich vorhandener schmaler Absorptionsstreifen verdoppelt. In dem einen Streifen ist links-zirkularpolarisiertes Licht stark absorbiert, so daß das durchgehende Licht geschwächt erscheint und rechts-zirkularpolarisiert ist, in dem anderen Absorptionsstreifen fehlt das rechts-zirkularpolarisierte Licht.

Dasselbe Resultat würde sich auch nach der Hypothese A der Molekularströme ergeben.

Wenn g nicht sehr klein und der absolute Betrag von $2g$ größer als φ ist, so daß h neben $2g \pm \varphi$ zu vernachlässigen ist, so kann man in (68), (69) $\varkappa'$ und $\varkappa'' =$ Null setzen, vorausgesetzt, daß die rechten Seiten positiv sind. Man erhält also in einiger Entfernung vom Absorptionsstreifen:

$$n'^2 = A + A' + \frac{B}{2g-\varphi}, \quad n''^2 = A - A' + \frac{B}{2g+\varphi}.$$

[Damit die rechten Seiten stets positiv seien, muß der absolute Betrag von A den absoluten Betrag von $\frac{B}{2g \pm \varphi}$ übertreffen.] Nach Formel (59) auf S. 425 ergibt sich die Drehung δ der Polarisationsebene:

$$\delta = -\frac{\pi}{n} \cdot \frac{z}{\lambda_0}\left(A' + B\frac{\varphi}{4g^2-\varphi^2}\right),$$

wobei

$$n = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{A + \frac{B}{2g-\varphi}} + \sqrt{A + \frac{B}{2g+\varphi}}\right). \tag{72}$$

Hiernach erscheint die Drehung δ zu beiden Seiten des Absorptionsgebietes ($\tau = \tau_1$) von gleichem Vorzeichen und nahezu

symmetrisch verteilt, da δ annähernd nur von g^2 abhängt. Dasselbe Resultat ergibt sich aus der Dispersionsformel (62). Wenn δ positiv ist, so erfolgt nach S. 416 die Drehung im Sinne der (paramagnetischen) Ampèreschen Molekularströme. Da das Vorzeichen von δ durch den kleinen Term A' nicht bestimmt wird, sondern durch das viel bedeutendere Glied $B\varphi:(4g^2-\varphi^2)$, und da der absolute Betrag von $2g$ größer als φ sein soll, da ferner B stets positiv ist, so hängt das Vorzeichen von δ nur von φ ab, d. h. der Ladung e_1. Bei positivem e_1, d. h. $\varphi > 0$, erfolgt daher δ entgegen den Molekularströmen, ferner ist $\tau_e > \tau_r$, d. h. diejenige Welle (l), deren Erregungsbahn im Sinne der Molekularströme durchlaufen wird, wird bei einer langsameren Periode T maximal absorbiert, als die Welle (r), deren Erregungsbahn entgegen den Molekularströmen durchlaufen wird. — Bei negativem e_1 wird die Polarisationsebene im Sinne der Molekularströme gedreht. Es ist dann $\tau_l < \tau_r$, d. h. allgemein wird diejenige Welle, deren Erregungsbahn in demselben Sinne durchlaufen wird, wie die Rotation δ der Polarisationsebene erfolgt, bei einer kürzeren Periode maximal absorbiert als die entgegengesetzt rotierende Welle.

Alle diese Folgerungen werden nun in der Tat am Natriumdampf bestätigt, wie weiter unten noch näher besprochen werden soll. Für beide Absorptionslinien des Dampfes (für beide D-Linien), welche derselbe im unmagnetischen Zustande zeigt, ergibt sich das zugehörige e negativ. Die beiden D-Linien des Natriumdampfes werden also durch negativ-geladene Ionen verursacht.

Die Absorption an der Stelle $g = o$ kann gering sein, wenn φ groß gegen h ist. Dann wird nach (68), (69):

$$n'^2 = A + A' - \frac{B}{\varphi}, \quad n''^2 = A - A' + \frac{B}{\varphi}.$$

Die rechten Seiten müssen positiv sein, wenn diese Gleichungen Sinn haben sollen, d. h. der absolute Betrag von A muß größer sein als der von B/φ. Die Drehung δ der Polarisationsebene ist dann proportional zu

$$\delta \sim \frac{n''^2 - n'^2}{2} = B/\varphi - A'. \tag{73}$$

δ ist daher groß, da φ klein ist. Bei positivem e_1 erfolgt δ im Sinne der Molekularströme, d. h. in entgegengesetztem Sinne,

wie in der Nachbarschaft außerhalb des Absorptionsgebietes. Trotzdem brauchen keine Nullstellen für δ zu existieren, denn an den Stellen starker, aber verschiedener Absorption $n'\varkappa'$ und $n''\varkappa''$ hat es überhaupt keinen Sinn, von der Drehung δ der Polarisationsebene zu sprechen. — Daß die Drehung δ in der Nähe eines Absorptionsstreifens sehr groß wird, ist in der Tat von Macaluso und Corbino am Natriumdampf gefunden worden (vgl. oben S. 420, Anm. 1). Diese Beobachtungen entsprechen auch der hier gegebenen, d. h. auf der Hypothese des Halleffektes aufgebauten Theorie[1]). Ferner hat Schmauß[2]) an Farbstoff-Lösungen starke anomale (d. h. vom gewöhnlichen Dispersionsgang abweichende) Drehung δ gefunden.

6. Lichtstrahlen senkrecht zur Magnetisierung. Als Richtung der Magnetisierung wählen wir die z-Achse, als Richtung der Wellennormale die x-Achse. Dann hängt alles nur von x und t ab, und die Gleichungen (3), (43) und (51) ergeben:

$$(74)\qquad \begin{gathered} \varepsilon''\frac{\partial X}{\partial t}+i\nu\frac{\partial Y}{\partial t}=0, \\ \frac{1}{c}\left(\varepsilon''\frac{\partial Y}{\partial t}-i\nu\frac{\partial X}{\partial t}\right)=-\frac{\partial\gamma}{\partial x}, \\ \frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial\beta}{\partial x}, \\ \alpha=0,\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x},\quad \frac{1}{c}\frac{\partial\gamma}{\partial t}=-\frac{\partial Y}{\partial x}. \end{gathered}$$

Eliminiert man β und γ, so folgt:

$$(75)\qquad \begin{gathered} \varepsilon'' X+i\nu Y=0, \\ \frac{\varepsilon''}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+i\frac{\nu}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \\ \frac{\varepsilon'}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}. \end{gathered}$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben durch Elimination von X:

$$(76)\qquad \left(\varepsilon''-\frac{\nu^2}{\varepsilon''}\right)\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}.$$

---

1) Vgl. dazu das Nähere bei W. Voigt, Ann. d. Phys. **6**, S. 790, 1901. — **8**, S. 872, 1902.

2) A. Schmauß, Ann. d. Phys. **2**, S. 280, 1900. — **8**, S. 842, 1902. — **10**, S. 853, 1903. — Seine Beobachtungen wurden von F. J. Bates, (Ann. d. Phys. **12**, S. 1080, 1903) bestritten, sind aber von R. W. Wood (Phys. Ztschr. **6**, S. 416, 1905) an gesättigter Lösung von Praseodym-chlorid bestätigt worden.

Setzt man zur Integration:

$$X = M \cdot e^{\frac{i}{\tau}(t - p'x)}, \quad Y = N e^{\frac{i}{\tau}(t - p'x)}, \quad Z = H e^{\frac{i}{\tau}(t - px)},$$

so folgt aus (75) und (76):

$$\varepsilon'' - \frac{\nu^2}{\varepsilon''} = p'^2 c^2, \quad \varepsilon' = p^2 c^2, \quad M = -\frac{i\nu}{\varepsilon''} N. \tag{77}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Z und Y sind also verschieden, d. h. der Körper verhält sich wie ein doppelbrechendes Medium. Für Z, d. h. für eine senkrecht zur Magnetisierung polarisierte Welle, ergibt sich Brechungsindex und Absorptionsindex aus

$$p^2 c^2 = n^2 (1 - i\varkappa)^2 = \varepsilon' = 1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N}}{\Theta}, \tag{78}$$

für die parallel zur Magnetisierung polarisierte Welle folgt

$$n'^2 (1 - i\varkappa')^2 = 1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N} \Theta}{\Theta^2 - \Phi^2} - \frac{\left(\sum \frac{\vartheta \mathfrak{N} \Phi}{\Theta^2 - \Phi^2} \right)^2}{1 + \sum \frac{\vartheta \mathfrak{N} \Theta}{\Theta^2 - \Phi^2}}. \tag{79}$$

Der Unterschied von n' und n ist im allgemeinen sehr klein, da er, wenn Θ nicht sehr klein wird, erst von zweiter Ordnung in Φ wird. Daher kann diese magnetische Doppelbrechung erst bemerklich werden in der Nähe einer Eigenwellenlänge, da dann Θ sehr klein ist.

7. Die Wellenlänge liegt nahe bei einer Eigenwellenlänge. Wir setzen wie früher $\tau = \tau_1 (1 + g) = \sqrt{b_1}\,(1 + g)$, und nehmen g als klein gegen 1 an.

Dann ist in jedem Gliede unter dem Summenzeichen, abgesehen von dem sich auf die Ionengattung 1 beziehenden Gliede, Θ als reelle Größe zu betrachten, welche nicht sehr klein ist. Φ^2 ist dann neben Θ^2 zu vernachlässigen.

Verwendet man daher die Abkürzungen (67) der S. 429, so wird:

$$n'^2 (1 - i\varkappa')^2 = A + \frac{B}{(2g + ih)^2 - \varphi^2} \cdot$$
$$\cdot \left\{ 2g + ih - \frac{B\varphi^2}{[(2g + ih)^2 - \varphi^2]\,A + (2g + ih)\,B} \right\}$$

oder

$$n'^2(1-i\varkappa')^2 = A + \frac{B[(2g+ih)A+B]}{A[(2g+ih)^2-\varphi^2]+B(2g+ih)}. \tag{80}$$

Bei einem Metalldampf ist nun der Brechungsindex stets sehr nahe gleich 1, selbst wenn g ziemlich klein ist. Daraus schließt man (vgl. z. B. die Formeln für n^2 auf S. 430), daß A nahezu gleich 1 und B sehr klein sein muß, so daß man im zweiten Gliede der rechten Seite von (80), welches den kleinen Faktor B enthält, B gegen A vernachlässigen kann. Man erhält dadurch

$$n'^2(1-i\varkappa')^2 = A + \frac{B(2g+ih)}{(2g+ih)^2-\varphi^2}. \tag{81}$$

Der imaginäre Bestandteil, d. h. die Absorption, wird daher, falls h sehr klein ist, möglichst groß, wenn ist:

$$4g^2-\varphi^2=0, \text{ d. h. } 2g=\pm\varphi. \tag{82}$$

Für die parallel zur Magnetisierung polarisierte Welle sind daher zwei Absorptionsstreifen vorhanden, welche zu beiden Seiten des in unmagnetischem Zustande vorhandenen Absorptionsstreifens liegen.

Für die senkrecht zur Magnetisierung polarisierte Welle folgt aus (78):

$$n^2(1-i\varkappa)^2 = A + \frac{B}{2g+ih}. \tag{83}$$

Die maximale Absorption liegt an der Stelle $g=0$. Für die senkrecht zur Magnetisierung polarisierte Welle ändert sich also die Asorption nicht durch die Magnetisierung.

Wenn $2g$ groß gegen h und gegen φ ist, so wird $\varkappa$ und $\varkappa'$ sehr klein und näherungsweise ist:

$$n'^2 = A + \frac{B}{2g}\,\frac{A\cdot 4g^2+B\cdot 2g}{A(4g^2-\varphi^2)+B\cdot 2g}, \quad n^2 = A + \frac{B}{2g},$$

daher

$$n'^2-n^2 = \frac{B}{2g}\cdot\frac{A\varphi^2}{4g^2n^2-A\varphi^2},$$

oder da $4g^2$ groß gegen φ^2 sein soll, so ist annähernd

$$n'-n = \frac{AB\varphi^2}{16n^3g^3}, \tag{84}$$

d. h. positiv oder negativ je nach dem Vorzeichen von g, aber

unabhängig von der Magnetisierungsrichtung und dem Vorzeichen von φ. Dieses Gesetz der magnetischen Doppelbrechung haben in der Tat Voigt und Wiechert am Natriumdampf zu bestätigen vermocht[1].

8. Der Zeeman-Effekt. Zeeman[2]) hat beobachtet, daß eine schmale Emissionslinie eines Metalldampfes, z. B. von Natrium oder Kadmium, in zwei, bzw. drei Linien (Doublet, bzw. Triplet) sehr nahe benachbarter Perioden zerfällt, wenn der Metalldampf magnetisiert wird. Das Doublet tritt ein für die Emissionsrichtung, die mit der Richtung der magnetischen Kraftlinien zusammenfällt, das Triplet für dazu senkrechte Emissionsrichtungen. Diese Erscheinungen werden durch die Differentialgleichungen (42) der S. 423 sofort erklärt, sobald man in ihnen $X = Y = Z = 0$ setzt, d. h. annimmt, daß die Ionen ohne Einfluß einer äußeren einfallenden Kraft schwingen; das Resultat entspricht dann der lediglich durch innere Vorgänge (z. B. Temperatursteigerung) hervorgebrachten Emission des Lichtes. — Legt man die z-Achse in die Richtung des Magnetfeldes $\mathfrak{H}$, vernachlässigt man die Reibungsglieder r, schreibt man für $e:c$ die nach elektromagnetischem Maße gemessene Ladung e', so wird (42)

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{4\pi e^2}{\vartheta}\xi &= e'\mathfrak{H}\frac{d\eta}{dt} \\
m\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{4\pi e^2}{\vartheta}\eta &= -e'\mathfrak{H}\frac{d\xi}{dt} \qquad (85)\\
m\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{4\pi e^2}{\vartheta}\zeta &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Die Schwingungen ζ in der Richtung des Magnetfeldes werden also durch dasselbe gar nicht beeinflußt, sie finden mit derselben Periode τ_1 statt wie ohne Magnetfeld. Aus der letzten Gleichung (85) folgt $\tau_1{}^2 = m\vartheta : 4\pi e^2$. — Setzt man

$$
\xi = M\cdot e^{\frac{i}{\tau}t}\,, \qquad \eta = Ne^{\frac{i}{\tau}t}\,,
$$

so ergibt (85):

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\tau_1{}^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)M &= \frac{i}{\tau}\mathfrak{H}\frac{e'}{m}N, \\
\left(\frac{1}{\tau_1{}^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)N &= -\frac{i}{\tau}\mathfrak{H}\frac{e'}{m}M. \qquad (86)
\end{aligned}
$$

---

1) Über das Nähere dieses Versuches vgl. W. Voigt, Wied. Ann. **67**, S. 360, 1899. — Bezüglich der neueren Literatur vgl. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, Leipzig, Teubner, 1908.

2) P. Zeeman, Phil. Mag. (5), **43**, S. 226, **44**, S. 255, 1897.

Daher entsteht durch Elimination von M und N:

(87) $$\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau_1{}^2}\right)^2 = \frac{1}{\tau^2}\,\mathfrak{H}^2\left(\frac{e'}{m}\right)^2.$$

Setzt man ferner $\tau = \tau_1\,(1+g)$ (analog wie oben in § 7), wobei g klein gegen 1 ist, da der Einfluß vom Magnetfeld $\mathfrak{H}$ immer nur gering ist, so folgt aus (87), da man auf der rechten Seite wegen des Faktors $\mathfrak{H}^2$ den Näherungswert $\tau = \tau_1$ einsetzen darf:

(88) $$2g = \pm\,\tau_1\,\mathfrak{H}\,\frac{e'}{m}\,.$$

Bezeichnet man die Schwingungen, für welche das obere Vorzeichen gilt, mit dem Index $+$, die anderen mit dem Index $-$, so ergibt (86):

(89) $$M_+ = i\,N_+\,,\quad M_- = -\,i\,N_-\,.$$

Diese Gleichungen enthalten nun in der Tat das Zeeman-Phänomen. Blickt man nämlich in Richtung der magnetischen Kraftlinien (z-Achse), so können die Schwingungen ζ kein Licht ergeben, da dasselbe nur in Transversalschwingungen fortgepflanzt wird. Die Schwingungen ξ, η ergeben aber zwei Wellen mit voneinander verschiedenen Perioden τ, und zwar ist nach (89) und oben S. 396 die ($+$)-Welle links-, die ($-$)-Welle rechts-zirkularpolarisiert. Da sich nun ergibt, daß die links-zirkularpolarisierte Welle nach kleineren Perioden τ verschoben ist, so muß g für das obere Vorzeichen in (88), welches ja der ($+$)-Welle entspricht, negativ sein, d. h. a u c h e' i s t n e g a t i v. Dies ist also die Erklärung des Z e e m a n schen Doublets.

Blickt man senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes in Richtung der y-Achse, so ist das senkrecht zum Magnetfeld polarisierte Licht, welches von den ζ-Schwingungen herrührt, unverändert, während das parallel zur Magnetisierung polarisierte Licht, welches durch die ξ-Schwingungen hervorgebracht wird, in zwei verschiedenen Perioden schwingt. So erklärt sich daher das von Z e e m a n beobachtete Triplet.

Aus der Messung der beiden Triplets, in welche die beiden Natriumlinien (D_1 und D_2) zerfallen, hat Z e e m a n in einem Magnetfelde der Stärke $\mathfrak{H} = 22400$ absolute Einheiten als Distanz $2g$ der beiden äußeren Linien eines Triplets den Zahlenwert $2g = 2:17800$ erhalten. Daher folgt nach (88), falls man

$\tau_1 = T_1 : 2\pi = \lambda_1 : 2\pi c$ setzt, wobei λ_1 die Wellenlänge des Natriumlichtes bedeutet, $c = 3 \cdot 10^{10}$ die Lichtgeschwindigkeit:

$$\frac{e'}{m} = 1{,}6 \cdot 10^7.$$

Es ergibt sich also wiederum die für freie negative Elektronen charakteristische Zahl e'/m.

Aus Beobachtung einer Kadmiumlinie ($\lambda = 0{,}48\ \mu$) ergab sich jenes Verhältnis zu $2{,}4 \cdot 10^7$.

Dieses Zeeman-Phänomen bildet daher eine sehr wichtige Stütze für die Elektronentheorie.

Durch genauere Untersuchung mit Hilfe der oben S. 215 beschriebenen Methode der hohen Interferenzen hat Michelson[1]) gefunden, daß meist eine kompliziertere magnetische Zerfällung der Emissionslinien als in Doublets bzw. Triplets eintritt. Es ist dies schon allemal dann zu erwarten, falls die Untersuchungsmethode, wie bei dem Michelsonschen Apparate, bis zu einer solchen Feinheit getrieben wird, daß die Emissionslinien auch außerhalb des Magnetfeldes einen gewissen komplizierteren Bau aufweisen, als er in den bisherigen theoretischen Annahmen enthalten ist, z. B. wenn eine Emissionslinie zwei nahe benachbarte Maxima der Emission aufweist[2]). Außerdem ist auch eine theoretische Erweiterung der Bewegungsgleichung (46) der Ionen möglich, wenn man nämlich den Einfluß der Bewegung benachbarter Ionen berücksichtigen würde. Es würden dann in jener Gleichung noch zweite Differentialquotienten der elektrischen Kraft nach den Koordinaten auftreten, und dadurch würde eine kompliziertere magnetische Zerfällung der Absorptions-, d. h. auch der Emissionslinien folgen[3]).

---

1) Vgl. Phil. Mag. **45**, S. 348, 1898. — Astrophys. Journ. **7**, S. 131; **8**, S. 37, 1898. — Wied. Beibl. 1898, S. 797.

2) Über interessante Regelmäßigkeiten bei der magnetischen Zerlegung der Serienspektren vgl. C. Runge und F. Paschen, Berl. Akad. 1902, S. 380, 720.

3) In anderer Weise erklärt Voigt (Wied. Ann. **68**, S. 352, 1899) die anomalen Zeeman-Effekte, nämlich durch longitudinale magnetische Effekte. Indes fehlt bisher die physikalische Vorstellbarkeit hierfür. — Zur Berechnung des Zeeman-Phänomens benutzt Voigt den Kirschhoffschen Satz (vgl. unten im III. Abschnitt dieses Buches), daß die Emmissionslinien eines Gases bei denselben Perioden liegen wie seine Absorptionslinien, und berechnet die Lage der letzteren auf Grund analoger Differentialgleichungen, wie sie hier in § 2

Der direkte Nachweis der Zeeman-Effekte erfordert einen sehr stark auflösenden Spektralapparat, wie Gitter, Stufengitter, Interferenzspektroskop. Bequemer ist daher eine von W. König[1]) beschriebene Versuchsanordnung, nach der eine im Magnetfelde befindliche Natriumflamme durch eine andere, außerhalb des Magnetfeldes befindliche Flamme betrachtet wird. Blickt man senkrecht zur Magnetisierung, so erscheint die erste Flamme hell, und zwar polarisiert. Wegen des Kirchhoffschen Satzes von der Gleichheit von Emission und Absorption (vgl. weiter unten im III. Abschnitt II. Kapitel, § 4) müssen nämlich nur diejenigen Schwingungen der magnetisierten Natriumflamme durch die unmagnetisierte Natriumflamme absorbiert werden, deren Periode im Magnetfelde dieselbe ist wie außerhalb des Magnetfeldes. Vielleicht ist auch in dieser Weise (durch Absorption im Flammenmantel bei nicht völlig homogenem Magnetfelde) die von Egoroff und Georgiewsky[2]) beobachtete Erscheinung zu erklären, daß eine Natriumflamme im Magnetfelde partiell polarisiertes Licht aussendet senkrecht zur Magnetisierungsrichtung. Aber auch in völlig homogenem Magnetfelde wäre diese Erscheinung theoretisch zu erklären, da die gesamte Absorption $n'\varkappa'$ für die nach der Magnetisierungsrichtung polarisierten Wellen, nach Formel (80) für alle möglichen Werte von g berechnet, sich etwas verschieden ergibt von der gesamten Absorption $n\varkappa$ der senkrecht zur Magnetisierung polarisierten Wellen, wie sie aus (83) für alle möglichen Werte von g gefunden wird.[3])

9. Die magneto-optischen Eigenschaften von Eisen, Nickel, Kobalt. Haben wir im vorigen gesehen, daß bei Metalldämpfen

hergeleitet sind; Voigt enthält sich aber einer physikalischen Deutung der Koeffizienten dieser Differentialgleichungen. Diesen in Wied. Ann. **67**, S. 345, 1899 gegebenen Ausgangspunkt seiner Theorie entwickelt Voigt weiter in Wied. Ann. **68**. S. 352; **69**, S. 290, 1899. — Ann. d. Phys. **1**. S. 376, 389, 1000. — **6**. S. 790, 1901. — **8**. S. 872, 1902. — Voigt, Elektro- und Magnetooptik, Teubners Verlag. Leipzig 1908.

1) W. König, Wied. Ann. **63**, S. 268, 1897.

2) Compt. rend. 127, S. 748, 949, 1897.

3) Voigt (Wied. Ann. **69**, S. 290, 1899) erhält die von Egoroff und Georgiewsky beobachtete Erscheinung, sowie wechselnde Intensitätsverhältnisse beim Zeeman-Effekt durch die Annahme, daß die Reibungskoeffizienten r in den Ausgangsgleichungen (42) der S. 423 von der Stärke des Magnetfeldes abhängen sollen und zwar je nach der Richtung der Schwingungen in verschiedener Weise.

die Vorstellung der Molekularströme nicht zu einer befriedigenden Darstellung der Erscheinungen führt, so muß man zur Erklärung der magneto-optischen Eigenschaften der stark magnetisierbaren Metalle an dieser Vorstellung festhalten. Am einfachsten wird dies dadurch bewiesen, daß in diesen Metallen die magneto-optischen Effekte proportional zur Magnetisierung des Metalls sind,[1]) daher auch einen endlichen Grenzwert (bei Magnetisierung des Metalls bis zur Sättigung) erreichen, auch wenn das äußere Magnetfeld weiter gesteigert wird. Die Benutzung des Halleffektes würde dagegen einen solchen Grenzwert nicht ergeben,[2]) da die magneto-optischen Effekte proportional zur magnetischen Induktion im Körper sein müssen, d. h. proportional zur Dichte der gesamten magnetischen Kraftlinien. Streng genommen kann nun allerdings der Halleffekt auch bei vorhandenen Molekularströmen nie ganz fehlen,[3]) indes zeigen die Erscheinungen, daß bei Eisen, Nickel, Kobalt der Einfluß der Molekularströme jedenfalls bedeutend den Einfluß des Halleffektes überwiegt, und daher wollen wir zur Einfachheit die Halleffekt-Glieder jetzt gar nicht benutzen.

a) Durchgehendes Licht. Lassen wir ebene Wellen senkrecht durch eine dünne Eisenschicht fallen, welche normal zu ihrer Fläche magnetisiert ist, so gelten die Formeln des § 3, S. 414. Bezeichnen wir mit n und $\varkappa$ Brechungsindex und Absorptionsindex des unmagnetisierten Metalls, ferner mit n' und $\varkappa'$ die betreffenden Größen für die links-zirkularpolarisierte Welle im magnetisierten Metall, mit n'' und $\varkappa''$ für die rechts-zirkularpolarisierte Welle, so ist nach (28) und (29) auf S. 416 bei Entwicklung bis auf erste Ordnung in ν:

$$p'c = n'(1 - i\varkappa') = \sqrt{\varepsilon'}\left(1 - \frac{\nu}{2c\tau}\right),$$

$$p''c = n''(1 - i\varkappa'') = \sqrt{\varepsilon'}\left(1 + \frac{\nu}{2c\tau}\right),$$

$$n(1 - i\varkappa) = \sqrt{\varepsilon}\,.$$

---

1) Dies ist durch Versuche von Kundt (Wied. Ann. **27**, S. 191, 1886) und H. E. I. G. du Bois (Wied. Ann. **39**. S. 25, 1890) bewiesen.

2) Dies sowie verschiedene Gestalt der Dispersionsgesetze würde der einzige Unterschied zwischen beiden Theorien sein, sonst wären sie formal identisch, falls man nach der Halleffekt-Hypothe nur bis auf erste Ordnung in den magneto-optischen Zusatzgliedern entwickelt, was allemal gestattet ist, da bei Metallen keine schmalen Absorptionslinien vorkommen.

3) Vgl. die Anm. 1 auf S. 423.

Bringt man ν in die Form

$$\nu = a + bi$$

wobei a und b reell sind, so wird

$$n'' - n' = \frac{n}{c\tau}(a + b\varkappa), \quad n''\varkappa'' - n'\varkappa' = \frac{n}{c\tau}(a\varkappa - b).$$

Die letzte Formel besagt, daß rechts- und links-zirkular-polarisiertes Licht in verschiedener Weise absorbiert wird, die erste Formel ergibt, falls $n''\varkappa''$ und $n'\varkappa'$ nur wenig voneinander verschieden sind, so daß das austretende Licht näherungsweise linearpolarisiert bleibt, die Drehung δ der Polarisationsebene linearpolarisierten Lichtes[1]) gemäß Formel (19') auf S. 397 zu:

$$(90) \qquad \delta = \frac{z}{2c\tau}(n'' - n') = 2\frac{\pi^2}{\lambda_0{}^2} z\, n(a + b\varkappa),$$

wobei $\lambda_0 = cT = 2\pi c\tau$ gesetzt ist.

Die Metallschichten müssen sehr dünn sein (Bruchteile von λ_0), damit sie überhaupt noch durchsichtig sind. Trotzdem werden merkliche Drehungen δ beobachtet, z. B. bei $z - 0{,}332\,\lambda_0$ beträgt bei Eisen, welches zur Sättigung magnetisiert ist, für rotes Licht ($\lambda_0 = 0{,}00064$ mm) $\delta = 4{,}25^0$. Daraus würde für eine Eisenschicht von 1 cm Dicke der enorme Betrag $\delta = 200000^0$ folgen! Nach diesen Beobachtungen und der Formel (90) folgt daher bei rotem Licht, wenn man als Längeneinheit das Zentimeter wählt, für Eisen, das bis zur Sättigung magnetisiert ist:

$$n(a + b\varkappa) = 0{,}758 \cdot 10^{-6}.$$

Das Vorzeichen von $a + b\varkappa$ ist positiv, da die Drehung δ im Sinne der paramagnetischen Molekularströme erfolgt (vgl. S. 416).

Die Abhängigkeit der Drehung δ von der Periode τ oder Wellenlänge λ_0 ergibt sich aus den Formeln (20), (21), der S. 414 sowie nach (90). Auffallend ist, daß δ mit abnehmendem λ_0 abnimmt.[2]) Auf Grund der Formel (90) wird dies Verhalten da-

1) Man kann von derselben nur sprechen, falls $n''\varkappa''$ und $n'\varkappa'$ nur wenig von einander verschieden sind, so daß das austretende Licht näherungsweise linearpolarisiert bleibt.

2) Vgl. darüber die Beobachtungen von **Lobach**, Wied. Ann. **39**. S. 347, 1890.

durch wahrscheinlich gemacht, daß n und $n\varkappa$ tatsächlich mit abnehmendem λ_0 stark abnehmen, während aus (21) folgt, daß a und b ebenfalls mit abnehmendem λ_0 abnehmen, wenn nur eine Gattung Leitungsionen besonders wirksam ist für den magnetooptischen Effekt.

b) Reflektiertes Licht (Kerrsches Phänomen). Um die Eigenschaften des an einem Magnetspiegel reflektierten Lichtes berechnen zu können, müssen die Grenzbedingungen an der Oberfläche des Spiegels aufgestellt werden. Mann kann dieselben aus den Differentialgleichungen (18) und (14) (S. 414) herleiten aus der Überlegung, daß die Oberfläche des Spiegels streng genommen eine sehr dünne inhomogene Übergangsschicht ist, in welcher ebenfalls (vgl. S. 414) noch jene Differentialgleichungen gelten.

Wenn die Oberfläche zur xy-Ebene genommen wird, so ergibt sich dann nach dem schon oben S. 258 angewandten Schlußverfahren als Grenzbedingungen:

Stetigkeit von:

$$\alpha, \quad \beta, \quad X - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nu_y Z - \nu_z Y), \qquad Y - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nu_z X - \nu_x Z). \qquad (91)$$

Es ergibt sich auf diesem Wege[1]) das von Kerr entdeckte Phänomen,[2]) daß die Polarisationsebene linearpolarisiert einfallenden Lichtes, wenn dieselbe ursprünglich in oder senkrecht zur Einfallsebene lag, nach der Reflexion um einen kleinen Winkel aus ihrer Lage herausgedreht ist. Dies kann nur eine besondere Wirkung der Magnetisierung sein, da ohne dieselbe aus Symmetriegründen ein solches Verhalten unmöglich wäre.

10. Die Wirkungen des magnetischen Feldes der Lichtstrahlen. Im vorigen haben wir gesehen, daß ein äußeres kräftiges Magnetfeld eine Änderung der optischen Eigenschaften eines

---

1) Diesen Weg habe ich durchgeführt in Wied. Ann. **46**, S. 353, 1892. Die dort auftretende magneto-optische Konstante b, die dort als reell vorausgesetzt wurde, ist als komplex anzunehmen, weil nach der hier auf S. 414 gegebenen Formel (21) ν komplex ist. Dadurch wird die Theorie in ihren Resultaten identisch mit der von Goldhammer in Wied. Ann. **46**, S. 71, 1892 gegebenen. Die Theorie stellt fast alle, zum Teil recht komplizierten Einzelheiten der Beobachtungen befriedigend dar. Über den Einfluß von Oberflächenschichten auf diese Erscheinungen vgl. J. Micheli, Dissertation, Leipzig, 1900; Ann. d. Phys. **1**, 1900.

2) Kerr, Phil. Mag. (5) 3, S. 321, 1877; 5, S. 161, 1878.

Körpers hervorbringt. Es ist nun die Frage, ob nicht bei genauer Beobachtung auch schon bei Fehlen eines äußeren kräftigen Magnetfeldes eine Wirkung des magnetischen Feldes der Lichtstrahlen zu konstatieren ist.

Wenn man zunächst nur die Halleffekt-Glieder in Ansatz bringt. d. h. etwa vorhandene Molekularströme (rotierende Ionen) nicht voraussetzt, so hat man die Gleichungen zu benutzen (vgl. oben S. 423):

$$\frac{4\pi j_x}{c} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \text{ usw. } \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \tag{92}$$

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi \, \Sigma e \mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{93}$$

$$4\pi e \xi = \frac{\vartheta}{\Theta}\left(X + \frac{1}{c}\left[\gamma \frac{\partial \eta}{\partial t} - \beta \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right]\right), \tag{94}$$

falls

$$\Theta = 1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}. \tag{95}$$

Die Gleichung (94) ist charakteristisch für unser Problem. Diese zeigt, da η und ζ annähernd proportional zu Y und Z sind, daß die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes nicht mehr linear in den Größen $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma$ bleiben, was zur Folge hat, daß die optischen Eigenschaften von der Intensität des Lichtes abhängen müßten. Ein solches Verhalten ist nun bisher nie beobachtet worden, und man kann auch leicht taxieren, daß die Zusatzglieder in (94), welche die Abweichung von der bisher benutzten Gleichung

$$4\pi e \xi = \frac{\vartheta}{\Theta} X$$

darstellen, einen zu kleinen Effekt haben müssen, als daß er beobachtbar sein könnte. Es handelt sich in (94), da die magnetische Kraft α, β, γ in den Lichtquellen gleich oder wenigstens von der Größenordnung der elektrischen Kraft X, Y, Z ist, um Taxierung der Größen $\frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{1}{c}\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, d. h. es handelt sich um das Verhältnis der Geschwindigkeit der Ionen zu der Lichtgeschwindigkeit. Nun ist näherungsweise nach (94):

$$\xi = \frac{\vartheta}{4\pi e \Theta} X,$$

d. h. für

$$X = A \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$$

wird

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{2\pi}{cT} \cdot \frac{\vartheta}{4\pi e \Theta} A \cdot \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right). \tag{96}$$

Nun ist aber die Eigenschwingungsdauer T_0 des Ions nach S. 423 in folgender Weise bestimmt: Es ist

$$\tau_0{}^2 = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 = b = \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{\vartheta}{4\pi e} = \frac{T_0{}^2}{4\pi^2} \cdot \frac{e}{m}. \tag{97}$$

Setzt man diesen Wert in (96) ein, so wird der größte Wert, den $\frac{1}{c}\frac{\partial\xi}{\partial t}$ im Laufe der Zeit annehmen kann:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{T_0{}^2}{2\pi\, T\Theta} \cdot \frac{e}{mc} A.$$

Setzt man nun hierin $\Theta = 1 - T_0{}^2/T^2$, was bei durchsichtigen Körpern gestattet ist, falls nicht T nahezu gleich T_0 ist, so folgt:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{e}{mc} \cdot \frac{T_0{}^2}{T^2 - T_0{}^2} \cdot A. \tag{98}$$

$e : mc$ ist bei Natriumdampf gleich $1{,}6 \cdot 10^7$ (vgl. S. 437). Diese Größenordnung wollen wir hierfür festhalten. Ferner ist beim sichtbaren Licht etwa $T = 2 \cdot 10^{-15}$. Daher schreibt sich (98):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\xi}{\partial t} = A \cdot \frac{T_0{}^2}{T^2 - T_0{}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-9}. \tag{99}$$

Man muß nun vor allem A taxieren können, d. h. die Feldstärke in einem intensiven Lichtstrahl. Die Sonne sendet pro Sekunde etwa 124 Kilogrammeter Energie in ein Quadratmeter, d. h. $1{,}22 \cdot 10^6$ absolute Einheiten (*erg*) in die Flächeneinheit (cm^2). Nach der oben S. 260 abgeleiteten Formel (25) berechnet sich aber[1])

1) Unabhängig von dieser Poyntingschen Formel kann man das Resultat (100) so ableiten: Durch 1 cm² muß in der Zeiteinheit diejenige elektromagnetische Energie hindurchtreten, welche enthalten ist in einem Raume von V cm³, wo V die Lichtgeschwindigkeit ist. In Luft (Vakuum) ist $V = c$ zu

für ebene Wellen natürlichen Lichtes der Amplitude A der Energiefluß dE pro Zeiteinheit (1 sec) und Flächeneinheit (1 cm²) in Luft (oder Vakuum):

$$dE(\text{in 1 sec auf 1 cm}^2) = \frac{c}{4\pi} A^2. \tag{100}$$

Daraus berechnet sich, wenn man die halbe Energie der Sonnenstrahlung dem sichtbaren Lichte zuschreibt,[1]) für **Sonnenlicht die maximale elektrische Feldstärke**:

$$A = \sqrt{\frac{4\pi}{c} \cdot 0{,}61 \cdot 10^3} = 1{,}6 \cdot 10^{-2} = 0{,}016.^{2)} \tag{101}$$

Folglich wird bei intensiver (Sonnen)-Beleuchtung:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} = 8 \cdot 10^{-11} \frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2}. \tag{102}$$

Dieser Ausdruck ist also immer sehr klein, falls nicht T unmittelbar dem T_0 benachbart ist. Aber selbst wenn z. B. $T : T_0 = 60 : 59$ wäre (Natriumdampf belichtet mit der Wellenlänge $\lambda = 0{,}0006$ mm), so würde $T_0^2 : T^2 - T_0^2 = 30$ sein, und trotzdem wäre der Wert von (102) sehr klein.

Wenn man nun nach dem Ansatz (94) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen berechnet, so ist dieselbe, wie leicht zu ersehen ist, erst in zweiter Ordnung von den magnetischen Zusatzgliedern abhängig, d. h. es würde sich um Änderungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V des Lichtes im Betrage von $10^{-20} \cdot V$ handeln, wenn man die Intensität der Beleuchtung steigert bis zur Beleuchtung mit Sonnenlicht. Wir können daher schließen, **daß ein beobachtbarer magneto-optischer Effekt des Magnetfeldes der Lichtstrahlen selbst nicht besteht.** Es könnte höchstens der Fall in Frage kommen, daß die Periode des einfallenden Lichtes fast vollständig zusammenfällt mit einer Eigenschwingungsperiode (Natriumdampf belichtet mit Natriumlicht). Die

---

setzen. Ferner ist nach S. 258 die elektromagnetische Energie der Volumeneinheit Luft bei natürlichem Licht gleich $A^2 : 4\pi$, daher ist $dE = c \cdot A^2 : 4\pi$.

1) In Wirklichkeit ist die Verhältnis sogar nur $^1/_3$.

2) Den gleichen Wert hat die maximale magnetische Feldstärke. Diese würde daher etwa der 12. Teil der Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus in Deutschland sein.

dann eintretende Absorption wird aber eine genaue Prüfung, ob in diesem Falle der Brechungsindex von der Intensität der Beleuchtung abhängt, nicht zulassen.

Setzen wir jetzt Molekularströme (rotierende Ionen) voraus, so sind die Formeln (3), (4), (5) der S. 410 u. ff. zu benutzen. Wenn nur eine Gattung rotierender Ionen zu berücksichtigen wäre, so wäre nach S. 417, Formel (31), die Kraftliniendichte der Molekularströme: $\gamma_1 = (\mu - 1)\gamma$ zu setzen, wo μ die Magnetisierungskonstante des Körpers ist. Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Magnetisierung des Körpers momentan den schnellen Wechseln von γ folgen kann. Sollte dies nicht der Fall sein, so müßte μ kleiner angenommen werden, als es bei konstantem Magnetfeld beobachtet wird. Daher werden z. B. die Formeln (3) und (4) die Gestalt besitzen:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha + (\mu - 1)\gamma\frac{\partial \xi}{\partial z} + \cdots\right) = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}. \tag{103}$$

Nun ist $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ von derselben Größenordnung wie $\frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t}$ (im Vakuum sind beide Größen gleich). Daher sind auch in (103) die magneto-optischen Zusatzglieder, selbst wenn $\mu - 1$, wie beim Eisen, den Wert 1000 besitzen sollte, sehr klein, nämlich (bei Eisen) von der Größenordnung $1000 \cdot 10^{-10} = 10^{-7}$, so daß ein magneto-optischer Effekt durch das Magnetfeld der Lichtstrahlen selbst nicht einmal bei Eisen zu beobachten sein wird, auch wenn die Magnetisierung des Eisens den schnellen Wechseln des Magnetfeldes der Lichtwellen momentan und voll folgen könnte. Dies erklärt auch, weshalb in einem konstanten Magnetfeld die Wirkung der Molekularströme sich in einer von 1 verschiedenen Magnetisierungskonstante bemerklich macht, während trotzdem für Lichtschwingungen jeder Körper sich so verhält, als ob seine Magnetisierungskonstante gleich 1 wäre. Dies liegt aber nicht etwa an einer Art Trägheit der Magnetisierung, denn unsere Schlüsse sind unabhängig davon gezogen.

Kapitel VIII.

Bewegte Körper.

1. Allgemeines. Wir haben im vorigen die optischen Eigenschaften der Körper durch bewegliche Ionenladungen erklärt. Die Körper im ganzen waren dabei aber als ruhend gedacht. Durch Bewegung der ganzen Körper werden nun vermutlich Modifikationen ihrer optischen Eigenschaften entstehen. Obgleich hierüber nur weniges Positive ausgesagt werden kann, war man in der Neuzeit von den verschiedensten Seiten her bemüht, sich über den Einfluß der Bewegung der Körper auf optische und elektromagnetische Phänomene klar zu werden. Die am meisten entwickelte Theorie ist diejenige von H. A. Lorentz[1]). Dieselbe geht von der Idee Fresnels aus, daß bei allen Bewegungen von Materie der Äther stets vollständig in Ruhe bleibt. Im Gegensatz zu dieser Theorie steht diejenige von Stokes, in welcher der Lichtäther als eine Art reibungsloser Flüssigkeit, die durchaus der selbständigen Bewegung fähig ist, aufgefaßt wird. Ob beide Theorien miteinander vereinbar sind, indem etwa diejenige von Lorentz bei langsamen, diejenige von Stokes bei schnellen Bewegungen die Wirklichkeit angenähert darstellt, muß dahingestellt bleiben; jedenfalls liegt vom Standpunkt der heutigen Erfahrung aus gegen keine dieser beiden Theorien etwas vor. Anders ist es mit den Theorien von Hertz und Cohn, die wohl als widerlegt gelten können. Endlich ist noch die Theorie von Einstein zu erwähnen. Dieselbe ist formal identisch mit derjenigen von Lorentz, da sie dieselben Gleichungen benützt wie diese, geht aber von völlig neuartigen Grundlagen aus: dem sogenannten Prinzip der Relativität und der Abhängigkeit der Zeit, die auf einem Körper (für einen mitbewegten Beobachter) herrscht, von der Geschwindigkeit des Körpers. Physikalisch dürfte auch dieser neueste Versuch einer Theorie der Optik und des Elektromagnetismus für bewegte Körper als erledigt anzusehen sein, da diese Theorie nur für gleichförmig translatorisch bewegte Körper anwendbar ist und eine Erweiterung auf ungleich-

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden, 1895. — The Theory of Elektrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat. Teubners Verlag, 1909.

förmig und rotatorisch bewegte Körper nicht möglich erscheint; ferner aber ist diese Theorie logisch nicht einwandfrei, da ihre Grundlagen, das Prinzip der Relativität und die Zeitdefinition, sich gegenseitig ausschließen. — Im folgenden behandeln wir zunächst die Theorie von Lorentz.

2. Die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes in bezug auf ein festes Koordinatensystem. Wir gehen aus von den Grundgleichungen (7) und (11) der S. 252 bzw. 254 der Maxwellschen Theorie:

$$(1) \qquad \frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \text{ usw. } \frac{4\pi}{c} s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \text{ usw.}$$

Wir hatten früher gesehen [S. 366, Formel (7)], daß, falls nur eine Gattung von Ionen vorhanden ist, deren Ladung e beträgt und von denen $\mathfrak{N}$ Ionen in der Volumeinheit vorhanden ist, die Komponenten der elektrischen Stromdichte sich bestimmen aus:

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi e \mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Hierin bedeutet ξ die x-Komponente der Verschiebung der Ionen relativ zu ihrer Ruhelage im Körper. Wird demselben eine konstante Geschwindigkeit v erteilt, deren Komponenten v_x, v_y, v_z sind, so verallgemeinern wir obige Gleichung versuchsweise, d. h. unter der Annahme eines absolut ruhenden, **Fresnel**schen Äthers in:

$$(2) \qquad \begin{aligned} 4\pi j_x &= \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi e \mathfrak{N} \frac{d\xi}{dt} + 4\pi e \mathfrak{N} v_x, \\ 4\pi j_y &= \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi e \mathfrak{N} \frac{d\eta}{dt} + 4\pi e \mathfrak{N} v_y, \\ 4\pi j_z &= \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi e \mathfrak{N} \frac{d\zeta}{dt} + 4\pi e \mathfrak{N} v_z. \end{aligned}$$

Hier sind absichtlich die Differentialquotienten nach t in zwei Formen geschrieben, als $\frac{\partial}{\partial t}$ und $\frac{d}{dt}$. Ersteres bedeutet, daß die Änderung einer Größe an einer bestimmten Stelle des Raumes im Laufe der Zeit betrachtet werden soll, letzteres dagegen, daß die Änderung einer Größe an einer bestimmten Stelle des Körpers im Laufe der Zeit betrachtet werden soll. Hat der Körper daher die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z, so rückt nach dem Zeitelement dt bei der Bildung des Differentialquotienten d/dt der betrachtete Punkt um die Koordinaten, $v_x\,dt$, $v_y\,dt$, $v_z\,dt$

fort. Durch diese Ortsveränderung ändert sich aber die zu differenzierende Größe um $v_x dt \frac{\partial}{\partial x}$, $v_y dt \frac{\partial}{\partial y}$, $v_z dt \frac{\partial}{\partial z}$, falls sich x, y, z auf ein festes Koordinatensystem beziehen, so daß schließlich die Relation besteht

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

In den Gleichungen (2) müssen nun tatsächlich die $\frac{d\xi}{dt}$ usw. auftreten, weil die ganze Geschwindigkeit der Ionen sich zusammensetzt aus der Translation des Körpers (v_x) und der relativen Geschwindigkeit zum Körper. Letztere wird aber durch $d\xi/dt$ ausgedrückt, nicht durch $\partial\xi/\partial t$.

Für die Komponenten der magnetischen Stromdichte bleiben die früheren Gleichungen (13) der S. 255 bestehen:

$$4\pi s_x = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad 4\pi s_y = \frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad 4\pi s_z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \tag{4}$$

da wir absehen wollen von der Einwirkung eines äußeren, kräftigen Magnetfeldes und nach S. 445 für alle Körper die Magnetisierungszahl μ gleich 1 zu setzen ist bei optischen Erscheinungen.

Wenn der Körper keine Translationsgeschwindigkeit besitzt, d. h. wenn $v_x = v_y = v_z = 0$ sind, so war die Bewegungsgleichung eines Ions nach S. 365 [1]):

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{4\pi e^2}{\vartheta} \xi = eX.$$

Durch die Bewegung des Körpers soll nun, wie wir annehmen wollen, der Einfluß des Körpers auf das Ion ungeändert bleiben. Trotzdem erfährt aber obige Differentialgleichung eine Änderung, weil durch die Bewegung des Körpers die Ionen gemeinsam bewegt werden und bewegte Ionen äquivalent mit elektrischen Strömen sind, deren Komponenten proportional zu ev_x, ev_y, ev_z sind; auf diese Ströme wirkt die magnetische Kraft α, β, γ. Die

1) Es soll hier wiederum von der oben S. 369 angeführten strengeren Ergänzung dieser Bewegungsgleichung wegen der Vereinfachung abgesehen werden. Für den vorliegenden Zweck ist das Ergänzungsglied unwesentlich.

Bewegungsgleichung eines Ions wird daher[1]) (vgl. die analogen Entwicklungen der S. 423):

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + r e^2 \frac{d\xi}{dt} + 4\pi\frac{e^2}{\vartheta}\xi = eX + \frac{e}{c}(v_y\gamma - v_z\beta). \tag{5}$$

Auch hier ist darauf zu achten, daß die d/dt auftreten, nicht die $\partial/\partial t$, da es sich in (5) um die relative Bewegung der Ionen zum Körper handelt.

Für periodische Zustandsänderungen von X oder ξ kann man setzen

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{i}{\tau'}\xi, \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{1}{\tau'^2}\xi. \tag{6}$$

τ' ist dann gleich der Periode T' dividiert durch 2π. Jedoch ist zu bemerken, daß diese Periode T' die relative Schwingungsdauer in bezug auf den bewegten Körper ist, und nicht die absolute Schwingungsdauer T in bezug auf ein festes Koordinatensystem. Beide Schwingungsdauern T' und T sind wohl zu unterscheiden, es ist z. B. $T' > T$, falls der Körper sich in Richtung der Fortpflanzung des Lichtes verschiebt. Betrachten wir ebene Wellen, bei denen alle Größen proportional zu

$$e^{\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{p_1 x + p_2 y + p_3 z}{\omega}\right)}$$

sind, wobei sich x, y, z auf ein festes Koordinatensystem beziehen, so ist $\tau = T : 2\pi$ proportional zur absoluten Periode T.

Nach (3) und (6) besteht nun die Relation:

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{p_1 v_x + p_2 v_y + p_3 v_z}{\omega}\right),$$

1) Aus den auf S. 444 entwickelten Gründen sind auf der rechten Seite von (4) die Glieder $\frac{\gamma}{c}\frac{d\eta}{dt}$ usw. nicht hingeschrieben. Diese geben viel zu kleine Effekte. Bei der Erdbewegung ist $v : c = 10^{-4}$, ist also von ganz anderer Größenordnung als $d\eta/dt : c$. — Auch bei dem unten behandelten Fizeauschen Experiment mit dem strömenden Wasser, bei welchem $v : c$ kleinere Beträge besitzt, kommen trotzdem nur die von v abhängigen Glieder allein zur Geltung, da nur sie einen Einfluß erster Ordnung der Ionengeschwindigkeit auf die optischen Eigenschaften ergeben, während dies die Ionengeschwindigkeiten $d\xi/dt$ usw. nicht tun (vgl. oben S. 444).

d. h. wenn die Geschwindigkeit v klein gegen ω ist, so gilt

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{T'}{T} = 1 + \frac{p_1 v_x + p_2 v_y + p_3 v_z}{\omega} = 1 + \frac{v_n}{\omega}, \tag{7}$$

wobei unter v_n die Geschwindigkeit des Körpers in Richtung der Wellennormale verstanden ist.

Die Bewegungsgleichung (5) ergibt unter Benutzung der schon früher (S. 367) eingeführten Abkürzungen:

$$a = \frac{r\vartheta}{4\pi}, \quad b = \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}, \tag{8}$$

$$4\pi e \xi \left(1 + i\frac{a}{\tau'} - \frac{b}{\tau'^2}\right) = \vartheta \left(X + \frac{v_y \gamma - v_z \beta}{c}\right). \tag{9}$$

In den Gleichungen (2) hat $e\mathfrak{N}$ die Bedeutung der Ladung, welche in der Volumeneinheit vorhanden ist.

Setzt man hierfür (vgl. Gl. (20) S. 257), (die Dielektrizitätskonstante ε des Äthers ist gleich 1 gesetzt),

$$4\pi e \mathfrak{N} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}, \tag{10}$$

so werden die Gleichungen (2):

$$\begin{aligned} 4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} &+ v_x \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \\ &+ \frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1 + i^a/_{\tau'} - {}^b/_{\tau'^2}} \frac{d\left(X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right)}{dt}. \end{aligned} \tag{11}$$

Sind mehrere Molekülgattungen vorhanden, so ist der Faktor des letzten Gliedes dieser Gleichung zu schreiben, wenn man $i^a/_{\tau'}$ vernachlässigt, d. h. wenn der Körper nicht merklich absorbiert:

$$\sum \frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1 + i^a/_{\tau'} - {}^b/_{\tau'^2}} = n^2 - 1; \tag{12}$$

Hierin bedeutet n^2 das Quadrat des optischen Brechungsindex des ruhenden Körpers für die Periode $T' = 2\pi\tau'$. Die Relation (12) besteht auf Grund der Dispersionstheorie [S. 369, Formel (18)]. — Ersetzt man nun noch in (11) den Differentialquotienten d/dt in Rücksicht auf (3) durch $\partial/\partial t$, und setzt den so

erhaltenen Wert für $4\pi j_x$ in (1) ein, so hat man eine Differentialgleichung für den bewegten Körper unter Benutzung eines ruhenden Koordinatensystems. Dieselbe wird erheblich einfacher, wenn man nur Glieder erster Ordnung in v berücksichtigt, was angenähert gestattet ist, da selbst wenn man die Geschwindigkeit der Erde im Weltraum in Betracht zieht, v sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Man kann dann in den mit v multiplizierten Gliedern von (11), d/dt ersetzen durch $\partial/\partial t$ ferner kann man den zweiten Term in (11), der mit v_x multipliziert ist, in homogenen Körpern vernachlässigen, da näherungsweise, d. h. für $v = 0$, in homogenen Körpern bei periodischen Zustandsänderungen die Relation

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

besteht (vgl. oben S. 261). Dadurch wird (11) zu:

$$4\pi j_x = n^2 \frac{\partial X}{\partial t} + (n^2 - 1)\left\{v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{1}{c}\left(v_y \frac{\partial \gamma}{\partial t} - v_z \frac{\partial \beta}{\partial t}\right)\right\}. \tag{14}$$

Nun ist aber nach (1) und (4)

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

daher läßt sich $4\pi j_x$ in der Form schreiben:

$$4\pi j_x = n^2 \frac{\partial X}{\partial t} + (n^2 - 1)\left\{2\left(v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(v_x X + v_y Y + v_z Z)\right\}.$$

Unter Rücksicht auf (1) und (4) erhält man daher für einen bewegten, homogenen, isotropen Körper die für ein festes Koordinatensystem gültigen Differentialgleichungen:

$$\frac{n^2}{c}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{n^2 - 1}{c}\left\{2\left(v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(v_x X + v_y Y + v_z Z)\right\} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{n^2}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{n^2-1}{c}\left\{2\left(v_x\frac{\partial Y}{\partial x} + v_y\frac{\partial Y}{\partial y} + v_z\frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(v_x X + v_y Y + v_z Z)\right\} \\ \qquad = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ \frac{n^2}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{n^2-1}{c}\left\{2\left(v_x\frac{\partial Z}{\partial x} + v_y\frac{\partial Z}{\partial y} + v_z\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(v_x X + v_y Y + v_z Z)\right\} \\ \qquad = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \end{cases}$$

$$(15')\quad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Differenziert man die Gleichungen (15) bezw. nach x, y, z und addiert sie, so entsteht, falls man zur Abkürzung setzt

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = F:$$

$$(16)\quad \frac{n^2}{c}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{n^2-1}{c}\left\{2\left(v_x\frac{\partial F}{\partial x} + v_y\frac{\partial F}{\partial y} + v_z\frac{\partial F}{\partial z}\right) - (v_x \Delta X + v_y \Delta Y + v_z \Delta Z)\right\} = 0.$$

In den mit v_x usw. multiplizierten Gliedern kann man die Näherungswerte benutzen:

$$F = 0,$$

$$(17)\quad \Delta X = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \quad \Delta Y = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}, \quad \Delta Z = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}.$$

Daher ergibt(16):

$$(18)\quad F = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{n^2-1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(v_x X + v_y Y + v_z Z).$$

Diese Gleichung sagt aus, daß in dem bewegten Körper die elektrische Kraft sich nicht mehr in ebenen Transversalwellen fortpflanzen kann, da F von Null verschieden ist. Dagegen kann sich die magnetische Kraft in ebenen Transversalwellen fortpflanzen, da nach (15) die Beziehung besteht:

$$(19)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = 0.$$

Man kann nun auch leicht die Differentialgleichungen (15) und (15′) in solche transformieren, welche nur je eine der Größen

X, Y, Z, α, β, γ enthalten. Differenziert man z. B. die erste Gleichung (15) nach t und setzt für $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ ihre Werte nach (15') ein, so erhält man:

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{n^2-1}{c^2}\left\{2\frac{\partial}{\partial t}\left(v_x\frac{\partial X}{\partial x} + v_y\frac{\partial X}{\partial y} + v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}(v_x X + v_y Y + v_z Z)\right\}$$
$$= \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

In Rücksicht auf (18) wird dies zu:

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\frac{n^2-1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_x\frac{\partial X}{\partial x} + v_y\frac{\partial X}{\partial y} + v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right) = \Delta X. \tag{20}$$

Für die Y, Z, α, β, γ bestehen Differentialgleichungen von genau derselben Form.

3. Die Lichtgeschwindigkeit im bewegten Körper. Die letzte Gleichung erlaubt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen im bewegten Körper in einfacher Weise zu berechnen. Setzen wir

$$X = A \cdot e^{\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{p_1 x + p_2 y + p_3 z}{\omega}\right)}, \tag{21}$$

so wird nach (20):

$$\frac{n^2}{c^2} - \frac{2(n^2-1)}{c^2}\,\frac{p_1 v_x + p_2 v_y + p_3 v_z}{\omega} = \frac{1}{\omega^2},$$

oder

$$\frac{n^2}{c^2}\left(1 - \frac{2(n^2-1)}{n^2}\,\frac{v_n}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2}, \tag{22}$$

wobei v_n die Translationsgeschwindigkeit des Körpers nach der Richtung der positiven Wellennormalen bedeutet. Für erste Ordnung in v_n wird daher

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2}\left(1 + \frac{2(n^2-1)}{n^2}\cdot\frac{v_n}{\omega}\right),$$

d. h.

$$\omega = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{n^2-1}{n^2}\cdot\frac{v_n}{\omega}\right).$$

Ersetzt man auf der rechten Seite in dem mit v_n behafteten Gliede ω durch seinen Näherungswert c/n, so wird

(23) $$\omega = \frac{c}{n} + \frac{n^2 - 1}{n^2} v_n .$$

Diese Gleichung besagt, daß die Bewegung des Körpers denselben Effekt auf die Lichtgeschwindigkeit hat, als ob der Körper dem Äther einen gewissen Bruchteil (den $\frac{n^2-1}{n^2}$ ten Teil) seiner Translationsgeschwindigkeit erteilte.

Dieses Resultat ist schon von Fresnel aus einem von Fizeau angestellten Experimente gezogen worden, in welchem die Lichtgeschwindigkeit in strömendem Wasser gemessen wurde. Indes ist diese Interpretation der Gleichung (23) doch nicht ganz streng, denn der Einfluß der Bewegung des Körpers steckt nicht nur im zweiten Gliede der rechten Seite von (23), sondern auch schon im ersten. Es bezeichnet nämlich nach S. 450 n nicht den Brechungsindex des Körpers für die absolute Periode T, sondern für die relative Periode T'. Dabei ist nach (7)

(24) $$T' = T\left(1 + \frac{v_n}{\omega}\right).$$

Nennt man daher ν den Brechungsindex des ruhenden Körpers für die absolute Periode T, so ist

$$n = \nu + \frac{\partial \nu}{\partial T} \cdot T \frac{v_n}{\omega} = \nu + \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} \lambda \frac{v_n}{\omega},$$

wenn $\lambda = cT$ die Wellenlänge des Lichtes im Vakuum bedeutet. Daher wird nach (23):

$$\omega = \frac{c}{\nu}\left(1 - \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \frac{v_n}{\omega}\right) + \frac{n^2 - 1}{n^2} v_n,$$

oder, da man in den mit v_n behafteten Gliedern die Näherungswerte $n = \nu$, $\omega = c/\nu$ einführen kann:

(25) $$\omega = \frac{c}{\nu} + v_n \left(\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} - \frac{\lambda}{\nu} \frac{\partial \nu}{\partial \lambda}\right).$$

c/ν ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V des Lichtes für Wellen der absoluten Periode T im ruhenden Körper; der mit v_n multiplizierte Term in (25) ergibt daher die Änderung dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die Bewegung des Körpers. Diese

ist größer als nach der Fresnelschen Annahme, da $\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}$ bei normaler Dispersion negativ ist. Die Differenz gegenüber der Fresnelschen Annahme ist indes so gering, daß sie noch innerhalb der Beobachtungsfehler des Experimentes fällt.

Das Experiment wurde zuerst von Fizeau[1]) angestellt und später von Michelson und Morley[2]) wiederholt. Es strömte dabei das Wasser in zwei parallelen Röhren mit entgegengesetzter Geschwindigkeit, die Lichtgeschwindigkeit in ihnen wurde mit Hilfe einer Interferenzmethode gegenseitig verglichen. Der Mitführungs-Koeffizient, d. h. der Faktor des mit v_n multiplizierten Gliedes in dem Werte von ω, bestimmte sich experimentell zu $0{,}434 \pm 0{,}02$ während die Formel (25) für Wasser und die Fraunhofersche Linie D ergibt 0,451. Der Fresnelsche Mitführungs-Koeffizient $\nu^2 - 1 : \nu^2$ ergibt 0,438.

4. Die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen des elektromagnetischen Feldes in bezug auf ein bewegliches Koordinatensystem, welches mit dem bewegten Körper fest verbunden ist. Nennt man x', y', z' die relativen Koordinaten eines Punktes in bezug auf den bewegten Körper, so ist

$$x = x' + v_x \cdot t, \quad y = y' + v_y \cdot t, \quad z = z' + v_z \cdot t. \tag{26}$$

Die partielle Differentiation nach x, y, z können wir daher, da v_x, v_y, v_z nicht von x, y, z abhängen, ersetzen durch partielle Differentiation nach x', y', z', d. h. wir können in den Gleichungen der vorigen Paragraphen die Differentialquotienten nach x, y, z auch auffassen als solche, die nach den relativen Koordinaten x', y', z' zu nehmen sind. Dies wollen wir im folgenden tun, und unter x, y, z jetzt einfach die relativen Koordinaten in bezug auf einen Punkt des bewegten Körpers verstehen. — An Stelle der Differentialquotienten $\partial X/\partial t$ usw. sind aber die dX/dt usw. einzuführen, da wir hier die Abhängigkeit des X nach der Zeit untersuchen wollen, wobei sich X bezeihen soll auf einen relativ zum bewegten Körper festen Punkt. Der Übergang wird durch die Relation (3) der S. 448 vermittelt, so daß z. B. entsteht

---

1) Compt. Rend. 33, S. 349, 1851. — Pogg. Ann. Ergbd. 3, S. 457. — Ann. d. chim. et de phys. (3) 57, 385, 1859.

2) Americ. Journ. of Science (3) 31, S. 377, 1886.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{dX}{dt} - v_x \frac{\partial X}{\partial x} - v_y \frac{\partial X}{\partial y} - v_z \frac{\partial X}{\partial z}. \tag{27}$$

Setzt man dies in die Gleichungen (2) ein und berücksichtigt (9), (10) und (12), so wird (bei beliebig viel Ionengattungen):

$$\begin{aligned} 4\pi j_x = {} & \frac{dX}{dt} - v_x \frac{\partial X}{\partial x} - v_y \frac{\partial X}{\partial y} - v_z \frac{\partial X}{\partial z} \\ & + (n^2 - 1)\frac{d}{dt}\left(X + \frac{v_y \gamma - v_z \beta}{c}\right) + v_x\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Die Gleichungen (1), (3), (4) und (28) ergeben daher, wenn man auf (19) Rücksicht nimmt:

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{c}\frac{dX}{dt} + \frac{n^2-1}{c^2}\frac{d}{dt}(v_y\gamma - v_z\beta) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma + \frac{v_y X - v_x Y}{c}\right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta + \frac{v_y Z - v_z X}{c}\right), \\ \frac{n^2}{c}\frac{dY}{dt} = \frac{n^2-1}{c^2}\frac{d}{dt}(v_z\alpha - v_x\gamma) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c}\right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma + \frac{v_y X - v_x Y}{c}\right), \\ \frac{n^2}{c}\frac{dZ}{dt} + \frac{n^2-1}{c^2}\frac{d}{dt}(v_x\beta - v_y\alpha) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c}\right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c}\right). \\ \frac{1}{c}\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(Y + \frac{v_z\alpha - v_x\gamma}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(Z + \frac{v_x\beta - v_y\alpha}{c}\right), \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(Z + \frac{v_x\beta - v_y\alpha}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right). \\ \frac{1}{c}\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(Y + \frac{v_z\alpha - v_x\gamma}{c}\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Diese Gleichungen gelten auch für inhomogene (isotrope) *Körper*, da die Näherungsrelation (13), welche für inhomogene Körper nicht gilt, nicht benutzt ist, sondern alle herangezogenen Gleichungen auch für inhomogene Körper gelten. Wir gewinnen daher aus (29) sofort nach den oben auf S. 258 angestellten Überlegungen die Grenzbedingungen beim Übergang über die Grenze zwischen zwei verschiedenen Körpern oder zwischen einem Körper und dem Vakuum in der Form, falls die Grenze senkrecht zur z-Achse liegt:

$$\left.\begin{array}{ll} X + \frac{v_y \gamma - v_z \beta}{c}, & Y + \frac{v_z \alpha - v_x \gamma}{c}, \\ \alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c}, & \beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c}, \end{array}\right\} \text{stetig an der Grenze.} \quad (30)$$

Hieraus und aus (29) ergeben sich die dadurch mit bedingten Grenzgleichungen:

$$n^2 Z + \frac{n^2 - 1}{c}(v_x \beta - v_y \alpha), \ \gamma \ \text{stetig an der Grenze.} \quad (30')$$

Da man in (30) in den mit v_x, v_y, v_z multiplizierten Gliedern die Näherungswerte einführen kann, wie sie für $v_x = v_y = v_z = 0$ eintreten, so kann man die Grenzbedingungen auch in der Form schreiben:

$$X, \ Y, \ \alpha - \frac{v_y Z}{c}, \ \beta + \frac{v_x Z}{c} \ \text{stetig an der Grenze.} \quad (30'')$$

Für einen homogenen Körper kann man leicht Differentialgleichungen aufstellen, welche nur je eine der Größen X, Y, Z, α, β, γ enthalten. Aus (27) folgt nämlich, wenn man bis auf erste Ordnung in v_x, v_y, v_z geht:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{d^2 X}{dt^2} - 2\frac{d}{dt}\left(v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z}\right),$$

daher wandelt sich (20) um in:

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{d^2 X}{dt^2} - \frac{2}{c^2}\frac{d}{dt}\left(v_x \frac{\partial X}{\partial x} + v_y \frac{\partial X}{\partial y} + v_z \frac{\partial X}{\partial z}\right) = \Delta X. \quad (31)$$

Gleichungen derselben Form bestehen für Y, Z, α, β, γ. Die früheren Gleichungen (18) und (19) gelten auch hier, d. h. die elektrische Kraft pflanzt sich nicht in transversalen Wellen fort, aber wohl die magnetische Kraft.

Setzen wir

$$X = A \cdot e^{\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{p_1' x + p_2' y + p_3' z}{\omega'}\right)},$$

wo $p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2 = 1$ sein soll, so bedeuten p_1', p_2', p_3' die Richtungskosinus der Wellennormale, ω' die Lichtgeschwindigkeit in bezug auf das bewegte Koordinatensystem. — Aus (31) folgt dann

$$\frac{n^2}{c^2} + \frac{2}{c^2 \omega'}(p_1' v_x + p_2' v_y + p_3' v_z) = \frac{1}{\omega'^2},$$

oder

$$\frac{n^2}{c^2}\left(1+\frac{2(p_1'v_x+p_2'v_y+p_3'v_z)}{n^2\omega'}\right)=\frac{1}{\omega'^2},$$

$$\omega'=\frac{c}{n}\left(1-\frac{p_1'v_x+p_2'v_y+p_3'v_z}{n^2\omega'}\right).$$

Schreibt man auf der rechten Seite für ω' den Näherungswert $\omega'=c:n$, so entsteht:

$$\omega'=\frac{c}{n}-\frac{p_1'v_x+p_2'v_y+p_3'v_z}{n^2}. \tag{32}$$

5. Die Richtung des Lichtstrahls, ermittelt nach dem Huygensschen Prinzip. Die Geschwindigkeit ω' der Wellennormalen hängt von der Richtung p_1', p_2', p_3' derselben ab. Um die zu p_1', p_2', p_3' zugehörige Strahlrichtung $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ zu finden, können wir, wie es oben S. 315 bei den Kristallen geschehen ist, nach dem Huygensschen Prinzip den Schnitt von drei benachbarten Wellenebenen aufsuchen, d. h. wir differenzieren die Gleichung:

$$p_1'x+p_2'y+p_3z+f(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2)=\omega'+f \tag{33}$$

[vgl. oben S. 315 Formel (59)] nach p_1', p_2', p_3'. Dadurch ergibt sich:

$$x+2fp_1'=\frac{\partial\omega'}{\partial p_1'},\quad y+2fp_2'=\frac{\partial\omega'}{\partial p_2'},\quad z+2fp_3'=\frac{\partial\omega'}{\partial p_3'},$$

d. h. in Rücksicht auf (32):

$$x+2fp_1'=-\frac{v_x}{n^2},\quad y+2fp_2'=-\frac{v_y}{n^2},\quad z+2fp_3'=-\frac{v_z}{n^2}. \tag{34}$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen mit bzw. p_1', p_2', p_3' und Addition folgt, da $p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2=1$ ist:

$$p_1'x+p_2'y+p_3'z+2f=-\frac{p_1'v_x+p_2'v_y+p_3'v_z}{n^2}.$$

Nun ist aber nach (33) $p_1'x+p_2'y+p_3'z=\omega'$, d. h. unter Rücksicht auf (32) folgt $2f=-c/n$. Daher ergibt sich aus (34) die Strahlrichtung aus der Proportion:

$$\mathfrak{p}_1:\mathfrak{p}_2:\mathfrak{p}_3=x:y:z=\frac{cp'_1}{n}-\frac{v_x}{n^2}:\cdots\cdots,$$

oder

$$\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}_2 : \mathfrak{p}_3 = p_1' - \frac{v_x}{nc} : p_2' - \frac{v_y}{nc} : p_3' - \frac{v_z}{nc}. \tag{35}$$

Der Strahl weicht also ab von der Wellennormalen.

Die Relation (35) läßt sich (abgesehen von Gliedern 2. Ordnung in v) schreiben als:

$$p_1' : p_2' : p_3' = \mathfrak{p}_1 + \frac{v_x}{nc} : \mathfrak{p}_2 + \frac{v_y}{nc} : \mathfrak{p}_3 + \frac{v_z}{nc}. \tag{35'}$$

6. Ersetzung der absoluten Zeit durch eine Art Ortszeit. An Stelle der Variabelen t, x, y, z, worin t die absolute Zeit, x, y, z die relativen Koordinaten gegen einen Punkt des bewegten Körpers bedeuten, wollen wir x, y, z und

$$t' = t - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2} \tag{36}$$

als unabhängige Variabele einführen.

t' kann man zweckmäßig als eine Art Ortszeit bezeichnen, weil t' vom Ort im Körper, d. h. von x, y, z, abhängt. Wenn diese unabhängigen Variabelen eingeführt werden, so sollen die partiellen Differentialquotienten nach x, y, z durch $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)'$, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)'$, $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'$ bezeichnet werden, während $\frac{\partial}{\partial x}$ usw. wie früher die partiellen Differentialquotienten bedeuten, wenn x, y, z, t die unabhängigen Variabelen sind. Es folgt aus (36):

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' - \frac{v_x}{c^2}\frac{d}{dt'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)' - \frac{v_y}{c^2}\frac{d}{dt'},$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)' - \frac{v_z}{c^2}\frac{d}{dt'}. \tag{37}$$

Führt man dies ein in (29), berücksichtigt nur Glieder erster Ordnung in v, und setzt zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} X + \frac{v_y \gamma - v_z \beta}{c} &= X', \quad Y + \frac{v_z \alpha - v_x \gamma}{c} = Y', \quad Z + \frac{v_x \beta - v_y \alpha}{c} = Z', \\ \alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c} &= \alpha', \quad \beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c} = \beta', \quad \gamma + \frac{v_y X - v_x Y}{c} = \gamma', \end{aligned} \tag{38}$$

so entsteht, falls man nun die Differentiationen $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)'$ wieder einfach als $\frac{\partial}{\partial x}$ bezeichnet:

$$(39)\quad \begin{aligned} &\frac{n^2}{c}\frac{dX'}{dt'}=\frac{\partial\gamma'}{\partial y}-\frac{\partial\beta'}{\partial z}, \quad \frac{n^2}{c}\frac{dY'}{dt'}=\frac{\partial\alpha'}{\partial z}-\frac{\partial\gamma'}{\partial x}, \quad \frac{n^2}{c}\frac{dZ'}{dt}=\frac{\partial\beta'}{\partial x}-\frac{\partial\alpha'}{\partial y}, \\ &\frac{1}{c}\frac{d\alpha'}{dt'}=\frac{\partial Y'}{\partial z}-\frac{\partial Z'}{\partial y}, \quad \frac{1}{c}\frac{d\beta'}{dt'}=\frac{\partial Z'}{\partial x}-\frac{\partial X'}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{d\gamma'}{dt'}=\frac{\partial X'}{\partial y}-\frac{\partial Y'}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die Grenzbedingungen lauten nach (30) und (38), falls die Grenze senkrecht zur z-Achse liegt:

(40) X', Y', α', β' stetig beim Übergang über die Grenze.

Die Gleichungen (39) und (40) haben nun dieselbe Gestalt, wie die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen des elektromagnetischen Feldes in einem ruhenden Körper. Daraus ist der wichtige Schluß zu ziehen:

Ist für ein ruhendes System ein Zustand bekannt, in welchem X, Y, Z, α, β, γ gewisse Funktionen von x, y, z, t und der Periode T sind, so sind für das bewegte System X', Y', Z', α', β', γ' dieselben Funktionen von x, y, z, $t-\frac{v_x x+v_y y+v_z z}{c^2}$ und T, wobei jetzt x, y, z die relativen Koordinaten in bezug auf einen Punkt des Körpers und T die relative Periode in bezug auf den bewegten Körper bedeuten. Nach (7) auf S. 450 ist also im letzteren Falle als absolute Periode $T\left(1-\frac{v_n}{\omega}\right)$ anzunehmen.

7. Die Unabhängigkeit des relativen Strahlenganges von der Bewegung. Der letzte Satz gestattet sofort, eine Anwendung auf den relativen Strahlengang zu machen. Es möge nämlich im ruhenden System der mit Licht erfüllte Raum begrenzt sein durch eine gewisse Fläche S, so daß außerhalb S sowohl X, Y, Z, als auch α, β, γ verschwinden. Dann muß im bewegten System außerhalb der Fläche S sowohl X', Y', Z', als α', β', γ' verschwinden, d. h. auch im bewegten System bildet die Fläche S die Grenze des mit Licht erfüllten Raumes. In einem ruhenden System kann nun z. B. S die Mantelfläche eines zylindrischen Raumes sein (Lichtbündel), falls wenigstens die Querschnittdimensionen dieses Zylinders viel größer als die Wellenlänge des Lichtes sind. Die Erzeugenden dieses Zylinders werden Lichtstrahlen genannt. Nach unserem Satze bleibt die Begrenzung der Lichtbündel, auch wenn sie mehrfach gebrochen oder reflektiert werden, durch die gemeinsame Bewegung des Ganzen unverändert, d. h. in dem bewegten System werden Lichtstrahlen von der relativen Schwingungsdauer T nach denselben Gesetzen gespiegelt

und gebrochen wie Strahlen von der absoluten Schwingungsdauer T im ruhenden System.

Die Gesetze für Linsen und Brennspiegel erleiden daher keine Modifikation durch die Bewegung. Ebensowenig hat die Bewegung Einfluß auf Interferenzerscheinungen. Denn diese zeichnen sich ja nur aus durch eine komplizierte Gestalt der den Lichtraum begrenzenden Fläche S, und diese Gestalt wird, wie oben gesagt wurde, durch die Bewegung nicht verändert.

Die Unabhängigkeit des Strahlenganges von der Bewegung gilt auch für Kristalle,[1] da auch für diese die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen in einer zu (39) und (40) analogen Form gewonnen werden können, so daß man sich sofort beziehen kann auf die Brechungsgesetze ruhender Kristalle.

8. Die Erde als bewegtes System. Die letzten Betrachtungen sind besonders wichtig, wenn wir die Bewegung der Erde durch den Weltraum betrachten. Nach diesen Betrachtungen kann die Bewegung der Erde nie[2] einen Einfluß **in erster Ordnung nach v** auf die mit terrestrischen Lichtquellen beobachtbaren Erscheinungen haben, denn bei Anwendung irdischer Lichtquellen ist die von der Lichtquelle entsandte Periode bis auf Glieder höherer Ordnung gleich der in Betracht kommenden relativen Periode, d. h. insoweit unabhängig von der Bewegung der Erde, daher kann auch der Strahlengang nicht in beträchtlicher Weise durch die Erdbewegung modifiziert werden. In der Tat haben zahlreiche Versuche (Respighi,[3] Hoeck,[4] Ketteler,[5] Mascart[6]) über Brechung und Interferenz (teilweise auch in Kristallen) die Unabhängigkeit der Erscheinungen von der Orientierung der Apparate in bezug auf die Bewegungsrichtung der Erde dargetan. — Dagegen kann man einen Einfluß der Erdbewegung bei Benutzung außerterrestrischer Lichtquellen dadurch erhalten, daß dann die relative Periode von der Erdbewegung abhängt. In der Tat erscheinen uns die Spektrallinien mancher Fixsterne

---

1) Ob dies auch für natürlich- oder magnetisch-aktive Körper eintritt, mag hier unerörtert bleiben; dies darf besonderer Untersuchung.

2) Es wird hier abgesehen von natürlich- oder magnetisch-aktiven Körpern (vgl. die vorige Anm.).

3) Mem. di Bologna (2) II, S. 279.

4) Astr. Nachr. 73, S. 193.

5) Astron. Undulat. Theorie, S. 66, 158, 166, 1873.

6) Ann. de l'école norm. (2), 1, S. 191, 1872. — 3, S. 376, 1874.

etwas verschoben. Dies ist durch eine Bewegung der Erde, bzw. des ganzen Sonnensystems gegen die Fixsterne zu erklären (oder umgekehrt, was zu demselben Resultat führt.) Denn bei den Brechungs- oder Interferenzgesetzen handelt es sich um die relativen Perioden, und diese sind nach Formel (7) durch $T(1+v_n/\omega)$ gegeben, falls T die absolute Periode ist. Je nach dem Werte und dem Vorzeichen von v_n variiert also T und damit etwas der durch Refraktion oder Diffraktion auf der bewegten Erde gebildete Ort der Spektrallinie. Der Inhalt dieses Satzes wird nach seinem Entdecker das Dopplersche Prinzip[1]) genannt.

Da sich die Erde um die Sonne nahezu in einem Kreise bewegt, so ist für diesen Fall $v_n = 0$ zu setzen. Daher ist, wie es auch die Experimente von Mascart[2]) ergeben, kein Einfluß der Erdbewegung auf den durch Refraktion oder Diffraktion gebildeten Ort der Fraunhoferschen Sonnenlinien zu beobachten.[3])

9. Die Aberration des Lichtes. Während, wie in § 7 abgeleitet wurde, der relative Strahlengang durch die Erdbewegung nicht beeinflußt wird, so hängt doch die Richtung der Wellennormale, die zu einer bestimmten Strahlenrichtung gehört, von der Erdbewegung ab. Dies ist schon oben S. 458 bewiesen; es ist aber

---

1) Im obigen ist angenommen, daß die Lichtquelle A ruht und der Beobachtungsort B sich bewegt. Die Betrachtungen gelten auch für den Fall, daß sich A und B bewegen, es bezeichnet dann v_n die relative Geschwindigkeit von B gegen A, in der Richtung der fortgepflanzten Lichtstrahlen gemessen. In diesem Falle ergibt übrigens zunächst die strenge Berechnung, daß das Verhältnis der wirklichen Periode T zu der in B wahrgenommenen relativen Periode T' den Wert hat: $T : T' = \omega - v' : \omega - v$, wobei v' die absolute Geschwindigkeit von B, v die von A (in Richtung der Lichtstrahlen) ist und ω die Lichtgeschwindigkeit im Medium zwischen A und B ist. Nur wenn sowohl v als v' klein gegen ω sind, reduziert sich diese strengere Formel auf die im Text angegebene, d. h. auf die gewöhnliche Fassung des Dopplerschen Prinzipes. Nun wissen wir tatsächlich nichts über die absolute Bewegung der Himmelskörper; daher könnte eventuell die Anwendung der gewöhnlichen Formel des Dopplerschen Prinzipes zur Ermittelung der relativen Bewegung der Himmelskörper im Visionsradius gegen die Erde zu Fehlern führen. Auf diesen Punkt hat Moessard (Comp. Rend. 114, S. 1471, 1892) zuerst aufmerksam gemacht.

2) Ann. de l'école norm. (2) 1, S. 166, 190, 1872.

3) Wir sehen hier ab von der durch Rotation der Sonne hervorgerufenen Verschiebung der Linien, welche vom Sonnenrande uns zugesandt werden. Bei den Versuchen wurde mit dem Lichte der ganzen Sonnenscheibe gearbeitet.

wohl nützlich, die oben durch Benutzung des Huygensschen Prinzipes gewonnene Definition des Strahles hier unabhängig davon direkt abzuleiten. Betrachten wir z. B. den Fall ebener Wellen im ruhenden System: alle Größen sind periodische Funktionen von $t - \frac{p_1 x + p_2 y + p_3 z}{\omega}$. Im ruhenden System sind p_1, p_2, p_3 die Richtungskosinus der Wellennormale und zugleich des Strahles. Wir wollen uns die Richtung des Strahles dadurch physikalisch markiert denken, daß das Licht durch zwei enge Öffnungen fällt, deren Verbindungslinie die Richtungskosinus p_1, p_2, p_3 hat. — Wird nun das ganze System mit der Geschwindigkeit v_x, v_y, v_z bewegt, so ist immer noch ein (auf das bewegte System bezogener, sogenannter relativer) Strahl mit den Richtungskosinus p_1, p_2, p_3 möglich, derselbe wird aber nach S. 459 hervorgerufen durch Wellen, welche periodische Funktionen von

$$t - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2} - \frac{p_1 x + p_2 y + p_3 z}{\omega} \tag{41}$$

sind. Dieser Ausdruck entspricht ebenen Wellen, bei denen die Richtungskosinus p_1', p_2', p_3' der Wellennormale proportional sind zu:

$$p_1' : p_2' : p_3' = \frac{p_1}{\omega} + \frac{v_x}{c^2} : \frac{p_2}{\omega} + \frac{v_y}{c^2} : \frac{p_3}{\omega} + \frac{v_z}{c^2}. \tag{42}$$

Diese Relation (42) läßt also im bewegten System die Richtung der Wellennormale aus der Richtung des Strahles berechnen und umgekehrt. Diese Relation ist identisch mit der oben S. 459 aus dem Huygensschen Prinzip abgeleiteten Relation (35'), denn das dortige $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ entspricht hier dem p_1, p_2, p_3 und annähernd ist $c : \omega = n$ zu setzen.

Nehmen wir daher auf der bewegten Erde den Ort eines Sternes in der Richtung p_1, p_2, p_3 wahr (bezogen auf ein mit der Erde verbundenes Koordinatensystem), so wird die wahre Richtung nach dem Ort des Sternes davon abweichen, denn diese ist identisch mit der Richtung der Normale der vom Stern nach der Erde gesandten Lichtwellen, d. h. der Ort des Sternes berechnet sich aus $p_1', p_2' p_3'$.

Wir wollen genauer den Fall betrachten, daß der Visionsradius des Sternes und die Erdbewegung senkrecht aufeinander stehen mögen. Setzen wir z. B. $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 1$, $v_y = v_z = 0$, $v_x = v$; dann wird nach (42), wenn wir die Lichtgeschwindig-

keit ω in der Luft identifizieren mit c, was hier durchaus gestattet ist, der Ort des Sternes gegeben durch

$$p_1' : p_2' : p_3' = v : 0 : c, \tag{43}$$

d. h. der Ort des Sternes weicht um den Aberrationswinkel ζ vom scheinbaren Ort ab, wobei $tg\,\zeta = v : c$ ist. Dieser Aberrationswinkel ändert sich auch nicht, wenn wir den scheinbaren Ort des Sternes in einem mit Wasser gefüllten Fernrohr beobachten[1]), da wir abgeleitet haben, daß der relative Strahlengang in irgendeinem Systeme brechender Körper durch die Bewegung nicht beeinflußt wird. Direkt kann man dies Resultat hier auch noch in folgender Weise zeigen: Wenn ω merklich von c verschieden ist, wie z. B. bei Beobachtung in Wasser, so ist die zugehörige Wellennormale im Wasser nicht mehr durch (43) gegeben, sondern nach (42) durch

$$p_1' : p_2' : p_3' = v : 0 : \frac{c^2}{\omega} = v : 0 : cn, \tag{44}$$

woraus sich ein Aberrationswinkel $tg\,\zeta' = v : cn$ ergibt. Die zugehörige Wellennormale in Luft oder im Vakuum macht aber einen anderen Winkel ζ mit der z-Achse, und zwar ist, da die Grenze zwischen Luft und Wasser senkrecht zur Strahlrichtung, d. h. zur z-Achse, anzunehmen ist, nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz: $sin\,\zeta : sin\,\zeta' = n$. Da nun bei der Kleinheit von ζ und ζ' die sin mit den tg zu identifizieren sind, so folgt $tg\,\zeta = v : c$, d. h. es ergibt sich derselbe Wert für den Aberrationswinkel, als ob der Ort des Sternes direkt in Luft beobachtet wäre.

10. Der Polarisationsversuch von Fizeau. Während abgesehen von der Aberration und der Änderung der Schwingungsdauer nach dem Dopplerschen Prinzipe, nach der entwickelten Theorie ein Einfluß der Erdbewegung auf die auf der Erde zu beobachtenden optischen Erscheinungen in erster Ordnung nach v nicht zu erwarten ist und tatsächlich auch im allgemeinen nicht beobachtet ist, glaubte Fizeau[2]) doch in einem Falle die Wirkung der Erdbewegung konstatiert zu haben.

Beim schiefen Durchgange eines polarisierten Lichtbündels durch eine Glasplatte ändert sich das Azimuth der Polarisation (vgl. oben S. 272). Der benutzte Apparat bestand aus einem polarisierenden Prisma, einer Anzahl hintereinander gestellter

1) Vgl. oben S. 109.

2) Ann. de chim. et de phys. (3) 58, S. 129, 1860. — Pogg. Ann. 114, S. 554, 1861.

Glassäulen und einem Analysator. Zur Zeit der Sonnenwende, meist um die Mittagsstunde, wurde durch geeignet gestellte Spiegel ein Bündel Sonnenstrahlen durch den Apparat von Ost nach West und dann von West nach Ost geschickt. Es sollte dadurch sich im Mittel eine kleine Differenz in der Analysatoreinstellung ergeben.

Nach der hier gegebenen Theorie kann eine solche Differenz nicht bestehen. Denn wenn in irgendeiner Stellung des Apparates der Analysator auf Dunkelheit eingestellt ist, so heißt das, daß die Lichtbewegung beschränkt ist auf einen Raum, der sich hinter den Analysator nicht mehr fortsetzt. Dieser Raum ändert, wie wir oben S. 460 erörterten, durch die Bewegung der Erde seine Begrenzung nicht, falls der Strahlengang relativ zum Apparat unverändert gehalten wird, auch wenn kristallinische Medien zur Erzeugung der Begrenzungsfläche S des Lichtraumes benutzt werden. Daher müßte die Dunkelstellung des Analysators unabhängig sein von der Orientierung des Apparates gegen die Erdbewegung. Es ist jedenfalls wünschenswert, daß dieser Versuch Fizeaus noch einmal wiederholt wird; vorläufig können wir es wohl noch als zweifelhaft hinstellen, ob wirklich in diesem Punkte ein Widerspruch mit der hier gegebenen Theorie und Erfahrung besteht.

11. Der Interferenzversuch Michelsons. Dieser berühmte Versuch geht darauf aus, durch außerordentliche Verfeinerung der optischen Messung einen Einfluß 2. Ordnung nach v experimentell zu suchen. — Die Zeit, welche das Licht gebraucht, um sich zwischen zwei in Ruhe befindlichen Punkten A und B fortzupflanzen, die den Abstand l besitzen sollen, beträgt $t_1 = l/c$, falls c die Lichtgeschwindigkeit ist. Wir wollen uns den Vorgang im Vakuum, oder, was hier gleichbedeutend ist, in Luft denken. Wenn beide Punkte A und B eine gemeinsame Geschwindigkeit v in Richtung der Lichtstrahlen besitzen, so ändert sich die Übergangszeit t_1' des Lichtes zwischen A und B. Nämlich nach der Zeit t_1' muß das Licht nicht nur die Strecke l durchlaufen haben, sondern auch diejenige Strecke, welche der Punkt B in der Zeit t_1' zurückgelegt hat, d. h. im ganzen die Strecke $l + vt_1'$, so daß die Relation besteht:

$$t_1'c = l + vt_1'. \tag{45}$$

Wenn das Licht bei B reflektiert wird, so braucht es, um wieder nach A zurückzugelangen, die Zeit t_2', wobei

(46) $$t_2'c = l - v t_2'$$

ist. Denn dieser Fall unterscheidet sich vom vorigen nur dadurch, daß A sich den reflektierten Lichtstrahlen entgegenbewegt. Daher ist die ganze Zeit t', in welcher das Licht zwischen den beiden Punkten A und B hin und zurückgeht, nach (45) und (46):

$$t' = t_1 + t_2 = \frac{l}{c}\left(\frac{1}{1 - v/c} + \frac{1}{1 + v/c}\right),$$

oder

(47) $$t' = \frac{2l}{c}\left(1 + \left[\frac{v}{c}\right]^2\right),$$

falls wir bis auf 2. Ordnung in v/c entwickeln. Die Übergangszeit t' wird also erst in 2. Ordnung durch die gemeinsame Bewegung von A und B beeinflußt, immerhin müßte dieser Einfluß durch eine empfindliche Interferenzmethode nachweisbar sein.

Der Versuch wurde im Jahre 1881 von Michelson[1]) ausgeführt, indem er eine Art Interferentialrefraktor verwendete, welcher zwei gleich lange, horizontale, zueinander senkrechte Arme P und Q besaß (vgl. Figur 57 auf S. 142). Es kamen zwei Lichtbündel zur Interferenz, von denen das eine längs P hin und her ging, das andere längs Q. Der ganze Apparat konnte um eine vertikale Achse gedreht werden, und es wurden ihm die beiden Lagen gegeben, in denen einerseits P, andererseits Q möglichst in die Richtung der Erdbewegung fiel. Man hätte eine Verschiebung der Interferenzstreifen bei der Drehung des Apparates von der einen Lage in die andere erwarten sollen.

Wir wollen zunächst diese Verschiebung genauer berechnen. Es möge der Arm P in der Richtung der Erdbewegung v liegen, der Arm Q senkrecht dagegen. A sei der Kreuzungspunkt der Arme P und Q. Die Zeit t', in welcher das Licht längs P hin und zurückgeht, ist durch (47) gegeben. Die Zeit t'', in welcher das Licht längs des Armes Q hin und zurückgeht, ist nun aber nicht etwa einfach durch $t'' = 2l:c$ gegeben, falls auch der Arm Q die Länge l hat, sondern es ist zu berücksichtigen, daß der Kreuzungspunkt A der beiden Arme P und Q, von denen das Licht ausgeht und nach dem es zur Zeit t' durch Reflexion in P zurückkehrt, verschiedene Lagen im Raum einnimmt. Dieser Kreuzungspunkt A

1) Americ. Journ. of Science (3) 22, S. 120, 1881.

hat sich nämlich um vt' verschoben (vgl. Figur 107). Wir wollen die Anfangslage des Kreuzungspunktes A durch A_1, die Endlage durch A_2 bezeichnen. Damit das Licht daher von A_1 ausgehend durch Reflexion am Ende des Armes Q zum Punkte A_2 geworfen wird, muß der reflektierende Spiegel in Q etwas schief gegen die Wellennormale stehen, das Licht hat den Weg $2s$ zu durchlaufen, wobei ist:

$$s^2 = l^2 + \left(\frac{vt'}{2}\right)^2,$$

Fig. 107.

und $t'' = 2s:c$ bezeichnet die Zeit, welche das Licht zum Durcheilen des Armes Q hin und zurück gebraucht. Unter Rücksicht auf (47) ist nun mit Entwickelung bis auf Glieder 2. Ordnung in v:

$$t'' = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{8l^2}t'^2\right) = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right), \tag{48}$$

so daß entsteht

$$t' - t'' = \frac{l}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}. \tag{49}$$

Wenn diese Zeitdifferenz gleich einer ganzen Periode T wäre, so würden die Interferenzfransen um eine ganze Fransenbreite verschoben sein gegenüber ihrer Lage, die ohne Erdbewegung vorhanden wäre, d. h. für $v = 0$. Drückt man daher die Verschiebung δ der Interferenzfransen in Bruchteilen von Streifenbreiten aus, so folgt aus (49):

$$\delta = \frac{t' - t''}{T} = \frac{l}{cT} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{l}{\lambda}\zeta^2. \tag{50}$$

wobei ζ der Aberrationswinkel ist. Nach S. 108 beträgt $\zeta = 20{,}5''$ $= 20{,}5 \cdot \pi : 180 \cdot 60^2 = 0{,}995 \cdot 10^{-4}$ in Bogenmaß.

Die Verschiebung der Interferenzfransen, wenn einmal P in Richtung der Erdbewegung liegt, das andere Mal aber Q in dieser Richtung, müßte das Doppelte von δ betragen.

Nun war aber keine Verschiebung der Interferenzfransen zu beobachten. Da indes bei diesem Versuch die Empfindlichkeit der Methode noch nicht genügend war, so wurde dieselbe später von

Michelson und Morley[1]) und von Morley und Miller[2]) dadurch gesteigert, daß jedes Lichtbündel durch Spiegel mehrfach hin und her reflektiert wurde. Dadurch wurde derselbe Effekt erzielt, als ob die Arme P und Q viel länger gewesen wären. Jedes Lichtbündel hatte in den Versuchen von Michelson und Morley einen Weg von 22 Metern im ganzen zu durchlaufen (d. h. es ist $l = 11$ m zu setzen). Der Apparat war auf einer schweren Steinplatte montiert, welche auf Quecksilber schwamm, und konnte so leicht um eine vertikale Achse gedreht werden. Bei dieser Drehung hätte man nach Formel (50) eine Verschiebung der Interferenzfransen von $2\delta = 0{,}4$ Streifenbreite erwarten sollen, es ergaben sich aber Verschiebungen von höchstens 0,02 der Streifendistanz; dieselben dürften wohl von Beobachtungsfehlern herrühren. — Bei den Versuchen von Morley und Miller war die Empfindlichkeit der Anordnung noch größer und ergab trotzdem keine Verschiebung der Interferenzen.

Um das negative Versuchsresultat zu erklären, kann man versucht sein, die Theorie umzustoßen, d. h. den Äther nicht in absoluter Ruhe anzunehmen, sondern zu schließen, daß der Äther an der Erdbewegung teilnimmt. Man würde dann etwa zu der Theorie von Stockes geführt werden, auf welche wir weiter unten noch zurückkommen werden. — Einen anderen Weg zur Erklärung des negativen Resultates beim Michelsonschen Interferenzversuch bietet die von Lorentz und Fitzgerald gemachte Hypothese, **daß die Länge eines festen Körpers abhängig ist von der Bewegung desselben im Vakuum.**

In der Tat, wenn der in Richtung der Erdbewegung liegende Arm l um $l\frac{v^2}{2c^2}$ kürzer ist, als der andere, so würde hierdurch die Zeitdifferenz $t' - t''$, wie sie in (49) berechnet ist, gerade kompensiert werden, d. h. dann würde, dem Versuch entsprechend, sich keine Verschiebung der Interferenzfransen ergeben.

So befremdend diese ad hoc erfundene Hypothese auf den ersten Blick erscheinen mag, daß die Dimensionen eines Körpers von seiner „absoluten" Bewegung abhängig sein sollen, so liegt sie doch schließlich garnicht so fern, sobald man annimmt, daß auch die zwischen den Molekülen des Körpers wirkenden sogenannten Molekular-

1) Amer. Journ. of Science (3) 34, S. 333, 1887. — Phil. Mag. (5), 24, S. 449, 1887.

2) Phil. Mag. (5) 9, S. 680, 1905.

kräfte geradeso wie die elektrischen und magnetischen Kräfte durch den Äther vermittelt werden, und daß daher eine Translation im Äther die Molekularkräfte beeinflussen kann, geradeso wie die dargelegte Theorie die Anziehung oder Abstoßung zwischen elektrisch geladenen Teilchen als modifiziert ergibt durch eine Translation der Teilchen im Äther. Da v^2/c^2 den Wert 10^{-8} besitzt, so würde z. B. der mit der Erdbewegung zusammenfallende Durchmesser der Erde nur um 6,5 cm verkürzt werden. Indes ergibt sich nun eine neue Schwierigkeit, weil nach der Lorentz-Fitzgeraldschen Hypothese eine Doppelbrechung des Lichtes infolge der Erdbewegung eintreten müßte, die nach Versuchen von Rayleigh[1]) und Brace[2]) nicht vorhanden ist. Diese Schwierigkeit versuchte Lorentz[3]) durch die Annahme von Elektronen, die durch die Bewegung deformiert werden, zu beseitigen.

Erhebt man die Unabhängigkeit der optischen Erscheinungen von der absoluten Bewegung bei relativer Ruhe von Lichtquelle, Apparat und Beobachter zum Postulat (sogenanntes Prinzip der Relativität), so kann man von dieser formal andern Grundlage aus, wie Einstein[4]) gefunden hat, ebenfalls auf die Transformationsgleichungen von Ort und Zeit beim Übergang vom ruhenden zum bewegten System kommen. Wenn dadurch natürlich auch keine Erklärung des negativen Resultates der Versuche von Michelson, Morley und Miller gegeben ist, so böte dieser Weg doch zur mathematischen Behandlung der Erscheinungen von relativer Ruhe der Lichtquelle gegen Beobachter und Apparat elegante Einfachheit, z. B. bei Berechnung des Strahlungsdruckes, und könnte darum als heuristisches Prinzip von Nutzen sein. — Die Theorie von Einstein, welche auch als Relativitätstheorie[5]) bezeichnet wird und die bei vielen Mathematikern und Physikern Interesse gefunden hat, läßt sich jedoch auf ungleichförmige Translation und Rotation nicht ausdehnen und scheint auf genau gleichförmige Translation beschränkt bleiben zu müssen. Allein hieraus[6]) ist schon

---

1) Rayleigh, Phil. Mag. (6) **4**, S. 678, 1902.

2) D. B. Brace, Phil. Mag. (6) **7**, S. 317, 1904.

3) H. A. Lorentz, Versl. K. Ak. van Wet. **12**, S. 986, 1904.

4) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, S. 891, 1905.

5) Eine Darstellung derselben gab M. Laue, Das Relativitätsprinzip, Braunschweig 1911, F. Vieweg & Sohn. Die Wissenschaft Heft 38.

6) E. Gehrcke: Verh. D. Phys. Ges. **13**, 665, 990, 1911; ebenda **14**, 294, 1912.

zu erkennen, daß diese „Theorie" keine physikalische Bedeutung haben kann. Ferner aber ist die prinzipielle Grundlage der Theorie, auch wenn man sich auf genau gleichförmige Translation beschränkt, unzureichend. Denn die für die Theorie wesentliche Zeitdefinition und das Relativitätsprinzip sind logisch nicht miteinander vereinbar[1]). Wir hätten keine Veranlassung, hier auf dieses Zerrbild einer physikalischen Theorie zurückzukommen, wenn sie nicht bis auf den heutigen Tag noch Anhänger besäße, und wenn sie nicht bis vor kurzer Zeit fast allgemein für richtig und grundlegend für die gesamte Physik gehalten worden wäre. So viel ist sicher, daß die Begeisterung für die Relativitätstheorie die größte Massensuggestion war, die in der Physik seit den Tagen der N-Strahlen vorgekommen ist; eine Geschichte der Physik unserer Zeit wird diese beiden Bewegungen als im höchsten Grade charakteristisch berücksichtigen müssen.

12. Die Stockes'sche Theorie der Aberration.[2]) Wie bereits oben (S. 446) erwähnt, hat Stockes die Ansicht ausgesprochen, daß der Äther eine Art Flüssigkeit ist, deren Teile sich gegeneinander bewegen können. Der Äther ist experimentell das, was in einem Volumen zurückbleibt, wenn alle ponderable Materie daraus entfernt wird, also das Vakuum. Ob dieses Vakuum, das der Tummelplatz elektrischer, magnetischer, optischer und anderer Erscheinungen ist, Gewicht besitzt und bewegenden Kräften Trägheitswiderstände entgegensetzt, ist eine Frage, die wir hier nicht erörtern brauchen und können.

Es bedeute in Fig. 108a l ein Stück einer ebenen Wellenfläche, die sich mit der Geschwindigkeit c fortpflanzen würde, wenn der Äther allseits ruhte. Wir wollen dann überlegen, wie groß der Winkel sein mag, um den sich l nach der Zeit dt gedreht haben wird, wenn im Äther Strömungen stattfinden. Wir beschränken uns dabei der Einfachheit halber auf Strömungen, die parallel zur Zeichnungsebene gerichtet sind. In der Zeit dt wird sich gemäß dem Huygens'schen Prinzip von allen Punkten der Welle und darum auch von den Punkten 1 und 2 eine elementare Kugelwelle vom Radius $c\,dt$ ausbreiten. Wenn die Ge-

1) E. Gehrcke, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. München 1912, S. 209.

2) Stokes, Mathematical and Physical papers. 1, S. 134. — Lorentz, Theory of Electrons, Leipzig 1909, S. 168ff. Die bei Stokes und Lorentz gegebene Darstellung bezieht sich im Gegensatz zu der obigen auf die allgemeine Drehung der Wellenfläche im Raum.

schwindigkeit des Äthers im Punkt 1 mit g_1, im Punkte 2 mit g_2 bezeichnet wird,[1]) so wird die von 1 ausgegangene Kugelwelle um das Stück $g_1\,dt$, die von 2 ausgegangene um das Stück $g_2\,dt$ mitgenommen worden sein. Die Wellenfront $1'\,2'$ nach der Zeit

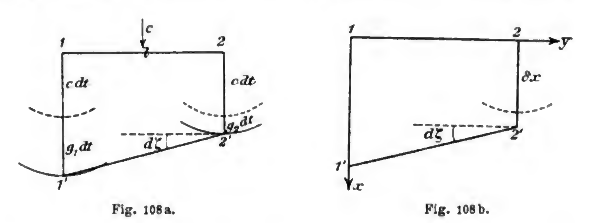


Fig. 108 a. Fig. 108 b.

dt wird also um einen Winkel $d\zeta$ gedreht sein, wobei, wie aus der Figur 108 a folgt:

$$d\zeta = \frac{(g_1 - g_2)\,dt}{l}.$$

Wenn wir nunmehr die Annahme einführen, daß das betrachtete Stück l der Wellenfläche so klein ist, daß gemäß der Taylorschen Reihe die Geschwindigkeiten g_1 und g_2 in linearer Abhängigkeit von l stehen, so können wir die letzte Gleichung unter passender Veränderung der Bezeichnungen (s. Fig. 108b) schreiben:

$$d\zeta = -\frac{\partial g_x}{\partial y}\,dt.$$

Hier bezeichnet also g_x die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der zur x-Achse gewählten Fortpflanzungsrichtung der Welle. Nun können wir, wenn wir $\delta x = c\,dt$ einführen (s. Fig. 108b) schreiben:

$$d\zeta = -\frac{1}{c}\frac{\partial g_x}{\partial y}\,\delta x.$$

Der endliche Winkel ζ, den wir suchen, ist also

$$\zeta = -\frac{1}{c}\cdot\int\limits_{x=0}^{x}\frac{\partial g_x}{\partial y}\,\delta x. \tag{51}$$

1) g_1 und g_2 sind Komponenten der Geschwindigkeit senkrecht zu l.

Wenn die Geschwindigkeiten g des Äthers klein gegen c sind, so ist $\int_0^s \delta x$ einfach = dem Wege s, den die Welle zurücklegt. Unter dieser Annahme und unter der weiteren Annahme, daß der Äther wirbelfrei ist, kann man nun, wie Stockes gefunden hat, das Integral der Gleichung (51) sofort ausführen. Die Wirbelfreiheit des Äthers wird nämlich durch Bedingungen ausgedrückt, die aus der Hydrodynamik bekannt sind, so daß wir haben:

$$\frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial x} = \mathrm{rot}_z \mathfrak{g} = 0\,. \tag{52}$$

Somit folgt:

$$\zeta = -\frac{1}{c} \cdot \int_{x=0}^{s} \frac{\partial g_y}{\partial x}\,\delta_x = -\frac{1}{c} \cdot \Big[g_y\Big]_{x=0}^{s}\,. \tag{53}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Richtungsänderung ζ einer ebenen Welle längs ihres Weges proportional dem Geschwindigkeitsunterschied am Anfang und Ende ist. Sie ist in bemerkenswerter, formaler Übereinstimmung mit der auf S. 464 abgeleiteten Beziehung: $\mathrm{tg}\,\zeta = v:c$. Es folgt ferner aus (53) und aus S. 464, daß ein Beobachter, der die Wellenfront auffängt und dessen Eigengeschwindigkeit zwischen den Werten g_A und g_B variiert, relative Drehungen der Wellenfront um Winkel von der Größe $\frac{g_A - g_B}{c}$ wahrnimmt. Dieser Schluß ist unabhängig davon, ob der Beobachter sich mit dem Äther mitbewegt (etwa $g_{y_{x=s}} = g_A$, $g_B = 0$) oder nicht. Man kann also aus der Tatsache der Aberration keinen Schluß auf das Verhalten des Äthers ziehen; sowohl der unbewegliche Äther von Fresnel wie der bewegliche, wirbelfreie Äther von Stokes erklärt quantitativ die Erfahrungstatsache der Aberration.[1])

Nun stehen wir aber vor der weiteren Tatsache, daß der Michelsonsche Versuch keine Verschiebung der Interferenzstreifen ergeben hat (vgl. S. 468). Vom Boden der Stokesschen Theorie würde hieraus zu folgern sein, daß die Erde den Äther bei ihrer

---

1) Bei Berücksichtigung höherer Potenzen von g/c würde ein Unterschied der Theorien auftreten. Die Ausführung möglichst genauer Messungen der Abberration ist daher von großer Bedeutung.

Bewegung im Weltraume mitnimmt[1]). Diese Folgerung ist, wie Lorentz betont hat, mit der Wirbelfreiheit des Äthers nicht zu vereinigen. Aber man kann die Hypothese machen[2]), daß die Wirbellosigkeit[3]) keine ganz vollkommene ist, daß vielmehr in (52) an Stelle der Null eine kleine Größe höherer Ordnung steht; in diesem Falle blieben die obigen Schlüsse, soweit sie einen Vergleich mit der Erfahrung zulassen, bestehen. Auch ist möglicherweise zwischen den Ätherteilchen untereinander keine merkliche Reibung vorhanden, wohl aber zwischen Äther und ponderabler Materie in gewissen Zuständen der Bewegung (und daher auch der Temperatur); die mächtige, mit 30 km/sec (relativ zu den Fixsternen) bewegte Erde, deren Inneres sich in einem Zustande befindet, über den wir nicht viel wissen, verhält sich hinsichtlich der Fähigkeit, Äther mitzureißen, möglicherweise anders als das optisch klare, mit einigen Metern pro Sekunde bewegte Wasser im Fizeauschen Versuch (S. 454) und anders als die verhältnismäßig langsam bewegten Körper in vielen anderen Experimenten, die erfolglos eine kinematische Äußerung des Äthers festzustellen suchten.[4]) Wir stehen hier an der Grenze der Forschung und müssen abwarten, was die Zukunft bringt.

Es sei noch bemerkt, daß eine Übertragung der Stokesschen Gleichung (52) (und der ihr entsprechenden Gleichungen für die andern Koordinatenrichtungen) auf den Äther als Träger der elektromagnetischen Erscheinungen das System der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen verändern würde.

---

1) Die Ansicht, daß die Erde (und die Planeten) den Äther in ihrer Nachbarschaft mitnehmen, teilte bereits Descartes, welcher annahm, daß unser Planetensystem einen Ätherwirbel darstellt, in welchem jeder Planet die Geschwindigkeit des ihn umgebenden Äthers hat.

2) Allerdings ist diese Hypothese ebenso ad hoc erfunden wie die Lorentz-Fitzgeraldsche Kontraktionshypothese (S. 468).

3) Es sei hier nochmals hervorgehoben, daß diese Betrachtungen unabhängig davon sind, ob der Äther als Flüssigkeit aufgefaßt wird, der Dichte, Kompressibilität und andere, einer materiellen Flüssigkeit angehörige Eigenschaften hat, oder ob man über den Äther rein phoronomische Angaben macht, wie wir dies oben taten. Den Ätherteilchen gravitierende oder träge Masse zuzuschreiben, liegt kein Grund vor.

4) Über derartige Versuche siehe Laue, Das Relativitätsprinzip. Die Wissenschaft Heft 38. Braunschweig 1911; ferner Lodge, Der Weltäther, ebenda, Heft 41.

III. Abschnitt.

Die Strahlung der Körper.

Kapitel I.

Die Strahlung in energetischer Deutung.

1. Das Emissionsvermögen. Wir haben früher (S. 72) photometrische Grundsätze mit Hilfe gewisser Definitionen abgeleitet, deren Berechtigung sich dadurch erwies, daß die so berechneten Beleuchtungsstärken oder Helligkeiten in Übereinstimmung mit den durch das Auge wahrnehmbaren Tatsachen standen. Wir können uns nun aber an Stelle dieses physiologischen, subjektiven Maßes ein physikalisches, objektives Maß für die Wirkung einer Lichtquelle verschaffen, wenn wir die Wärmeentwicklung in irgend einem Körper, welcher die Strahlen der Lichtquelle absorbiert, beobachten. Hierdurch kommt ein neuer Begriff in die photometrischen Definitionen hinein, welcher bei der physiologischen Messung mit Hilfe des Auges nicht eingeführt zu werden brauchte, nämlich der Begriff der Zeit, da die Wärme, welche in einem absorbierenden Körper entwickelt wird, proportional der Zeit ist. Die Wärme muß nach energetischem Grundsatz entstanden sein durch ein gewisses Energiequantum, welches die Lichtquelle in den absorbierenden Körper hineingesandt hat. Wir definieren demgemäß als die Gesamt-Emission E einer Lichtquelle Q die von Q in der Zeiteinheit durch Strahlung in die Umgebung entsandte Energie.

Die strahlende Energie besteht nun im allgemeinen aus Schwingungen sehr verschiedener Wellenlängen λ. Betrachten wir den Energiebetrag, welcher im Spektralgebiete zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt, so muß derselbe in der Form $E_\lambda \cdot d\lambda$ zu

schreiben sein. Den Faktor E_λ wollen wir die Emission für die Wellenlänge λ nennen.

Die Emission zwischen den Wellenlängen λ_1 und λ_2 ist danach

$$E_{12} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda \cdot d\lambda, \tag{1}$$

und die Gesamtemission

$$E = \int_0^\infty E_\lambda \cdot d\lambda. \tag{2}$$

Die Emission eines Körpers hängt, abgesehen von seiner Natur, auch von der Größe und Gestalt seiner Oberfläche ab. Ein Begriff, der von diesen Nebenumständen frei ist, ist das Emissionsvermögen eines Körpers. Darunter wird die (nach außen gehende) Emission der Einheit der Oberfläche des Körpers verstanden.

2. Die Strahlungsintensität einer Fläche. Der früher (S. 72) ausgesprochene Grundsatz, daß die Lichtmenge konstant bleibt für jeden Querschnitt einer Lichtröhre, d. h. einer Röhre, deren Seiten von Lichtstrahlen gebildet werden, erscheint vom energetischen Standpunkte notwendig, da man die Lichtmenge als Energiefluß in der Zeiteinheit interpretiert. Denn, wie wir oben S. 260 ableiteten, bilden die Lichtstrahlen die Bahnen des Energieflusses, d. h. durch die Seitenflächen einer Lichtröhre tritt weder Energie ein noch aus. Folglich muß der Energiefluß durch jeden Querschnitt einer Lichtröhre derselbe sein, da in jedem Raumteil gleichviel Energie ein- wie ausströmen muß, falls derselbe nicht eine Strahlungsquelle enthält oder die Energie der Strahlung absorbiert.

Wir können daher den Energiefluß, den ein kleines Flächenelement ds innerhalb eines Elementarkegels vom räumlichen Öffnungswinkel $d\Omega$ durch Strahlung entsendet, in der Form schreiben (vgl. die frühere Formel (69) der S. 77):

$$dL = i\, ds \cos\varphi\, d\Omega, \tag{3}$$

wobei φ den Neigungswinkel des Flächenstückes ds gegen die Achse des Elementarkegels, d. h. gegen die betrachtete Strahlenrichtung von ds, bezeichnet. i soll die Strahlungsintensität der Fläche ds genannt werden.

Wenn dem Auge eine gekrümmte strahlende Fläche an allen Stellen gleich hell erscheint, so muß, wie wir S. 76 ableiteten, i konstant, d. h. unabhängig von der Neigung φ sein. Ob i nach energetischen Grundsätzen konstant ist oder nicht, wollen wir später diskutieren. Wenn wir voraussetzen, daß i konstant ist, so berechnet sich aus (3) der Energiefluß, den ds innerhalb eines endlichen Kreiskegel entsendet, dessen Mantelstrahlen den Winkel U mit der Normale auf ds bilden, nach der auf S. 77 abgeleiteten Formel (73) zu:

(4) $$L = \pi\, i\, ds \sin^2 U.$$

Setzen wir daher $U = \pi/2$ und dividieren durch ds, so erhalten wir das Emissionsvermögen e von ds in der Form:

(5) $$e = \pi i.$$

Man kann auch hier i als Gesamtstrahlungsintensität unterscheiden von i_λ, der Strahlungsintensität für eine Wellenlänge λ. Bezeichnet man mit e_λ das Emissionsvermögen für die Wellenlänge λ, so ist auch

$$e_\lambda = \pi i_\lambda.$$

3. Das mechanische Äquivalent der Lichteinheit. Unter der Lichteinheit versteht man die Energie, welche die Lichtstrahlen der Hefnerlampe (vgl. oben S. 75) in horizontaler Richtung innerhalb eines Kegels vom räumlichen Öffnungswinkel 1 (d. h. auf 1 cm² in 1 cm Entfernung) pro Sekunde entsenden. Die Gesamtemission dieser Lampe innerhalb dieses Kegels fand Tumlirz[1]) zu 0,1483 Grammkalorien pro Sekunde, Angström[2]) zu 0,215 Grammkalorien pro Sekunde. Da nun 1 Grammkalorie gleich $419 \cdot 10^5$ *erg*, d. h. absolute mechanische Arbeitseinheiten, ist (mechanisches Wärmeäquivalent), und da nach Angström nur 0,9 Proz.[3]) der gesamten ausgestrahlten Energie dem sichtbaren Licht angehört, so ist

(7) $$1 \text{ Lichteinheit} = 0{,}215 \cdot 419 \cdot 10^5 \cdot 0{,}009 = 8{,}1 \cdot 10^4 \text{ erg/sec.}$$

---

1) Wied. Ann. 38, S. 650, 1889.

2) Wied. Ann. 67, S. 648, 1899. — Phys. Ztschr. **3**, 1902, S. 258.

3) Tumlirz fand hierfür 2,4%, indem er die Wärmestrahlen durch eine Wasserschicht absorbierte und so von den Lichtstrahlen trennte. Die hier benutzte Zahl bezieht sich auf die neuere Arbeit von Angström, der die

Diese Zahl ist also das mechanische Äquivalent der Lichteinheit.

Die Einheit der Beleuchtungsstärke bildete die Meterkerze (vgl. oben S. 75), d. h. die Lichtmenge, welche die Hefnerlampe in 1 m Entfernung auf die Flächeneinheit (1 cm^2) sendet. Der räumliche Öffnungswinkel beträgt in diesem Falle $1:100 \cdot 100$, es ist daher nach (7)

$$(8) \qquad 1 \text{ Meterkerze} = 8{,}1 \frac{erg}{sec}.$$

Das Auge empfängt daher bei der Beleuchtungsstärke von 1 Meterkerze, d. h. wenn es sich in einem Abstand von 1 m von der Kerze befindet, und falls die Pupillenöffnung 3 mm beträgt, etwa die Energie von 0,6 *erg* in der *sec*; dieser Energiefluß könnte erst in einer Zeit von $2\frac{1}{3}$ Jahren 1 g Wasser um 1^0 Celsius erwärmen; hierdurch gewinnt man eine Vorstellung von der ungeheuren Empfindlichkeit des Auges. Wenn dasselbe noch einen Stern 6. Größe wahrnimmt, so reagiert das Auge sogar noch auf eine Beleuchtungsstärke von etwa $1 \cdot 10^{-8}$ Meterkerzen, da ein Stern 6. Größe etwa dieselbe Helligkeit hat wie die Hefnerlampe in 11 km Entfernung. In diesem Falle erhält das Auge (bei 3 mm Pupillenöffnung) also einen Energiefluß von $0{,}6 \cdot 10^{-8}$ *erg* pro *sec*.

Die deutsche Vereinsparaffinkerze (Paraffinkerze von 2 cm Durchmesser, Flammenhöhe 50 mm), welche seit 1868 unter Aufsicht der Lichtmeßkommission des Deutschen Vereins der Gas- und Wasserfachmänner nach genauen Vorschriften hergestellt wird, hat etwa eine 1,20 mal stärkere Emission als die Hefnerlampe.[1])

4. Die Sonnenstrahlung. Nach Langley wird etwa $\frac{1}{3}$ der Energie der Sonnenstrahlung in der Erdatmosphöre absorbiert, falls die Sonne im Zenith steht. Nach seinen Messungen würde die Sonne pro Minute dem Quadratzentimeter der Erde bei senkrechter Inzidenz etwa 3 gr cal (genauer 2,84 gr cal) zustrahlen (Solarkonstante), falls die Atmosphäre nicht absorbierte. (Angström

Strahlen zunächst spektroskopisch trennte, die nicht sichtbaren Strahlen abblendete, und die sichtbaren Strahlen durch eine Linse auf einem Bolometer oder einer Thermosäule vereinigte. Der hier beobachtete Effekt wurde nun verglichen mit der Wirkung, welche die nicht spektral zerlegten Lampenstrahlen in einer derartigen Entfernung der Lampe vom Bolometer ergaben, daß die photometrische Helligkeit am Ort des Bolometers die gleiche war wie die der vereinigten Lichtstrahlen im ersten Falle.

1) Vgl. Liebenthal, Praktische Photometrie S. 106 und 141.

erhält 4 gr cal pro Minute). Der Energiefluß auf der Erdoberfläche mit Rücksicht auf die Absorption in der Atmosphäre wäre daher nach Langley etwa 2 gr cal pro Minute $= 1{,}3 \cdot 10^6\, erg/sec$. Die oben S. 443 benutzte (Pouilletsche) Zahl hierfür ist etwas kleiner. — Die Energie des sichtbaren Lichtes zwischen den Fraunhoferschen Linien A und H_2 beträgt etwa 35 % der Gesamtstrahlung, d. h. es ist die sogenannte Beleuchtungsstärke B der Sonne (ohne Absorption in der Luft) nach Langleys Messungen:

$$B = 6{,}9 \cdot 10^5 \frac{erg}{sec} = 46300 \text{ Meterkerzen.} \tag{9}$$

Rechnet man als mittlere Entfernung der Sonne von der Erde $149 \cdot 10^9$ m, so beträgt demnach die Lichtstärke der Sonne $1{,}02 \cdot 10^{27}$ Kerzen.

5. Der Wirkungsgrad einer Lichtquelle. Unter dem Wirkungsgrad g einer Lichtquelle versteht man das Verhältnis der Energie der ausgesandten Lichtstrahlen zu der Energie, welche die Lichtquelle zur Unterhaltung ihres Leuchtens in der gleichen Zeit verbraucht.

So verbraucht etwa eine Öllampe (Carcel-Lampe) von 9,4 Kerzenstärke pro Stunde 42 g Öl, d. h. in der sec. $1{,}16 \cdot 10^{-2}$ g Öl. Die Verbrennungswärme des Öls beträgt 9500 cal pro g, d. h. $39{,}7 \cdot 10^{10}$ erg. Nun ist nach Formel (7) die Lichtemission der Kerzeneinheit gegeben für einen Öffnungswinkel 1. Für volle Strahlung rings herum, d. h. für einen Öffnungswinkel 4π, ist daher diese Zahl mit 4π zu multiplizieren, falls man annimmt, daß die Strahlung nach allen Richtungen die gleiche ist. Daher ist für die Öllampe der Wirkungsgrad:

$$g = \frac{9{,}4 \cdot 8{,}1 \cdot 10^4 \cdot 4\pi}{1{,}16 \cdot 10^{-2} \cdot 39{,}7 \cdot 10^{10}} = 0{,}2 \cdot 10^{-2} = 0{,}2\,\%\,.$$

Der Wirkungsgrad ist also sehr gering, denn nur 0,2 % der im Öl enthaltenen Energie wird zur Beleuchtung ausgenutzt.

Wesentlich günstiger steht es mit der elektrischen Beleuchtung. Im elektrischen Bogenlichte kann man eine Kerzenstärke mit dem Effektverbrauch von rund $^1/_2$ Watt, d. h. $5 \cdot 10^6\, erg/sec$ erzielen. Daher würde für Bogenlicht sein

$$g = \frac{1{,}02 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^6} = 0{,}20 = 20\,\%\,.$$

(Bei Glühlampen würde g etwa 3 % sein.)

Danach muß es praktischer sein, anstatt das Öl direkt als Lichtquelle zu verwenden, seine Verbrennungswärme zum Treiben eines Motors zu benutzen, welcher eine Dynamomaschine in Gang erhält, die einen elektrischen Lichtbogen erzeugt. Im Diesel-Motor kann 70% der Energie des Öls in mechanische Energie umgesetzt werden, durch die Dynamomaschine kann etwa 90% davon in elektrische Energie verwandelt werden, welche zur Speisung des Lichtbogens zur Verfügung steht; danach würde der Wirkungsgrad der elektrischen Beleuchtung, berechnet auf den Ölverbrauch, sich treiben lassen auf

$$g = 0{,}20 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 13\,\%\,.$$

Es ist hierbei allerdings nicht berücksichtigt, daß auch die Kohlen des Lichtbogens abbrennen. Für eine Glühlampe gewöhnlicher Konstruktion, welche etwa $3^1/_2$ Watt pro Kerze erfordert, würde $g = 1{,}8\,\%$ sein, berechnet auf den Verbrauch an Heizmaterial des Motors. Für eine Nernstsche Glühlampe oder eine Metallfadenlampe, welche rund 1 Watt pro Kerze erfordert, würde sich g steigern auf $6{,}5\,\%$.

6. Der Druck der Strahlung. Es mögen ebene Wellen senkrecht gegen die ebene Grenzfläche eines Körpers fallen. Die elektrischen Kräfte der Wellen können dann auf den Körper keine senkrecht gegen ihn gerichteten Druckkräfte ausüben, da sie nur tangentiale Komponenten haben, die magnetischen Kräfte werden dies aber tun, da in dem Körper elektrische Strömungen stattfinden und jedes Stromstück der Länge dl durch ein Magnetfeld $\mathfrak{H}$, welches senkrecht gegen den Strom gerichtet ist, eine senkrecht gegen beide Richtungen liegende Kraft $i\,dl\,\mathfrak{H} : c$ erfährt, falls i die Stromstärke nach elektrostischem Maße bedeutet (vgl. oben S. 422, Formel (39)). Legen wir die z-Achse senkrecht zur Grenzfläche des Körpers, positiv ins Innere des Körpers hinein gerichtet, so wird ein Volumenelement dv des Körpers wegen seiner Stromdichte j_x durch die y-Komponente β der in ihm stattfindenden magnetischen Kraft nach der $+z$-Achse getrieben mit einer Kraft $+ {}^1/_c \cdot j_x\,dv \cdot \beta$, wegen seiner Stromdichte j_y erfährt es durch die x-Komponente α der magnetischen Kraft einen Antrieb nach der $-z$-Achse: $- {}^1/_c j_y\,dv \cdot \alpha$.[1]) Dabei ist der Sinn des Koordinatensystems wie stets (vgl. oben S. 252) gewählt. Da nun nach den

1) Vgl. dazu die analogen Formeln (42) S. 423.

Grundgleichungen (7) S. 252, falls die Kräfte, wie hier, nur von der z-Richtung abhängen, die Beziehungen bestehen

$$\frac{4\pi}{c} j_x = -\frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{4\pi}{c} j_y = \frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

so wird die auf das Volumenelement dv im Sinne der $+z$-Richtung, d. h. als **Druck**, wirkende Kraft $d'K$:

$$d'K = -\frac{dv}{4\pi}\left(\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial z}\right).$$

Schneiden wir nun aus dem Körper einen Zylinder, der das Oberflächenelement $d\sigma$ des Körpers zur Basis hat und senkrecht gegen seine Oberfläche liegt, so wird auf diesen ganzen Zylinder, der sich von $z = o$ bis $z = a$ (Austritt am hinteren Körperende) erstrecken möge, die Kraft dK ausgeübt:

$$dK = -\frac{d\sigma}{4\pi}\int_o^a \left(\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) dz.$$

Der in Richtung von $+z$ wirkende Druck pro Flächeneinheit ist also:

$$p = \frac{dK}{d\sigma} = \frac{1}{8\pi}\left[(\alpha^2 + \beta^2)_o - (\alpha^2 + \beta^2)_a\right]. \tag{10}$$

Nach dieser Formel kann man in jedem Falle den Druck berechnen, auch in seiner Abhängigkeit von der Intensität der einfallenden Wellen, man muß dazu nur die Aufgabe lösen, aus der Intensität der einfallenden Wellen die im Körper stattfindenden Wellenbewegungen zu bestimmen, was nach den in Kapitel II und IV des II. Abschnittes entwickelten Formeln leicht geschehen kann.

Wenn an der Hinterfläche des Körpers keine merkliche Wellen-Intensität mehr besteht, so ergibt (10):

$$p = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)_o}{8\pi}. \tag{11}$$

Da die Tangential-Komponenten der magnetischen (und elektrischen) Kraft stetig sind beim Durchgang durch die Körperoberfläche (vgl. oben S. 258), so ist

$$\alpha_o = \alpha_e + \alpha_r, \quad \beta_o = \beta_e + \beta_r, \tag{12}$$

wobei der Index e sich auf die einfallende, Index r sich auf die reflektierte Welle bezieht, und die Werte α_e, α_r, β_e, β_r gelten für die Umgebung des Körpers unmittelbar an seiner Grenze.

Ist der Körper ein vollkommener Spiegel, wie er z. B. durch ein Metall von sehr guter Leitfähigkeit realisiert wird, so ist die reflektierte magnetische Kraft α_r gleich und gleich gerichtet mit der einfallenden magnetischen Kraft α_e (vgl. oben S. 271).

Wegen (12) folgt dann $\alpha_0 = 2\alpha_e$, $\beta_0 = 2\beta_e$, so daß (11) ergibt

$$p = \frac{1}{2\pi}(\alpha_e^2 + \beta_e^2). \tag{13}$$

Nun ist nach S. 259 die in der Volumeneinheit in der einfallenden Welle enthaltene magnetische Energie: $\mathfrak{E}_m = \frac{1}{8\pi}(\alpha_e^2 + \beta_e^2)$. Die elektrische Energie ist in fortschreitenden ebenen Wellen stets gleich der magnetischen Energie, wie sich aus der Lösung oben S. 267 für ebene Wellen sofort ergibt. Daher ist die ganze (elektrische und magnetische) Energie der Volumeneinheit $\mathfrak{E}$ in der einfallenden Welle gegeben durch $\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi}(\alpha_e^2 + \beta_e^2)$.

Die reflektierte Welle enthält die gleiche Energie, da der Körper total reflektieren soll. Daher ist die ganze in der Umgebung des Körpers pro Volumeinheit vorhandene Strahlungsenergie $E = \frac{1}{2\pi}(\alpha_e^2 + \beta_e^2)$, so daß die Gleichung (11) für den Strahlungsdruck wird:

$$p = \mathrm{E}. \tag{14}$$

Der Strahlungsdruck, den ebene Wellen bei senkrechter Inzidenz auf einen absolut reflektierenden Körper ausüben, ist also gleich der in der Volumeneinheit seiner Umgebung enthaltenen Energie der einfallenden Wellen.

Da nach § 4 der Energiefluß der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche $1{,}3 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{sec}}$ pro cm² beträgt, so ist also dieser Energiebetrag in $3 \cdot 10^{10}$ cm³ durchstrahlter Luft enthalten. Folglich ist die Energie 1 cm³:

$$\mathrm{E} = \frac{1{,}3 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{10}} = 4 \cdot 10^{-5}.$$

Diesen Druck üben also die Sonnenstrahlen auf ein Quadrat-

zentimeter eines total reflektierenden Körpers aus. Der Druck ist etwa gleich dem Gewicht von $4 \cdot 10^{-5}$ Milligramm, also so klein, daß er experimentell nur mit sehr feinen Hilfsmitteln zu konstatieren ist. Durch subtile Messungen mit dem Radiometer ist dies aber Lebedew[1]) gelungen: der Druck ergab sich übereinstimmend mit der Theorie.[2]) Dieser Strahlungsdruck hat eine große theoretische Bedeutung, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden.

7. Prevosts Theorie des Wärmeaustausches. Jeder Körper strahlt, auch wenn er nicht leuchtet, eine gewisse Energiemenge aus, die um so größer wird und um so mehr Wellen kurzer Periode enthält, je höher die Temperatur des Körpers wird. Wenn daher zwei Körper A und B von verschiedener Temperatur gegenübergestellt werden, so strahlen beide Körper Energie aus und auch

1) P. Lebedew, Ann. d. Phys. **6**, S. 433, 1901; **32**, S. 411, 1910. — Vgl. ferner E. F. Nichols und G. F. Hull, Ann. d. Phys. **12**, S. 225, 1903. — Schwarzschild hat theoretisch den Fall behandelt, daß der betrachtete Körper Kugelform hat. Es existiert ein Maximum des Verhältnisses des Strahlungsdruckes zur Energie der Strahlung für Kugeln eines Durchmessers von ca. $^1/_3$ Wellenlänge (vgl. Sitzungsber. d. Münch. Akad. d. Wissensch., Mathem. Kl. **31**; 293, 1901). Debye hat diese Theorie für Kugeln mit beliebiger Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante vervollständigt (Ann. d. Phys. **30**, 57, 1909).

2) Die Formel (13) bezieht sich auf einen vollkommenen Spiegel. Hat derselbe das Reflexionsvermögen $\rho < 1$, so haben die genannten Physiker als theoretische Formel für den Strahlungsdruck nach dem Vorgang von Maxwell benutzt $p = \mathfrak{E}(1+\rho)$, wobei $\mathfrak{E}$ die pro Volumeinheit in der einfallenden Welle enthaltene Energie bezeichnet. Zu dieser Formel führt aber die hier abgeleitete Formel (11) nur mit einer gewissen Annäherung, wenn nämlich ρ von 1 nicht xu stark abweicht. Wäre $\rho = 0$, so würde (11) $p = \frac{1}{2}\mathfrak{E}$ ergeben, während die Maxwellsche Formel $p = \mathfrak{E}$ ergibt. Dagegen werden die Verhältnisse anders, wenn die Fläche selbst strahlt. Hat sie eine so hohe Temperatur, daß sie ebensoviel Energie ausstrahlt, als sie absorbiert, so ist der Druck stets durch (13) gegeben, d. h. gleich der Energie der hin und her gehenden Strahlung in der Volumeinheit der Umgebung. Dieser Druck ist dann ganz unabhängig von der Beschaffenheit der Fläche. Dies wird weiter unten S. 504 bewiesen. Es ist wichtig, zu bemerken, daß die hier gezogenen Schlüsse, speziell die Formel (13), eine Folgerung der besonderen benutzten Theorie, nämlich der elektromagnetischen Theorie sind, daß sie aber nicht aus allgemeinen energetischen Betrachtungen sich ergeben. So würde sich z. B. (vgl. M. Planck, Vorl. üb. Theor. d. Wärmestrahlg. Leipzig 1906, S. 58) aus der Newtonschen Emanationstheorie der Strahlungsdruck doppelt so groß berechnen als nach der elektromagnetischen Theorie, obwohl auch die erstere Theorie gegen die Grundsätze der Energetik nicht verstößt.

der heißere empfängt strahlende Energie vom kälteren. Die Temperaturen beider Körper gleichen sich dadurch aus, daß der heißere mehr Energie ausstrahlt, als er vom kälteren empfängt und absorbiert, während umgekehrt der kältere mehr Energie empfängt, als ausstrahlt. Diese Auffassung der Strahlungserscheinungen hat zuerst Prevost ausgesprochen.

Wenn daher zur Bestimmung der Emission eines Körpers A die Temperaturerhöhung in einem schwarzen Körpers B, welcher die Strahlen von A absorbiert, gemessen wird, so hängt das Resultat von der Temperaturdifferenz der beiden Körper A und B ab. Man würde um so genauer durch die Temperaturerhöhung in B die volle Emission von A messen, je weniger Energie B selber ausstrahlt. Wenn es sich daher z. B. um die Energie der Lichtstrahlen einer Quelle A handelt, deren Wärmestrahlen durch Absorption in einem Wassergefäß vernichtet werden, so kann man diese Leuchtenergie in vollem Betrage durch Absorption in einem schwarzen Körper B messen, welcher gleiche Temperatur wie das Wassergefäß hat. Denn bei Zimmertemperatur sendet B nicht Lichtstrahlen von merklichem Energiebetrage aus, sondern nur Wärmestrahlen, und diese empfängt B in gleichem Betrage vom Wassergefäß zurück. — Dagegen ist die Gesamtemission einer Lichtquelle etwas höher, als sie durch Absorption in einem schwarzen Körper B von Zimmertemperatur gemessen wird, indes ist in Anbetracht der viel höheren Temperatur der Lichtquelle, z. B. der Sonne oder einer Flamme, diese Korrektion zu vernachlässigen und das Resultat der Messung ist praktisch unabhängig von Schwankungen der Temperatur des Körpers B. — Dagegen ist die Temperatur von B sehr wohl zu berücksichtigen, wenn die Emission eines nicht sehr viel heißeren Körpers A gemessen werden soll. Hiervon soll im nächsten Kapitel noch mehr die Rede sein.

Kapitel II.

Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik auf reine Temperaturstrahlung.

1. Die beiden Hauptsätze der Thermodynamik. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ist das Energieprinzip, nach welchem mechanische Arbeit nur durch Aufwendung eines gewissen Energiequantums zu gewinnen ist, d. h. durch Zustandsveränderungen der die Arbeitsmaschine speisenden Körper. Obgleich nach diesem Satze ein perpetuum mobile unmöglich ist, d. h. eine Maschine, welche beliebig viel Arbeit erzeugt, ohne daß dabei die sie speisenden Körper eine dauernde Veränderung erlitten, so wäre doch noch eine kostenlos arbeitende Maschine denkbar. Energie nämlich steht genug und kostenlos zur Verfügung, man braucht z. B. nur an das ungeheure Energiequantum, welches als Wärme im Meerwasser enthalten ist, zu denken. Nach dem ersten Hauptsatze wäre nun eine (kostenlos arbeitende) Maschine denkbar, welche dadurch fortwährend nutzbare mechanische Energie schafft, daß sie, in das Meerwasser eingesenkt, demselben beständig Wärme entzieht und dadurch Arbeit leistet. Man hat sich nun an Hand der Erfahrung die Überzeugung gebildet, daß eine solche Maschine, die in praktischer Hinsicht ein perpetuum mobile zweiter Art darstellen würde, mit den bisher angewandten Mitteln unausführbar ist: bei allen Motoren, welche, wie z. B. die Dampfmaschine, Wärme in Arbeit umsetzen, müssen mindestens zwei Wärmereservoire verschiedener Temperaturen zu Gebote stehen: die Kesselfeuerung und die kältere Temperatur der umgebenden Luft oder des Wasserdampfkondensators. Allgemein kann nur dann Wärme in Arbeit verwandelt werden, wenn ein gewisses Wärmequantum Q einem Reservoir höherer Temperatur entnommen und ein kleineres Quantum Q' an ein kälteres Reservoir abgeliefert wird.

Wir stellen daher als einen allgemeinen Erfahrungssatz auf, daß man nie fortdauernd auf Kosten von Wärme mechanische Arbeit erzeugen kann, wenn nur ein Wärmereservoir von überall gleicher Temperatur zur Verfügung steht. Dieser Gedanke bildet den Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.[1])

1) Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik wird hier quasi als gleichberechtigt neben den ersten gestellt. Tatsächlich werden nach unseren heutigen Er-

Wir wollen hier zunächst nur eine Folgerung desselben benutzen: Wenn ein nach außen gegen Wärme- und Arbeitsabgabe geschütztes (nach außen abgeschlossenes) System von Körpern zu irgendeiner Zeit überall die gleiche Temperatur hat, so kann, falls man das System sich selbst überläßt **und falls keine Veränderungen in der Natur der Körper eintreten,** niemals eine Temperaturdifferenz im System entstehen. Denn man könnte eine solche Temperaturdifferenz zum Treiben einer Arbeitsmaschine benutzen. Wenn dann durch ihre Wirkung sich die Temperaturdifferenz ausgeglichen haben sollte, so würde wieder von selbst eine solche im System entstehen. Dann könnte man wiederum Arbeit daraus gewinnen und so in infinitum, obgleich ursprünglich nur Wärme von überall derselben Temperatur zu Gebote gestanden hat. Dies würde gegen den zweiten Hauptsatz verstoßen. — Es ist wichtig, zu bemerken, daß man auf diesem Wege Wärme von ursprünglich einerlei Temperatur nur dann fortdauernd zum Arbeitsgewinn benutzen könnte, falls dabei die Natur der Körper des Systems ungeändert bleibt. Denn wenn diese sich verändern, z. B. chemische Verbindungen gebildet werden, so hört die Arbeitsfähigkeit des Systems schließlich auf. Durch Eintreten chemischer Veränderungen kann also wohl eine ursprünglich vorhandene Temperaturgleichheit gestört werden; dies steht nicht im Widerspruch mit dem

fahrungen alle bekannten Wärme- und Strahlungsprozesse von ihm beherrscht. **Man darf dies aber nicht so verstehen, als ob der zweite Hauptsatz ein die gesamte Natur beherrschendes Prinzip sei, wie wir dies vom ersten Hauptsatz annehmen.** Es gibt bisher keine Erscheinung, welche ohne Willkür als eine mögliche Ausnahme vom ersten Hauptsatz aufzufassen wäre, wir müssen vorläufig annehmen, daß auch die denkbar verfeinertste Technik kein perpetuum mobile erster Art zustande bringen wird. Dagegen erscheint es keineswegs ausgeschlossen, daß die Technik eines Tages ein „perpetuum mobile zweiter Art" verwirklicht, also eine Maschine, die lediglich aus Wärme mechanisch nutzbare Arbeit erzeugt, ohne daß bei diesem Prozesse Wärme von höherer zu tieferer Temperatur übergeht. Die Erscheinungen der sogenannten Brownschen Molekularbewegung legen die Lösung dieser Aufgabe nahe und lassen sie nur noch als eine Frage der Technik erscheinen; theoretisch möglich ist sie ebenso wie etwa die technische Ausnutzung der unregelmäßigen Energie des Windes und der Meereswellen. Die in neuerer Zeit wiederholten Versuche, den zweiten Hauptsatz als vollwertiges Prinzip neben den ersten zu stellen, dürften vergebliche Mühen bedeuten. — Die begrenzte Gültigkeit des 2. Hauptsatzes erkannte offenbar bereits Maxwell (Theorie der Wärme, Deutsche Übersetzung von Neesen, Braunschweig 1878, S. 373ff.).

zweiten Hauptsatz; wir können diese Erscheinung ja auch an jedem Verbrenungsprozeß beobachten.

2. Temperaturstrahlung und Luminiszenz. Jeder Körper strahlt Energie aus, mindestens in der Form langwelliger Wärmestrahlen. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder verändert sich der Körper seiner Natur nach bei diesem Strahlungsvorgange nicht, er würde fortdauernd in gleicher Weise strahlen, falls man durch Zufuhr von Wärme seine Temperatur konstant hält. Diesen Vorgang wollen wir als reine Temperaturstrahlung bezeichnen. Oder der Körper verändert sich bei der Strahlung, es würde, allgemein gesprochen, nicht fortdauernd dieselbe Strahlung bestehen bleiben, auch wenn die Temperatur konstant gehalten würde. Diesen Vorgang bezeichnet man als Luminiszenz. Die Ursache der Strahlung liegt in diesem Falle nicht in der Temperatur des Systemes, sondern in einer anderen Energiequelle, z. B. bezeichnet man als Chemi-Luminiszenz die durch chemische Veränderungen veranlaßte Strahlung, wie sie z. B. beim Phosphor oder faulenden Holze durch langsame Oxydation bewirkt wird. Die bei anderen Körpern beobachtete Erscheinung des sogenannten Phosphoreszierens, d. h. des Nachleuchtens von Körpern nach der Belichtung, wird als Photo-Luminiszenz bezeichnet. Hier ist die Energiequelle der Strahlung das ursprünglich in den Körper von außen eingestrahlte Licht, welches vielleicht irgendwelche Veränderungen in der Natur, z. B. dem Molekülbau, des Körpers bewirkt hat, die nun bei der Phosphoreszenz wieder rückgängig werden. Das Leuchten von Geißlerschen Röhren im hochgespannten elektrischen Strome nennt man Elektro-Luminiszenz usw.

Es ist nach dem in § 1 Gesagten klar, daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik nur Folgerungen für reine Temperaturstrahlungen ziehen läßt. Nach der oben S. 483 genannten Vorstellung des Wärmeaustausches folgt z. B., daß ein einmal vorhandenes Temperaturgleichgewicht in einem nach außen abgeschlossenen System von Körpern durch reine Temperaturstrahlung derselben niemals gestört werden kann; aber wohl könnte durch Luminiszenz der Körper eine Störung des Temperaturgleichgewichts eintreten.

Im folgenden wird immer nur reine Temperaturstrahlung vorausgesetzt.

3. Das Emissions-Vermögen eines vollkommen spiegelnden

oder vollkommen durchsichtigen Körpers ist Null. Denken wir uns eine sehr große Platte eines beliebigen Körpers K eingeschlossen zwischen zwei Platten SS von vollkommenen Spiegeln. Unter solchen soll ein Körper verstanden werden, welcher die ganze auf ihn von außen fallende Strahlungsenergie reflektiert. — Ursprünglich sollen K und SS gleiche Temperaturen haben. Man kann K und SS denken als Teile eines größeren, nach außen abgeschlossenen Körpersystems von konstanter Temperatur. Wenn nun K Energie emittiert, so empfängt K dieselbe durch Reflexion an SS in vollem Betrage zurück. K soll ein von Null verschiedenes Absorptionsvermögen besitzen. Unter dem Absorptionsvermögen[1]) a eines Körpers oder einer Fläche soll verstanden werden das Verhältnis der absorbierten Energie zu der von außen zugegestrahlten Energie. Wenn daher die Energiemenge 1 zugestrahlt wird, so wird die Energiemenge a absorbiert, die Energiemenge $1-a$ reflektiert, falls der Körper keine Energie durchläßt. Diese Größe $1-a$ ist daher das Reflexionsvermögen $r=1-a$, falls der Körper so dick ist, daß keine Energie ihn durchdringt, sonst ist $r<1-a$.

Die von den Spiegeln SS nach K reflektierte Energie wird nun in K teilweise absorbiert, teilweise aber wiederum nach SS reflektiert. Diese Energie wird aber wieder vollkommen an SS nach K zurückreflektiert usw. Man erkennt leicht, daß der Körper K jedenfalls im stationären Zustande seine ganze ausgesandte Energie durch wiederholte Reflexion an den vollkommenen Spiegeln SS in vollem Betrage wieder absorbieren muß, da SS selber nichts von dieser Energie absorbieren. Wenn daher die Spiegel SS ebenfalls Energie ausstrahlen würden, so würde die Temperatur des Körpers K erhöht werden, da dann K außer der von ihm selbst ausgesandten Energie noch einen Teil[2]) der von SS emittierten Energie absorbiert. Dagegen die Temperatur der Spiegel würde sinken, da sie emittieren, aber nichts absorbieren. Da nun durch eine Temperaturstrahlung nach dem zweiten Hauptsatze nicht die ursprünglich vorhandene Temperaturgleichheit gestört werden kann, so schließen wir, daß

1) Das Absorptionsvermögen a ist wohl zu unterscheiden von dem oben S. 342 eingeführten Absorptionsindex $\varkappa$. Ein Metall, z. B. Silber, hat einen sehr großen Absorptionsindex $\varkappa$, aber ein äußerst kleines Absorptionsvermögen a, da das Silber nahezu alle einfallende Energie reflektiert.

2) Nämlich den von SS nach dem Körper K hingesandten Teil der ganzen Strahlungsmenge.

das Emissionsvermögen eines vollkommenen Spiegels gleich Null ist. — Wenn daher irgend ein Körpersystem von einer nach außen vollkommen spiegelnden Fläche umgeben ist, so ist es gegen Strahlung nach außen vollkommen abgeschlossen. In gleicher Weise kann man schließen, daß das Emissionsvermögen eines vollkommen durchsichtigen Körpers gleich Null ist. Denn denken wir uns einen beliebigen absorbierenden Körper K von einem durchsichtigen Körper umgeben, und das Ganze in eine nach außen und innen spiegelnde Hülle eingeschlossen, so müßte sich der durchsichtige Körper abkühlen, wenn er emittierte, da er nichts absorbiert.

4. Kirchhoffs Gesetz über den Zusammenhang der Emission mit der Absorption. Wir denken uns ein sehr kleines Flächenelement ds aus einer absorbierenden Substanz im Zentrum einer spiegelnden Hohlkugel vom Radius 1, welche an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen zwei gleiche, kleine Öffnungen $d\Omega$ besitzt (vgl. Figur 109).

ds soll klein gegen $d\Omega$ sein. Die von ds durch je eine Öffnung $d\Omega$ ausgestrahlte Energie schreiben wir nach Formel (3) auf S. 475:

$$dL = i\,ds\cos\varphi\, d\Omega\,, \tag{1}$$

wobei φ den Neigungswinkel der Normale auf ds gegen den mittleren, durch $d\Omega$ und ds gelegten Strahl bezeichnet. i wird die Strahlungsintensität von ds in der Richtung φ genannt. Ob i von φ abhängt, lassen wir zunächst dahingestellt. Alle Energie, welche ds in anderer Richtung entsendet, erhält es durch Reflexion an der Hohlkugel zurück und absorbiert diese Energie (nach wiederholter Hin- und Herreflexion) schließlich vollständig. Die Hohlkugel sei nun rings umgeben von einem „vollkommen schwarzen" Körper K', dessen äußere Oberfläche vollkommen spiegelnd sei. K' strahlt daher nur nach innen.[1])

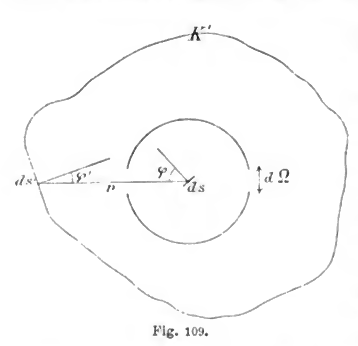


Fig. 109.

1) Ein vollkommen schwarzer Körper kann leuchten, falls seine Tempe-

Ein Teil (dE') der von K' entsandten Energie gelangt durch die Öffnungen $d\Omega$ auf das Element ds und wird dort teilweise absorbiert. Von einem Flächenelement ds' der schwarzen Hülle aus gesehen, erscheint das Flächenelement ds unter dem räumlichen Winkel

$$d\Omega' = \frac{ds}{r^2} \cos\varphi\,, \tag{2}$$

falls r die Entfernung von ds' und dem Orte von ds bezeichnet. Die von ds' nach ds ausgestrahlte Energie ist also

$$dL' = i'\, ds' \cos\varphi'\, d\Omega'\,, \tag{3}$$

falls i' die Strahlungsintensität der schwarzen Fläche in der Neigung φ' gegen die Normalenrichtung bedeutet. Der Gesamtheit aller auf ds strahlenden Flächenelemente ds' hat nun die Größe:

$$\Sigma\, ds' = r^2\, d\Omega : \cos\varphi'\,, \tag{4}$$

wobei r und φ' für die einzelnen Flächenelemente ds' als konstant angenommen ist. Daher schreibt sich die ganze von K' durch eine Öffnung $d\Omega$ auf das Flächenstück ds zugestrahlte Energie

$$dE' = \Sigma\, dL' = i' \cdot r^2 \cdot d\Omega\, d\Omega'\,, \tag{5}$$

oder nach (2):

$$dE' = i'\, d\Omega\, ds \cos\varphi\,. \tag{6}$$

Ebenso wird von der anderen Seite dem ds die Energie zugesandt:

$$dE'' = i'' \cdot d\Omega\, ds \cos\varphi\,, \tag{7}$$

wobei i'' von i' unterschieden ist, falls nämlich diese Größe von dem Winkel φ' abhängen sollte und falls φ' auf beiden Seiten der Hülle verschieden ist.

Wenn nun ursprünglich Temperaturgleichgewicht herrscht, so darf dieses durch die Strahlung nicht gestört werden. Die von ds nach beiden Seiten durch die beiden Öffnungen $d\Omega$ emittierte Energie $2dL$ muß also kompensiert werden durch die absorbierte Energie $a(dE' + dE'')$, falls a das Absorptionsvermögen von ds für die Strahlungsrichtung φ bezeichnet. Nach dem zweiten Hauptsatze ist also nach (1), (6) und (7):

$$2i = a(i' + i'')\,. \tag{8}$$

---

ratur genügend hoch ist. An Stelle der Bezeichnung „vollkommen schwarz" wäre daher die Bezeichnung „vollkommen absorbierend" zutreffender.

Diese Gleichung muß unverändert bleiben, falls die schwarze Hülle K' ihre Gestalt ändert, wodurch φ' variiert. Daher muß $i' = i''$ unabhängig von φ' sein, d. h. die Strahlungsintensität i' einer schwarzen Fläche ist unabhängig von der Richtung der Strahlung. — Aus (8) folgt daher

$$i = a \cdot i' . \tag{9}$$

Wenn man als Fläche ds' verschiedene schwarze Körper wählt, während die Substanz von ds unverändert bleibt, so muß daher nach (9) allemal auch i' konstant bleiben, d. h. die Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers hängt von seiner speziellen Natur nicht ab, sondern ist eine universelle Funktion der Temperatur.[1]) Die Beziehung (9) kann man daher so aussprechen:

Das Verhältnis zwischen der Strahlungsintensität und dem für gleiche Strahlneigung geltenden Absorptionsvermögen eines beliebigen Körpers hängt nur von seiner Temperatur ab; dies Verhältnis ist nämlich gleich der Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers von gleicher Temperatur. Diese Sätze rühren von Kirchhoff[2]) her. Die aufgestellten Sätze gelten nicht nur für die Gesamtstrahlungsintensität, sondern auch für die Strahlungsintensität jeder beliebigen Wellenlänge λ gilt das Kirchhoffsche Gesetz:

$$i_\lambda = a_\lambda \cdot i'_\lambda . \tag{9'}$$

Bringen wir nämlich hinter einer Öffnung $d\Omega$ des Hohlspiegels (S. 485) ein dispergierendes, vollkommen durchsichtiges Prisma an,

1) Diese Funktion kann noch durch den Brechungsindex des durchstrahlten Raumes beeinflußt werden. Davon soll weiter unten die Rede sein. Hier ist zunächst dieser Rechnungsindex = 1 angenommen, d. h. der durchstrahlte Raum soll das Vakuum sein.

2) Siehe Ostwalds Klassiker, Nr. 100. — E. Pringsheim (Verh. d. deutsch. phys. Ges. 3, S. 81, 1901) gab einen Beweis des Kirchhoffschen Gesetzes ohne die Annahme, daß vollkommen schwarze Körper, vollkommene Spiegel und vollkommen durchsichtige Substanzen wirklich existieren. Eine weitere Ergänzung des Beweises unter der Annahme, daß in der Umgebung der Körper sowohl Absorption als Zerstreuung der Strahlung stattfinden könne, gab M. Planck (Vorles. üb. Theor. d. Wärmestrahlung, Leipzig 1906, S. 23 ff.). — Über die experimentelle Herstellung schwarzer Körper vgl. den folgenden § 5.

so können wir eine ganz bestimmte Wellenlänge der vom Flächenstück ds nach außen gesandten Strahlen auf einen schwarzen Körper fallen lassen, während alle anderen Strahlengattungen durch vollkommene Spiegel wieder durch das Prisma und die Öffnung $d\Omega$ auf ds zurückgeworfen werden. Also auch allein innerhalb eines schmalen Bereiches von Wellenlängen, die zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, muß die vorige Betrachtung gelten, welche zur Gleichung (9) führte.

Die Gleichung (9) oder (9′) muß sogar für jede bestimmte Polarisationsrichtung der Strahlen einzeln gelten. Denkt man sich nämlich hinter $d\Omega$ ein Prisma eines durchsichtigen, doppelbrechenden Kristalles aufgestellt, so werden die Wellen verschiedener Polarisationsrichtung räumlich getrennt in zwei Wellenzüge. Den einen Wellenzug kann man nun wiederum allein auf einen schwarzen Körper fallen lassen, während der andere durch Spiegelung nach ds zurückgelangt. Die oben angestellten Betrachtungen führen dann zur Gleichung (9′), welche also auch für irgendeine beliebige Polarisationsrichtung gültig ist.

5. Folgerungen aus dem Kirchhoffschen Gesetz. Wenn man einen schwarzen Körper allmählich erhitzt, so sendet er von einer gewissen Temperatur an, die etwa bei 525° Cels. liegt, sichtbares Licht aus. Dasselbe hat zunächst große Wellenlängen[1]) (Rotglut), bei weiterer Temperatursteigerung treten auch kleinere Wellenlängen in merkbarer Menge hinzu (bei 1000° beginnt die Gelbglut, bei 1200° die Weißglut). Die Gleichung (9′) besagt nun, daß kein Körper bei niedrigerer Temperatur zu leuchten beginnen kann als ein schwarzer Körper, sondern daß alle Körper bei gleicher Temperatur (etwa bei 525°) anfangen, (rot) zu leuchten (Drapers Gesetz).[2]) Die Intensität des Leuchtens hängt aller-

1) Des erste ausgesandte Licht wird bei subtiler Beobachtung nicht rot, sondern gespenstergrau gesehen. Dies hat aber keine physikalische, sondern eine physiologische Ursache und erklärt sich dadurch, daß die Netzhaut des menschlichen Auges zwei lichtempfindliche Organe, die Stäbchen und Zapfen, besitzt. Erstere sind die lichtempfindlichsten, sie sind aber farbenblind. Der gelbe Fleck, d. h. der Ort des deutlichsten Sehens der Netzhaut, besitzt nun viel Zapfen, aber wenig Stäbchen. Daher findet der erste Lichteindruck (grau) in peripheren Netzhautstellen statt. Sowie der Gegenstand fixiert wird, d. h. sein optisches Bild auf den gelben Fleck gebracht wird, verschwindet der Lichteindruck wieder. Daher erklärt sich das Gespensterartige der Erscheinung (vgl. Müller-Pouillet, Optik (Lummer), 10. Aufl., S. 404).

2) Jede Ausnahme vom Draperschen Gesetz, wie z. B. die Phosphores-

dings vom Absorptionsvermögen a_λ des Körpers bei der betreffenden Temperatur ab. Blanke Metalle z. B., die auch bei hoher Temperatur ihre große Reflexionsfähigkeit bewahren, leuchten viel weniger als Ruß. Ein Rußstreifen auf der Oberfläche eines Metalls tritt daher beim Glühen als heller Streifen auf dunkelem Grunde hervor. Ebenso leuchtet ein durchsichtiger Glasstab bei Glühtemperatur sehr wenig, weil sein Absorptionsvermögen sehr klein ist. — Bildet man aus irgendeinem Metall einen Hohlkörper mit einem kleinen Loch, so verhält sich dieses wie ein nahezu idealer schwarzer Körper. Denn die in das Loch gelangende Strahlung wird an den Wänden des Hohlkörpers vielfach hin und her reflektiert und dadurch vollkommen absorbiert, auch wenn die Wände des Hohlkörpers nicht vollkommen schwarz sind. Nur ein kleiner Teil der Strahlung wird aus dem Loch wieder herausreflektiert. Dieser Teil ist um so geringer, je kleiner das Loch im Vergleich zur Oberfläche des Hohlkörpers ist.[1]) Das Loch muß also beim Glühen sich hell abzeichnen auf der äußeren Fläche der Hohlkugel, da diese nur geringeres Absorptionsvermögen hat.

Bei allen nicht schwarzen Körpern mit glatter Oberfläche nimmt das Reflexionsvermögen zu, wenn der Einfallswinkel der Strahlung wächst, daher muß das Absorptionsvermögen abnehmen.

---

zenz bei niedriger Temperatur, besagt, daß es sich um keine reine Temperaturstrahlung handelt, sondern daß bei der Strahlung, auch wenn die Temperatur konstant bleibt, irgendwelche Energieveränderungen eintreten.

1) Dies ist bei weitem die beste Methode zur Herstellung eines schwarzen Körpers und sie ist in neuerer Zeit auch stets benutzt zur experimentellen Ermittelung der Strahlungsgesetze eines schwarzen Körpers. Im Innern eines aus beliebigen Körpern gebildeten Hohlraumes, der gar keine Strahlung nach außen gelangen läßt, muß sich daher bei bestimmter Temperatur ein ganz bestimmtes Strahlungsgleichgewicht herstellen, welches dasselbe ist, als ob die Wände aus absolut schwarzen Körpern beständen. — Annähernd kann man einen schwarzen Körper durch Überziehen mit Ruß, oder, da Ruß für Wärmestrahlen durchlässig ist, besser mit Platinmoor herstellen, ferner sind Pech oder Obsidian in Wasserumgebung (nicht in Luft) nahezu schwarze Körper. Nach der früher gegebenen Theorie der Reflexion des Lichtes muß ein idealer schwarzer Körper denselben Brechungsindex wie seine Umgebung haben, damit keine Reflexion eintritt. Ferner muß er einen sehr kleinen Absorptionsindex haben (weil sonst auch Lichtreflexion eintreten würde) und daher sehr große Dicke, damit alles Licht in ihm absorbiert wird. Dies sind schwierig zu erfüllende Bedingungen. Daher kann man bei weitem am besten durch einen gleich temperierten Hohlkörper mit engem Loch eine ideale schwarze Fläche annähernd darstellen.

Nach (9') ist daher bei allen nicht schwarzen Flächen die Strahlungsintensität i für senkrecht aus der Fläche austretende Strahlung größer, als für schiefe Strahlung. Das *cos*-Gesetz der Strahlung gilt daher streng nur für schwarze Flächen.

Bei schiefer Inzidenz hängt, wie wir oben S. 269 berechneten, das Reflexionsvermögen, und daher das Absorptionsvermögen eines Körpers vom Polarisationszustande der einfallenden Strahlen ab. Daher sendet ein Körper in schiefer Richtung partiell polarisierte Strahlung aus, und zwar muß diejenige Komponente des Lichtes stärker sein, welche senkrecht zu der durch den Strahl und die Normale gehende Ebene polarisiert ist, weil diese schwächer reflektiert, also (wenn der Körper nicht vollkommen durchsichtig ist) stärker absorbiert wird. — Bei Kristallen, z. B. dem Turmalin, hängt auch bei senkrechter Inzidenz das Absorptionsvermögen vom Polarisationszustande des einfallenden Lichtes ab. Wenn daher diese Eigenschaft der Turmalin auch bei Glühhitze behält, so muß eine glühende Turmalinplatte partiell polarisiertes Licht auch in der Richtung ihrer Normale emittieren. Diese Folgerung hat Kirchhoff experimentell bestätigt.[1]) In der Glühhitze ist allerdings beim Turmalin die Abhängigkeit der Absorption vom Polarisationszustande des Lichtes wesentlich geringer, als bei Zimmertemperatur.

Eine wichtige Anwendung seines Gesetzes machte Kirchhoff selbst zur Erklärung der Umkehrung der Spektrallinien und der Fraunhoferschen Linien im Sonnenspektrum. Wenn nämlich das von einem weißglühenden Körper (z. B. elektrischem Bogenlicht) ausgehende Licht durch eine Natriumflamme von niedrigerer Temperatur hindurchtritt, so zeigt das Spektrum eine dunkle D-Linie auf hellerem Grunde. Denn Natriumdampf hat bei genügender Erhitzung nur eine starke Emission für die D-Linie, folglich muß er auch Licht von nur dieser Wellenlänge stark absorbieren. Die Natriumflamme absorbiert daher das vom Bogenlicht ausgesandte Licht der der D-Linie entsprechenden Wellenlänge, sie emittiert allerdings auch die gleiche Wellenlänge, aber, falls die Natriumflamme kühler ist, als das Bogenlicht, in schwächerer Intensität, als letzteres. Daher muß im Spektrum an der Stelle der D-Linie

1) Später hat A. Pflüger (Ann. d. Phys. 7, S. 806, 1902) eine gute quantitative Bestätigung des Kirchhoffschen Gesetzes am Turmalin erhalten.

die Intensität geringer sein, als an den Stellen anderer Wellenlängen, welche die Natriumflamme ungeschwächt hindurch läßt.[1] Nach dieser Auffassung erklären sich die Fraunhoferschen Linien im Sonnenspektrum durch die Absorption des aus dem heißen Sonnenkerne kommenden Lichtes durch kühlere Metalldämpfe und Gase an der Oberfläche der Sonne. Indes setzt diese Anwendung des Kirchhoffschen Gesetzes voraus, daß das Leuchten der Gase und Dämpfe eine reine Temperaturstrahlung ist. Das scheint nun nach Versuchen von Pringsheim meist nicht der Fall zu sein. Auf diesen Punkt soll im § 1 des Kapitels III näher eingegangen werden.

6. Die Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom Brechungsindex der Umgebung. Wir wollen uns zwei unendlich große Platten PP' zweier schwarzer Körper parallel gegenüber gestellt denken. Die äußeren Seiten von PP' seien durch spiegelnde Belegungen SS' gegen Strahlung nach außen und von außen geschützt. Bisher haben wir nun immer vorausgesetzt, daß der Raum, in welchem die Strahlung stattfinden soll, absolut leer sei, oder mit einem homogenen, vollkommen durchsichtigen Körper, z. B. Luft, gefüllt sei. Wir wollen jetzt diese Voraussetzung fallen lassen, und annehmen, daß P an den leeren Raum, dagegen P' an einen vollkommen durchsichtigen Körper vom Brechungsindex n für eine beliebige Wellenlänge λ anstoße.[2]) Die Begrenzung dieses Mediums bilde die unendlich große Ebene E (vgl. Figur 110), welche den Platten PP' parallel anzunehmen ist, damit P überall im Vakuum liege.

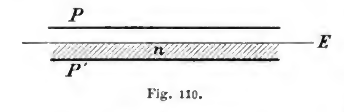


Fig. 110.

Ein Flächenelement ds von P strahlt nun innerhalb eines ringförmigen Elementarkegels, dessen Erzeugende die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ mit der Normale auf ds bilden, nach S. 77 die Energiemenge aus:

$$dL = 2\pi i ds \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi . \tag{10}$$

1) Weiteres zur Demonstration der Umkehr der Spektrallinien vgl. bei Müller-Pouillet (Lummer), Optik, 9. Aufl., S. 333 u. ff., 10. Aufl., S. 661.

2) Damit P und P' beide ideal-schwarze Körper sind, dürfen sie in diesem Falle nicht aus derselben Substanz bestehen, da ein schwarzer Körper den Brechungsindex seiner Umgebung haben muß (vgl. oben S. 492, Anm. 1).

Hierin bezeichnet i die Strahlungsintensität von P. Die emittierte Energie dL wird zum Teil an der Ebene E reflektiert und auf P dann wieder absorbiert, ihr Betrag sei

$$dL_r = 2\pi i ds \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \cdot r_\varphi , \tag{11}$$

wobei r_φ den Reflexionsfaktor an der Grenze E für den Einfallswinkel φ der Strahlen bezeichnet. Der Rest der Energie $dL - dL_r$ gelangt nach P' und wird dort absorbiert.

Analog ist die von einem Flächenelemente ds auf P' entsandte Energie innerhalb eines ringförmigen Elementarkegels, dessen Erzeugende die Winkel χ und $\chi + d\chi$ mit der Normale auf P' bilden:

$$dL' = 2\pi i' \, ds \sin\chi \cos\chi \, d\chi ,$$

wobei i' die Strahlungsintensität von P' bedeutet. Durch Reflexion an E gelangt nach P' zurück:

$$dL_r' = 2\pi i' \, ds \sin\chi \cos\chi \, d\chi \cdot r \;\; ,$$

die Energie

$$dL'' = dL' - dL_r' = 2\pi i' \, ds \sin\chi \cos\chi \, d\chi (1 - r_\chi) \tag{12}$$

gelangt nach P und wird dort absorbiert.

Die Konstanz der Temperatur von P verlangt:

$$\int dL = \int dL_r + \int dL'' ,$$

d. h. nach (10), (11) und (12), da die Strahlungsintensitäten i, i' nach S. 488 vom Winkel φ, bzw. χ der Strahlung unabhängig sind:

$$i \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi (1 - r_\varphi) = i' \int_0^{\pi/2} \sin\chi \cos\chi \, d\chi (1 - r_\chi) . \tag{13}$$

Nun ist zu berücksichtigen, daß $r_\chi = 1$ ist für Winkel χ, deren $\sin\chi > 1/n$ ist, da dann Totalreflexion an der Ebene E eintritt. Das Integral auf der rechten Seite von (13) braucht daher nur von $\chi = 0$ bis $\chi = \overline{\chi}$ erstreckt zu werden, wo $\sin\overline{\chi} = 1/n$ ist; wir wollen zunächst n für alle Wellenlängen als konstant annehmen. Man kann daher in (13) φ und χ als ein zusammengehöriges Paar

eines Einfalls- und eines Brechungswinkels auffassen, die durch das Brechungsgesetz:

$$\sin\varphi : \sin\chi = n \tag{14}$$

miteinander verbunden sind, und kann dann die Integration nach φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi/2$ erstrecken. Aus (14) folgt nun

$$\sin\chi \cos\chi \, d\chi = \frac{1}{n^2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi\,, \tag{15}$$

ferner ist nach den früher auf S. 269 gegebenen Formeln (24) für jegliche Polarisationsrichtung und daher auch für natürliches Licht $r_\varphi = r_\chi$. Denn die reflektierte Amplitude beträgt nach jenen Formeln (abgesehen vom Vorzeichen, auf das es hier nicht ankommt) stets denselben Bruchteil der einfallenden Amplitude, wobei es gleichgültig ist, ob φ der Einfalls- und χ der Brechungswinkel ist, oder ob umgekehrt φ der Brechungs- und χ der Einfallswinkel ist, d. h. die Reflexionsfaktoren sind dieselben, falls das Licht von oben auf die Ebene E unter dem Winkel φ einfällt, oder von unten unter dem Winkel χ, falls $\sin\varphi : \sin\chi = n$ ist. Daher folgt aus (13) und (15), falls man $r_\chi = r_\varphi$ setzt:

$$i \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \,(1 - r_\varphi)\, d\varphi = \frac{i'}{n^2} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \,(1 - r_\varphi)\, d\varphi\,. \tag{16}$$

Da nun das auf beiden Seiten auftretende Integral nicht Null ist, so ergibt die Division mit demselben die Beziehung:

$$i' : i = n^2\,, \tag{17}$$

d. h. die Strahlungsintensitäten zweier **schwarzer** Flächen verhalten sich wie die Quadrate der Brechungsindizes der sie umgebenden Medien.[1])

1) Auch dieser Satz rührt von Kirchoff her (vgl. Ostwalds Klassiker Nr. 100, S. 33). Irrtümlicherweise wird der Satz oft Clausius zugeschrieben, der ihn aber erst einige Jahre nach der Publikation von Kirchhoff ausgesprochen hat. — Experimentell ist dieser Satz annähernd bestätigt durch Smoluchowski de Smolan (Compt. Rend. 123, S. 230, 1896, Wied. Beibl. 20, S. 974, 1896), welcher die Strahlung in Luft und in Schwefelkohlenstoff miteinander verglich.

Dieser Satz bezieht sich zunächst nur auf die Gesamtstrahlung, und der Brechungsindex n war für alle Wellenlängen oder Schwingungsperioden T konstant gesetzt. Der Satz (17) gilt aber auch für Teilstrahlungen einer bestimmten Strahlungssorte der Periode T. Die Strahlungsintensität von P für Strahlen, deren Periode zwischen T und $T+dT$ liegt, sei bezeichnet durch $i_T \cdot dT$. Analog sei die Strahlungsintensität von P' für diese Strahlengattung: $i'_T \cdot dT$. Dann ergibt die Formel (16):

$$\sum dT\left(i_T - \frac{i'_T}{n^2}\right)\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi\,(1-r_\varphi)\,d\varphi = 0. \tag{18}$$

Die Σ ist über alle Perioden von $T=0$ bis $T=\infty$ zu erstrecken.

Man kann sich nun auch zwischen beide Körper P und P' eine durchsichtige Lamelle eingeschaltet denken, welche vorzugsweise gewisse Wellenlängen λ hindurchläßt, dagegen andere reflektiert. Stets muß die Gleichung (18) bestehen, je nach der Dicke und Natur der Lamelle ist aber r_φ eine verschiedene Funktion von T. Damit nun (18) bestehen kann für beliebig zu variierendes r_φ, muß jedes einzelne Glied der Σ in (18) verschwinden, d. h. es muß für jedes T die Beziehung bestehen[1]):

$$i'_T : i_T = n^2. \tag{19}$$

Für einen nicht-schwarzen Körper muß nach dem Kirchhoffschen Gesetz (9') das Verhältnis der Strahlungsintensität i_λ zum Absorptionsvermögen a_λ proportional zum Quadrat des Brechungsindex n des umgebenden Mediums sein. Da man die Veränderung von a_λ mit n an der Hand der Reflexionsformeln berechnen kann, so ergibt sich daraus die Abhängigkeit des i_λ von n. Jedenfalls ist also bei nicht-schwarzen Körpern die Strahlungsintensität nicht streng proportional zu n^2.

1) Auch auf dem auf S. 488 eingeschlagenen Wege kann man das Gesetz (17) erhalten, wenn man den Raum außerhalb der Hohlkugel mit einem anderen Medium erfüllt denkt, als den Raum innerhalb der Hohlkugel, nur ist die Rechnung etwas komplizierter. Da man bei jener Anordnung dann durch Brechung oder Beugung die Wellen der verschiedenen Perioden T räumlich voneinander trennen kann, so ergibt sich dann nach den Schlüssen der S. 488 aus (17) sofort das Gesetz (19).

7. Der Sinussatz bei der optischen Abbildung von Flächenelementen. Wenn ein Flächenelement ds durch ein symmetrisch zu seiner Normale liegendes Strahlenbündel vom Öffnungswinkel u optisch abgebildet wird in ein Flächenelement ds', wobei der Öffnungswinkel des Bildstrahlenbündels den Wert u' besitze, so muß die ganze von ds innerhalb des betrachteten Strahlenbündels ausgestrahlte Energie dem Stück ds' zugestrahlt werden und umgekehrt muß ds' auf ds strahlen, da die Lichtstrahlen die Wege der Energieströmung bezeichnen. Denken wir uns daher ds und ds' als schwarze Flächen gleicher Temperatur, welche auf ihren abgewandten Seiten spiegelnd belegt sind, so muß, da sich keine Temperaturdifferenz zwischen ds und ds' durch die Strahlung ausbilden darf, die von ds entsandte Energie dL gleich sein der von ds' ihm zugesandten und in ds absorbierten Energie dL'. Wenn nun ds in einem Medium vom Brechungsindex n liegt, ds' im Brechungsindex n', und falls mit i_0 die Strahlungsintensität einer schwarzen Fläche im Vakuum bezeichnet wird, so ist die Strahlungsintensität von ds nach (17) $i = n^2 \cdot i_0$, diejenige von ds': $i' = n'^2 \cdot i_0$. Ferner ist nach (4) S. 476

$$dL = \pi \cdot ds \cdot i \cdot sin^2 u\,, \qquad dL' = \pi \cdot ds' \cdot i' \cdot sin^2 u'\,.$$

Daher folgt aus $dL = dL'$:

$$\pi\, ds\, n^2\, i_0\, sin^2 u = \pi\, ds'\, n'^2\, i\, sin^2 u'\,,$$

d. h.

$$ds\, n^2\, sin^2 u = ds'\, n'^2\, sin^2 u'\,. \tag{20}$$

Dies ist der oben auf S. 52, Formel (46) abgeleitete Sinussatz. Die dortige Ableitung, welche rein geometrisch verfährt, ist komplizierter als die hier gegebene, welche auf energetischer Grundlage basiert.

8. Die absolute Temperatur. Wie wir oben S. 484 an der Dampfmaschine erläuterten, kann mit Hilfe einer geeigneten Vorrichtung (Maschine) dadurch Arbeit erzeugt werden, daß eine gewisse Wärmemenge W_1 einem Reservoir 1 entnommen wird, und eine andere (kleinere) Wärmemenge W_2 an ein Reservoir 2, welches kälter als das Reservoir 1 ist, abgegeben wird. Die Maschine kann dabei in ihren Anfangszustand vollkommen zurückkehren, sie kann einen sogenannten Kreisprozeß durchmachen. Das Prinzip der Erhaltung der Energie erfordert dann, daß die erzeugte Ar-

beit A gleich der Differenz der (mechanisch gemessenen) Wärmemengen W_1 und W_2 ist:

$$A = W_1 - W_2. \tag{21}$$

Nun denke man sich zwei Maschinen M und M' miteinander verglichen, welche beide bei einem einmaligen Kreisprozeß die gleiche Wärmemenge W_1 dem Reservoir 1 entziehen. Sie können aber eventuell verschiedene Wärmemengen W_2 und W_2' an das Reservoir 2 abliefern. Dann sind auch die von ihnen geleisteten Arbeiten A und A' verschieden, es ist nach (21):

$$A = W_1 - W_2, \qquad A' = W_1 - W_2'.$$

Die Maschine M soll nun so konstruiert sein, daß man sie auch in umgekehrter Richtung laufen lassen kann, (sie soll einen umkehrbaren Kreisprozeß beschreiben), wobei sie die Wärmemenge W_2 aufnimmt vom Reservoir 2, die Menge W_1 abgibt an Reservoir 1, und dementsprechend die Arbeit $-A$ leistet. Wenn wir nun einen Kreisprozeß der Maschine M' kombinieren mit einem solchen umgekehrten Kreisprozeß der Maschine M, so wird im ganzen die Arbeit geleistet:

$$A' - A = W_2 - W_2'. \tag{22}$$

Diesen Vorgang können wir uns beliebig oft wiederholt denken. Je nach dem Vorzeichen von $W_2 - W_2'$ wird dann dem Reservoir 2 dauernd Wärme entzogen oder zugeführt, während dem Reservoir 1 in Summa weder Wärme zugeführt, noch entzogen wird. Wir können daher in diesem Falle das Reservoir 1 als endlich voraussetzen und mit als einen Teil der Maschine betrachten, welche Kreisprozesse beschreibt, und können das Reservoir 2 als die Umgebung der Maschine, z. B. als das Meerwasser, dessen Wärme-Inhalt praktisch als unendlich groß zu betrachten ist, ansehen. Wenn nun $A' - A > 0$ wäre, so würde daher eine Vorrichtung konstruiert sein, welche durch Benutzung nur eines unendlich großen Wärmereservoirs beliebig viel Arbeit schafft. Dies ist nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (vgl. S. 484) unmöglich. Es kann daher nur sein[1]):

1) Daß im allgemeinen das Gleichheitszeichen ($A = A'$) nicht bestehen kann, sieht man aus Betrachtung vieler nicht umkehrbarer Vorgänge, z. B. der Reibung. Sobald nutzlos Wärme erzeugt wird, muß $A' < A$ sein.

$$A' - A < 0, \quad \text{d. h.} \quad A > A', \tag{23}$$

in Worten: von allen Maschinen, welche eine bestimmte Wärmemenge W_1 bei einer bestimmten Temperatur aufnehmen und Wärme an ein kälteres Reservoir abliefern, und welche ferner in einem Kreisprozeß arbeiten, leistet diejenige Maschine die größte Arbeit, welche einen **umkehrbaren** Kreisprozeß beschreibt. Für eine solche Maschine bestimmt sich diese Arbeit A nur aus der aufgenommenen Wärme W_1 und den Temperaturen der beiden Reservoire, ist dagegen von den besonderen Einrichtungen der Maschine unabhängig. Es wird nun A proportional sein zu W_1, so daß die Beziehung besteht:

$$A = W_1 f(\tau_1, \tau_2), \tag{24}$$

wobei f eine universelle Funktion der nach irgend einer Skala, z. B. nach Celsius, gemessenen Temperaturen τ_1, τ_2 der beiden Reservoire bezeichnet. Die Kombination von (21) und (24) liefert nun

$$\begin{gathered} W_2 = W_1 (1 - f[\tau_1, \tau_2]), \text{ oder} \\ W_1 : W_2 = \varphi(\tau_1, \tau_2), \end{gathered} \tag{25}$$

worin φ wiederum eine universelle, d. h. von Spezial-Einrichtungen der Maschine unabhängige Funktion bedeutet.

Nun läßt sich leicht zeigen, daß diese Funktion φ das Produkt zweier Funktionen sein muß, von denen die eine nur von τ_1, die andere nur von τ_2 abhängt. Betrachten wir nämlich noch eine andere Maschine, welche umkehrbar zwischen den Temperaturen τ_2 und τ_3 arbeitet, und die Wärme W_2 aufnimmt, W_3 abliefert, so ist nach (25):

$$W_2 : W_3 = \varphi(\tau_2, \tau_3). \tag{26}$$

Kombinieren wir jetzt einen Kreisprozeß der ersten Maschine, die zwischen τ_1 und τ_2 arbeitet, mit einem Kreisprozeß der letzten Maschine, so wird die Wärmemenge W_1 bei der Temperatur τ_1 aufgenommen, W_3 bei der Temperatur τ_3 abgeliefert, dagegen das Reservoir der Temperatur τ_2 kann außer Betracht bleiben, da ihm ebensoviel Wärme W_2 von der ersteren Maschine zugeführt wird, wie ihm von der letzteren Maschine entnommen wird. Daher ist

$$W_1 : W_3 = \varphi(\tau_1, \tau_3). \tag{27}$$

Die Multiplikation der beiden Gleichungen (25) und (26) miteinander liefert aber

$$W_1 : W_3 = \varphi(\tau_1, \tau_2) \cdot \varphi(\tau_2, \tau_3). \tag{28}$$

Die Vergleichung beider Formeln (27) und (28) ergibt daher

$$\varphi(\tau_1, \tau_3) = \varphi(\tau_1, \tau_2) \cdot \varphi(\tau_2, \tau_3). \tag{29}$$

Man kann in dieser Gleichung τ_2 als irgend einen Parameter ansehen, auf dessen Wert es gar nicht ankommt. Dann stellt die rechte Seite von (29) das Produkt zweier Faktoren dar, von denen der eine nur von τ_1, der andere nur von τ_3 abhängt. Wir wollen diese Faktoren schreiben als ϑ_1 und $1/\vartheta_3$,[1]) so daß nach (29) ist:

$$\varphi(\tau_1, \tau_3) = \vartheta_1 : \vartheta_3. \tag{30}$$

Es ist daher auch in (25) $\varphi(\tau_1, \tau_2) = \vartheta_1 : \vartheta_2$ zu setzen, und man erhält:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}. \tag{31}$$

ϑ_1 und ϑ_2 sind Funktionen der nach irgend einer Skala gemessenen Temperaturen τ_1, τ_2 der beiden Reservoire. Man nennt ϑ_1 und ϑ_2 die absoluten Temperaturen der Reservoire. **Das Verhältnis der absoluten Temperaturen irgend zweier Körper bezeichnet also das Verhältnis der Wärmemengen, welche eine in einem umkehrbaren Kreisprozeß arbeitende Maschine diesen Körpern entziehen, bzw. zuführen würde,** falls dabei diese Körper als sehr groß betrachtet werden können (so daß sich ihre Temperatur durch die entzogene, bzw. zugeführte Wärme nur unmerklich ändert).

Da hiernach nur das Verhältnis der absoluten Temperaturen zweier Körper definiert ist, so bedarf es noch zur Festlegung der Skala einer zweiten Relation. Diese liegt in folgendem Satze: Die Differenz der absoluten Temperaturen schmelzenden Eises und (unter Atmosphärendruck) siedenden Wassers soll 100 betragen. Es wird in der Wärmelehre gezeigt, daß sehr annähernd die absolute Tem-

1) Daß man als zweiten Faktor $1/\vartheta_3$ und nicht ϑ_3 schreibt, ist deshalb geboten, weil dadurch der Wert des Parameters τ_2 aus der Gleichung (29) herausfällt, wie man sich sofort überzeugt, wenn man $\varphi(\tau_1, \tau_2) = \vartheta_1 : \vartheta_2$ und $\varphi(\tau_2, \tau_3) = \vartheta_2 : \vartheta_3$ schreibt.

peratur erhalten wird, wenn man die Zahl 273 zu der mit einem Luftthermometer gemessenen Temperatur nach Celsius-Graden addiert.

9. Die Entropie. Wir betrachten wieder eine Maschine M, welche einen umkehrbaren Kreisprozeß durchmacht und dabei Wärme W_1 von der absoluten Temperatur ϑ_1 aufnimmt, Wärme W_2 von der Temperatur ϑ_2 abgibt. Rechnet man konsequent eine Wärmemenge positiv, wenn sie von der Maschine abgegeben wird, so folgt aus (31):

(32) $$\frac{W_1}{\vartheta_1} + \frac{W_2}{\vartheta_2} = 0.$$

Wenn nun hiermit eine ähnliche Maschine kombiniert wird, welche bei den Temperaturen ϑ_3 und ϑ_4 die Wärmemengen W_3, W_4 abgibt, so müßte auch nach (32) sein:

(33) $$\frac{W_1}{\vartheta_1} + \frac{W_2}{\vartheta_2} + \frac{W_3}{\vartheta_3} + \frac{W_4}{\vartheta_4} = 0.$$

Wir können allgemein sagen: Wird irgend ein umkehrbarer Kreisprozeß beschrieben, bei dem bei einer beliebigen absoluten Temperatur ϑ die Wärmemenge δW an die Umgebung abgeliefert wird, so muß sein

(34) $$\sum \frac{\delta W}{\vartheta} = \int \frac{\delta W}{\vartheta} = 0,$$

wobei die Summe oder das Integral über alle gegebenen Wärmemengen zu erstrecken ist, und ϑ immer die zugehörigen absoluten Temperaturen der Maschine (oder der Umgebung)[1]) bezeichnen.

Wenn wir daher einen umkehrbaren Prozeß zwischen zwei verschiedenen Zuständen 1 und 2 eines Körpers betrachten, so können wir nach (34) setzen:

(35) $$\frac{\delta W}{\vartheta} = -dS,$$

(35′) $$\int_1^2 \frac{\delta W}{\vartheta} = S_1 - S_2,$$

1) Die Temperatur der Maschine muß bei einem umkehrbaren Prozeß immer gleich der Temperatur der Umgebung sein, sowie ein Wärmeaustausch zwischen Maschine und Umgebung stattfindet.

worin S eine eindeutige Funktion des Zustandes des Körpers bedeutet, und dS das Differential dieser Funktion. Denn dann erhalten wir, wie es nach (34) sein muß, auf der rechten Seite von (35′) allemal den Wert Null, sobald ein Kreisprozeß beschrieben wird, bei welchem der Anfangszustand 1 des Körpers gleich seinem Endzustande 2 ist. Diese Zustandsfunktion S wird die Entropie des Körpers oder Körpersystems genannt.

Auch die Energie E ist eine Zustandsfunktion des Körpers. Sie ist dadurch definiert (nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik), daß die bei irgend einer Veränderung des Körpers nach außen abgegebene Arbeit δA vermehrt um die nach außen abgegebene Wärmemenge δW (nach mechanischem Maß) gleich der Abnahme $-d\mathrm{E}$ der Energie des Körpers ist:

$$dA + dW = -d\mathrm{E}. \tag{36}$$

10. Allgemeine Formeln der Thermodynamik. Als unabhängige Variabele, welche den Zustand eines Körpers oder Systems bestimmen, wollen wir benutzen seine absolute Temperatur ϑ, sowie eine (oder mehrere) Variabele x, deren Bedeutung zunächst unbestimmt gelassen werden kann. Die x sollen so gewählt sein, daß bei einer Temperaturänderung des Körpers, bei welcher die x konstant bleiben, keine Arbeit vom Körper geleistet wird. Dann ist, wenn wir die Formeln nur für den Fall einer einzigen Variabeln x hinschreiben, zu setzen:

$$\delta A = M\delta x, \qquad \delta W = X\delta x + Y\delta\vartheta. \tag{37}$$

M, X, Y bezeichnen Funktionen von x und ϑ; δx, $\delta\vartheta$ bezeichnen irgend welche Veränderungen der Größen x und ϑ; δA und δW bezeichnen die dabei vom Körper geleistete Arbeit und abgegebene Wärme. Der Vorgang soll umkehrbar sein, d. h. die Gleichungen (37) sollen für jedes Vorzeichen von δx und $\delta\vartheta$ gelten. Nach (35), (36) und (37) wird nun:

$$-dS = \frac{X}{\vartheta}\delta x + \frac{Y}{\vartheta}\delta\vartheta, \quad -d\mathrm{E} = (M + X)\delta x + Y\delta\vartheta. \tag{38}$$

Hieraus folgt, da allgemein ist

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}\delta x + \frac{\partial S}{\partial \vartheta}\delta\vartheta:$$

$$\frac{X}{\vartheta} = -\frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{Y}{\vartheta} = -\frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \tag{39}$$

$$M + X = -\frac{\partial E}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial E}{\partial \vartheta}. \tag{40}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Differentiation:

$$\frac{\partial (X/\vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial (Y/\vartheta)}{\partial x}, \quad \frac{\partial (M + X)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \tag{41}$$

oder, wie man nach einiger Umformung erhält:

$$\frac{X}{\vartheta} = -\frac{\partial M}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\vartheta \frac{\partial^2 M}{\partial \vartheta^2}. \tag{42}$$

11. Die Abhängigkeit der Gesamtstrahlung eines schwarzen Körpers von seiner absoluten Temperatur. Wir denken uns einen Zylinder vom Querschnitt 1 und der Länge x, dessen Wände aus irgend welchen Körpern gebildet sind, die nicht nur sämtlich ideale Spiegel sind, damit wenigstens eine Fläche mit einem von Null verschiedenen Emissionsvermögen vorhanden ist. Der Hohlraum soll nach außen nicht strahlen, d. h. durch vollkommene Spiegel abgeschlossen sein. Im Innern des Zylinders stellt sich bei einer bestimmten Temperatur ϑ der Zylinderwände ein Strahlungsgleichgewicht her, demzufolge die Volumeneinheit die Energie $\psi(\vartheta)$ besitzen möge. Dieses Strahlungsgleichgewicht ist unabhängig von der Natur der Wände des Hohlraumes, d. h. auch dasselbe, als ob die Wände aus vollkommen schwarzen Körpern bestünden (vgl. oben S. 492 Anm. 1). Diese strahlende Energie übt einen bestimmten Druck auf die Zylinderwände aus. Der Druck wird nun an jeder Stelle der Wand der gleiche sein, weil sonst der Hohlraum unter Wirkung seiner inneren Kräfte in fortdauernde Translatation oder Rotation kommen würde.[1]) Eine Stelle der Wand möge aus einem vollkommenen Spiegel bestehen. Wir sahen oben S. 481, daß ebene normal einfallende Wellen einen Druck p auf eine vollkommen spiegelnde Fläche ausüben, der gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie ist. Wenn eine unregelmäßige Strahlung nach allen Richtungen vorhanden

1) Daher gilt der oben S. 482, Anm. 2 behauptete Satz, daß beim Strahlungsgleichgewicht der Druck unabhängig von der Natur der strahlenden bez. bestrahlten Flächen ist.

ist, so kann man sich die Strahlenrichtungen der einzelnen Wellenzüge nach drei zueinander senkrechten Komponenten zerlegt denken, von denen die eine senkrecht auf einer Fläche s der Zylinderwand stehen möge. Nur diese Strahlenkomponente drückt auf s, die beiden anderen Komponenten aber nicht. Infolgedessen wird der ganze, auf s ausgeübte Druck nicht $\psi(\vartheta)$, sondern nur $\frac{1}{3}\psi(\vartheta)$ sein.[1])

Wenn sich infolge des Strahlungsdruckes der Querschnitt 1 des Zylinders um dx nach außen verschiebt, so wird die mechanische Arbeit geleistet

$$\delta A = \tfrac{1}{3}\psi(\vartheta)\,\delta x. \tag{43}$$

Wenn ferner die Temperatur des ganzen Zylinders um $\delta\vartheta$ gesteigert wird, während x konstant bleibt, so wächst dadurch die Energie um

$$d\mathrm{E} = \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\,\delta\vartheta\cdot x\,, \tag{44}$$

da das Volumen des Zylinders x ist. Mechanische Arbeit wird nicht geleistet, falls x konstant bleibt.

Ein Vergleich der Formeln (43) und (37), sowie (44) mit (38) lehrt, da nach (38) für $\delta x = 0$ wird,

$$d\mathrm{E} = -\,Y\delta\vartheta\,,$$

daß hier zu setzen ist:

$$M = \tfrac{1}{3}\psi\,, \qquad Y = -\,x\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\,. \tag{45}$$

Nach (42) ergibt sich daher, da ψ nur von ϑ und nicht von x abhängt:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = \tfrac{1}{3}\,\vartheta\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} = \tfrac{1}{3}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} - \psi\right).$$

Diese Gleichung kann man sofort nach ϑ integrieren und erhält:

$$3\psi = \vartheta\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} - \psi\,. \tag{46}$$

---

1) Über präzisere Herleitung dieses Faktors $\frac{1}{3}$ vgl. Boltzmann, Wied. Ann. 22, S. 291, 1884, oder Galitzine, Wied. Ann. 47, S. 488, 1892. — M. Planck, Vorl. über Theor. d. Wärmestr. Leipzig 1906, S. 56.

Eine Integrationskonstante ist nicht hinzuzufügen, weil für $\vartheta = 0$ der Körper keinen Wärmeinhalt besitzt und daher auch keine Strahlung entsenden kann. Aus (46) folgt

$$4\psi = \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad \text{d. h.} \quad 4\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{d\psi}{\psi},$$

folglich

$$4 \lg \vartheta = \lg \psi + Const.,$$

oder

$$\psi(\vartheta) = C \cdot \vartheta^4. \tag{47}$$

Wenn nun in die Wand des Zylinders ein enges Loch gemacht wird, so strahlt dieses wie eine ideale schwarze Fläche nach außen (vgl. oben S. 492). Die Strahlungsintensität i muß offenbar proportional zur Energiegedichte ψ (ϑ) im Innern des Zylinders sein [1]. Es folgt also auch für die Strahlungsintensität i einer schwarzen Fläche das Gesetz

$$i = a \cdot \vartheta^4, \tag{48}$$

d. h. die Gesamtstrahlungsintensität eines schwarzen Körpers ist proportional zur vierten Potenz seiner absoluten Temperatur.

Dieses Gesetz, welches Stefan [2]) empirisch aus Beobachtungen zuerst erschlossen hatte und Boltzmann (a. a. O.) theoretisch (auf ähnlichem Wege wie hier) abgeleitet hatte, ist mehrfach experimentell bestätigt worden, am genauesten durch Lummer und Pringsheim [3]), welche durch bolometrische Messung fanden, daß innerhalb des Temperaturintervalls von 100° Cels. bis 1300° Cels. das Loch eines Hohlraums (ideale schwarze Fläche) das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz befolgte. Es ist bei den Versuchen natürlich auch auf die Temperatur des Bolometers Rücksicht zu nehmen (vgl. oben S. 483). Die Zustrahlung der kleinen Fläche ds gegen die Fläche ds' in der gegenseitigen Entfernung r beträgt,

---

1) Es ergibt sich, daß $\psi = \frac{4\pi}{c} i$ ist, vgl. M. Planck, Vorl. über Theor. d. Wärmestr. Leipz. 1906, S. 23.

2) Wien. Ber. **79** (2) S. 391, 1879. Stefan glaubte, daß dies Strahlungsgesetz für beliebige Körper Geltung hätte. Es gilt aber streng nur für vollkommen schwarze Körper.

3) Wied. Ann. **63**, S. 395, 1897. — Ann. d. Phys. **3**, S. 159, 1900, vgl. ferner Valentiner, Ann. d. Phys. **31**, 275, 1910.

falls ds und ds' senkrecht gegen r stehen, nach der Definition der Strahlungsintensität [oben S. 475 Formel (3)]:

$$dL = i \frac{ds\,ds'}{r^2}.$$

Die Zustrahlung der Fläche ds' gegen ds beträgt, falls i' die Strahlungsintensität von ds' bezeichnet:

$$dL' = i' \frac{ds\,ds'}{r^2}.$$

Falls daher i und i' das Gesetz (48) befolgen d. h. falls ds und ds' vollkommen schwarze Flächen sind), so ist die im ganzen in der Zeiteinheit dem Element ds' zugeführte Wärmemenge

$$dW = dL - dL' = a \frac{ds\,ds'}{r^2} (\vartheta^4 - \vartheta'^4), \tag{49}$$

falls ϑ' die absolute Temperatur von ds' bezeichnet.

Die Konstante a ist von Lehnebach, F. Kurlbaum[1]) u. a.[2]) in absolutem Maße durch bolometrische Messung bestimmt worden; das Prinzip der Messung war bei Kurlbaums Versuchen, daß das Bolometer durch einen elektrischen Strom gemessener Stärke bei verhinderter Zustrahlung auf die gleiche Temperaturerhöhung gebracht wurde, wie durch die Zustrahlung allein ohne Strom. Die Zustrahlung wurde daher durch die Joulesche Stromwärme in absolutem Maße bestimmt. Es ergab sich, daß, wenn man mit e_t das Emissionsvermögen der Flächeneinheit eines schwarzen Körpers bei t^0 Cels. bezeichnet, d. h. die nach allen Richtungen ausgestrahlte Energie in 1 sec., die Differenz der Emissionsvermögen zweier auf 100^0 Cels. und 0^0 Cels. temperierter schwarzer Einheitsflächen beträgt:

$$e_{100} - e_0 = 0{,}0731 \text{ Watt} = 7{,}31 \cdot 10^5 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\,\text{sec}}. \tag{50}$$

Nun ist [vgl. oben S. 476 Formel (5)] $e = \pi i$, falls i die Strahlungsintensität ist. Daher folgt

$$i_{100} - i_0 = a(373^4 - 273^4) = 2{,}33 \cdot 10^5,$$

1) Wied. Ann. 65, S. 746, 1898.

2) Féry, Journ. de Phys. 8, 758, 1909. — Nach Férys Messungen soll $a = 2{,}01 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\,\text{sec}}$ sein (siehe aber Gl. (51) auf folgender Seite).

d. h. es ergibt sich die Konstante a für die Strahlungsintensität einer schwarzen Fläche in absolutem *cgs*-Maß zu

$$a = 1{,}69 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{erg}/_{\mathrm{sec\ cm^2}} \tag{51}$$ [1].

oder ausgedrückt in gr. cal:

$$a = 0{,}403 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{gr.\ cal}/_{\mathrm{sec\ cm^2}} \tag{51'}$$

12. Die Sonnentemperatur, erschlossen aus ihrer Gesamtstrahlung. Wenn die Sonne ein vollständig absorbierender (d. h. schwarzer) Körper wäre, welcher eine reine Temperaturstrahlung besäße, so könnten wir ihre Temperatur[2]) aus der Solarkonstante (S. 477) und dem absoluten Werte der Konstante a im Strahlungsgesetz berechnen. Nennt man ϑ die absolute Sonnentemperatur, ϑ' die Temperatur auf der Erde, so wäre nach (49) und (51′) die Solarkonstante, d. h. die pro Minute der Flächeneinheit der Erde zugestrahlte Energie:

$$dW = 0{,}403 \cdot 10^{-12} \cdot 60 \frac{ds}{r^2} (\vartheta^4 - \vartheta'^4). \tag{52}$$

Nun ist aber

$$ds : r^2 = \pi \cdot (1/_2\, \varphi)^2,$$

wobei φ die scheinbare Größe des Sonnendurchmessers $= 32'$ bezeichnet.

Setzt man daher die Solarkonstante (mit Langley) $dW = 3$ gr. cal/Minute, so wird[3]) die effektive Sonnentemperatur $\vartheta = 6500^0$, d. h. etwa 6200^0 Cels. Nimmt man die Sonnenkonstante (mit Angström) zu 4 gr. cal/Minute an, so würde die effektive Sonnentemperatur etwa 6700^0 Cels. betragen.[4])

13. Die Veränderung des Spektrums eines schwarzen

1) Vgl. aber Anm. 2 auf voriger Seite.

2) Dieselbe wird als die effektive Sonnentemperatur bezeichnet. Ihre wirkliche Temperatur könnte höher sein, falls ihr Absorptionsvermögen kleiner als 1 ist, dagegen tiefer, falls auch Luminiszenz, z. B. Chemi-Luminiszenz, bei der Sonnenstrahlung wirkt.

3) Auf den Wert von ϑ' kommt es nicht an, da in (52) ϑ'^4 zu vernachlässigen ist neben ϑ^4.

4) Nach neueren Bestimmungen von Abbot und Fowle ist die Solarkonstante nur 1,75 gr. cal/Minute. Die Sonnentemperatur würde sich dann entsprechend niedriger ergeben (Astrophys. Journ. **35**, 92, 1912).

Körpers mit der Temperatur (Wiensches Verschiebungsgesetz). Unter dem Spektrum eines schwarzen Körpers verstehen wir die Verteilung der von ihm ausgesandten strahlenden Energie auf die verschiedenen Wellenlängen. Wir knüpfen die Untersuchung an an das Strahlungsgleichgewicht innerhalb eines geschlossenen Hohlkörpers. Die Strahlungsintensität einer schwarzen Fläche ergibt sich dann, falls man sich ein kleines Loch in der Wand des Hohlkörpers denkt, als proportional zu der im Hohlkörper stattfindenden Energiedichte. Nach diesem schon in § 11 benutzten Verfahren ergibt sich auch, daß für das Strahlungsgleichgewicht die Natur der Wände des Hohlkörpers gleichgültig ist, wofern sie nur nicht ganz aus vollkommenen Spiegeln bestehen.

Die Veränderung des Spektrums eines schwarzen Körpers mit seiner Temperatur kann man nun nach einem von W. Wien[1]) erdachten Verfahren in folgender Weise bestimmen.

Wir denken uns einen Zylinder vom Querschnitt 1, in welchem zwei Stempel S und S' verschiebbar sind, welche mit lichtdichten Klappen versehen sein sollen. K und K' seien zwei schwarze Körper der absoluten Temperaturen ϑ und $\vartheta + \delta\vartheta$. Die Seitenwände des Zylinders sowie die Stempel S, S' sollen vollkommen spiegeln. Ebenfalls seien die Außenseiten von K und K' mit vollkommenen Spiegeln belegt. Der Innenraum des Zylinders sei frei von Materie.

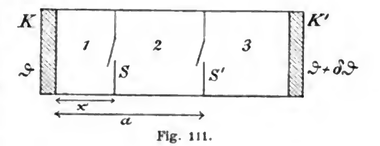


Fig. 111.

Es sei nun zunächst S' geschlossen, S offen. Es strahlt dann K in die Räume 1 und 2, K' in den Raum 3. Die Dichtigkeit der Energie in 3 ist größer als in 2, weil die Temperatur von K' um $\delta\vartheta$ höher ist, als von K. Es werde jetzt S geschlossen und gegen S' hin um δx vorgeschoben, bis die Energiedichte in 2 gleich der Energiedichte in 3 ist. Wir wollen zunächst berechnen, wie groß wir δx wählen müssen. Wenn man die ursprünglich im

1) W. Wien, Berl. Ber. 1893, Sitzung vom 9. Febr. — Wied. Ann. **52**, S. 132, 1894. Vgl. ferner M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. phys. Ges. **2**, S. 65, 1900. — H. A. Lorentz, Akad. d. Wiss. Amsterdam 1901, S. 607. — M. Abraham, Ann. d. Phys. **14**. S. 236, 1904. — M. Planck, Vorles. über d. Theor. d. Wärmestrahlung. Leipzig 1906, S. 68 u. ff.

Raume 2 vorhandene strahlende Energie mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet, so ist die ursprüngliche Energiedichte dort

$$\psi(\vartheta) = \frac{\mathfrak{E}}{a - x}.$$

Daher ist die Veränderung der Energiedichte bei Änderung von x:

$$d\psi = \frac{d\mathfrak{E}}{a - x} + \mathfrak{E}\frac{\delta x}{(a - x)^2}.$$

Nun ist $d\mathfrak{E}$ gleich der Arbeit, welche beim Verschieben des Stempels S zu leisten ist. Nach S. 505 ist daher $d\mathfrak{E} = \frac{1}{3}\,\psi\,\delta x$. Daher wird $d\psi$:

$$(53) \qquad d\psi = \frac{\delta x}{a - x}\left(\frac{1}{3}\,\psi + \frac{\mathfrak{E}}{a - x}\right) = \frac{\delta x}{a - x}\cdot\frac{4}{3}\,\psi.$$

Andererseits ist nach (47) ψ proportional zur vierten Potenz von ϑ, d. h. man hat die auch auf S. 506 schon behandelte Beziehung

$$(54) \qquad d\psi = 4\,\psi\,\frac{\delta\vartheta}{\vartheta}.$$

Wenn daher die Energiedichte im Raume 2 durch Verschieben des Stempels A um δx gleich werden soll der Energiedichte in 3, so ergibt die Vergleichung von (53) und (54):

$$(55) \qquad \frac{1}{3}\,\frac{\delta x}{a - x} = \frac{\delta\vartheta}{\vartheta}.$$

Man kann nun aus dem zweiten Hauptsatze der Thermodynamik schließen, daß, wenn die Dichte der gesamten strahlenden Energie in den Räumen 2 und 3 dieselbe ist, dann auch die Energieverteilung im Spektrum in beiden Räumen dieselbe sein muß. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so müßte es Strahlen einer bestimmten Wellenlänge geben, welche in 3 eine größere Energiedichte besitzen als in 2. Wir können dann vor die Klappe von S' eine dünne durchsichtige Lamelle legen, welche die Strahlen der betrachteten Wellenlänge vorzugsweise hindurchläßt, die anderen vorzugsweise reflektiert, und dann die Klappe öffnen. Es muß dann mehr Energie von 3 nach 2 gehen als umgekehrt, und die Dichtigkeit der Energie wird in 2 größer werden als in 3. Jetzt schließen wir S', entfernen die Lamelle und lassen den Stempel S' von dem

in 2 herrschenden Überdrucke bewegt werden und Arbeit leisten, bis die Dichtigkoit der Energie in beiden Räumen wieder die gleiche ist. Die hierbei gewonnene Arbeit sei A. Dann wird S' wieder geöffnet und in seine Anfangslage zurückgeführt, was keine Arbeit erfordert. Dann gehen wir bei geschlossenem S' mit S auf seine Anfangslage zurück, wobei wir die Arbeit wiedergewinnen, welche bei dem Verschieben von S um δx aufgewendet wurde. Wird schließlich die Klappe von S wieder geöffnet, so ist der Anfangszustand völlig erreicht, dem Körper K ist in Summa keine Wärme entzogen oder zugeführt, dagegen dem Körper K' eine gewisse Wärme entzogen (bei der Strahlung durch die Lamelle, welche auf die Klappe von S' gesetzt wurde). Außerdem ist eine gewisse Arbeit A gewonnen.

Nach dem zweiten Hauptsatze kann man aber nie Arbeit A durch einen Kreisprozeß gewinnen, falls dabei nur einem Wärmereservoir K' Wärme entzogen wird, so daß diese Wärme vollständig in Arbeit verwandelt wäre. — Wir schließen daher, daß bei gleicher Gesamtdichte der Energie in den Räumen 2 und 3 auch die Energieverteilung im Spektrum die gleiche ist.

Die bisherigen Betrachtungen galten ganz allgemein und insbesondere waren die Vorgänge unabhängig von der Zeit, in der sie verlaufen. Wir wollen nun aber in unsere Betrachtungen die Zeit hineinziehen. Durch die Bewegung des Stempels S wird die Energieverteilung im Spektrum nach dem Dopplerschen Prinzip geändert, wenn die Bewegung einigermaßen schnell erfolgt. Sei ursprünglich im Raume 2 die gesamte Energiedichte gegeben durch

$$\psi(\vartheta) = \int_0^\infty \varphi(\lambda, \vartheta)\, d\lambda, \tag{56}$$

so gibt die Größe $\varphi(\lambda, \vartheta) \cdot d\lambda$ die zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ enthaltene Energiedichte an.

Wenn wir nun ebene Wellen betrachten, welche im Raume 2 senkrecht gegen die Stempel S, S' hin und her reflektiert werden, so wird ihre Wellenlänge durch die Bewegung von S geändert. Betrachten wir zunächst einen Strahl, welcher von einem Punkte P ausgehend nur einmal an S reflektiert wird. Wenn im Punkte P der einfallende Strahl eine Zustandsänderung von der Periode T hervorruft, so ruft der an S reflektierte Strahl eine Zustandsänderung

von anderer Periode T' hervor. Wenn nämlich von P eine Erschütterung zur Zeit $t = 0$ ausgeht, so gelangt sie durch Reflexion an S nach P zurück zu einer Zeit $t' = 2b_1 : c$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Raume 2 (im Vakuum) ist und b_1 den Abstand bezeichnet, den P vom Spiegel gerade zu der Zeit t_1 besaß, als die von P ausgehende Erschütterung auf S anlangte.

Wenn zur Zeit $t = 0$ der Abstand zwischen P und S den Wert b hat, so muß offenbar $b = b_1 + s_1$ sein, wobei s_1 den vom Spiegel S in der Zeit t_1 zurückgelegten Weg bezeichnet. Bewegt sich S mit der Geschwindigkeit v gegen P hin, so ist $s_1 = v \cdot t_1$ und $b_1 = c \cdot t_1$, daher folgt aus $b = (c + v) t_1$, daß $t_1 = b : c + v$, d. h. es folgt:

$$b_1 = b \frac{c}{c + v}, \quad t' = 2 \frac{b_1}{c} = \frac{2b}{c + v}.$$

Nach der Zeit T hat sich der Abstand zwischen P und S verringert auf $b' = b - vT$. Daher gelangt eine von P zur Zeit $t = T$ ausgehende Erschütterung nach P durch Reflexion zurück zu der Zeit $T + t''$, wobei ist:

$$t'' = \frac{2b'}{c + v} = \frac{2(b - vT)}{c + v}.$$

Der reflektierte Strahl ruft daher in P eine Erschütterung der Periode T' hervor, wobei ist:

$$T' = T + t'' - t' = T - \frac{2vT}{c + v} = T \frac{c - v}{c + v}.$$

Ein zweimal an S reflektierter Strahl ruft die Periode T'' hervor, wobei ist:

$$T'' = T' \frac{c - v}{c + v} = T \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^2,$$

ein n-mal reflektierter Strahl ruft die Periode hervor

$$T^{(n)} = T \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^n. \tag{57}$$

Wir haben nun n aufzufassen als die Zahl, welche angibt, wie oft die im Raume 2 normal zu S, S' verlaufenden Strahlen bei ihrem Hin- und Hergehen an S reflektiert werden, während S eine bestimmte Wegstrecke δx durchläuft. Wenn der Abstand zwischen S und S' konstant den Wert $a - x$ besäße, so würde

zu einer n-maligen Reflexion an S die Zeit δt erforderlich sein, wobei ist:

$$\delta t = n \frac{2(a-x)}{c}. \tag{58}$$

Wir wollen voraussetzen, daß die Bewegung δx so klein gegen $a-x$ ist, daß wir wirklich $a-x$ als konstant annehmen können. In dieser Zeit δt macht nun S den Weg $\delta x = v \cdot \delta t$; daher folgt aus (58):

$$\delta x = vn \frac{2(a-x)}{c},$$

d. h.

$$n = \frac{\delta x}{2(a-x)} \cdot \frac{c}{v}. \tag{59}$$

Wir wollen nun annehmen, daß v sehr klein gegen c ist. Dann liefert (57), wenn man sich auf die niedrigsten Potenzen in $v:c$ beschränkt:

$$T^{(n)} = T\left(1 - 2n\frac{v}{c}\right),$$

d. h. mit Rücksicht auf (59):

$$T^{(n)} = T\left(1 - \frac{\delta x}{a-x}\right).$$

Die Änderung der Periode durch die Bewegung des Stempels S beträgt also:

$$\delta T = T^{(n)} - T = -T\frac{\delta x}{a-x},$$

und ebenso ist die Änderung $\delta_1 \lambda$ der Wellenlänge λ, welche durch die Bewegung von S entsteht:

$$\delta_1 \lambda = -\lambda \frac{\delta x}{a-x}. \tag{60}$$

Bei positivem δx ist also $\delta_1 \lambda$ negativ, d. h. die Wellenlängen werden verkürzt.

Es ist nun weiter zu berücksichtigen, daß nur $^1/_3$ des der Wellenlänge λ zugehörigen Energieanteils in (56) aufgefaßt werden kann als von Strahlen herrührend, welche senkrecht gegen S gerichtet sind (vgl. oben S. 505). Die Strahlen, welche parallel mit S verlaufen, erfahren durch die Bewegung von S keine Änderung

ihrer Wellenlänge. Wenn daher im Raume 2 zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ ursprünglich die Energie vorhanden ist:

$$dL = \varphi(\lambda, \vartheta)\, d\lambda, \tag{61}$$

so würde nach der Bewegung des Stempels, falls man zunächst von der dadurch gleichzeitig bewirkten Energieverdichtung (oben S. 509) absieht, die zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ liegende Energie dL' aus zwei Dritteln von dL bestehen und aus einem Drittel des Anteiles $\varphi(\lambda - \delta_1\lambda, \vartheta)\, d\lambda$, der ursprünglich zu der Wellenlänge $\lambda - \delta_1\lambda$ gehörte, falls $\delta_1\lambda$ die in (60) berechnete, durch die Bewegung des Stempels bewirkte Wellenlängenvergrößerung bedeutet. Daher ist

$$dL' = [{}^2\!/_3\, \varphi(\lambda, \vartheta) + {}^1\!/_3\, \varphi(\lambda - \delta_1\lambda, \vartheta)]\, d\lambda.$$

Nun kann man nach dem **Taylorschen** Lehrsatze schreiben:

$$\varphi(\lambda - \delta_1\lambda, \vartheta) = \varphi(\lambda, \vartheta) - \delta_1\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}.$$

Daher wird

$$dL' = \varphi(\lambda, \vartheta) - \frac{\delta_1\lambda}{3} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda},$$

oder (wiederum nach dem **Taylorschen** Satze) falls man ${}^1\!/_3\, \delta_1\lambda = \delta\lambda$ setzt:

$$dL' = \varphi(\lambda - \delta\lambda, \vartheta)\, d\lambda. \tag{62}$$

Die bei der Wellenlänge λ nach Einschieben des Stempels, d. h. von der höheren Temperatur $\vartheta + \delta\vartheta$, liegende Energie ist also dieselbe wie die bei der Wellenlänge $\lambda - \delta\lambda$ liegende Energie bei der Temperatur ϑ. Nun ist aber nach (60) und (55):

$$\delta\lambda = {}^1\!/_3\, \delta_1\lambda = -\frac{\lambda}{3} \frac{\delta x}{a - x}, \quad \delta\vartheta = \frac{\vartheta}{3} \frac{\delta x}{a - x},$$

d. h. es gilt die Beziehung:

$$\frac{\delta\vartheta}{\vartheta} + \frac{\delta\lambda}{\lambda} = 0, \tag{63}$$

welche wir schreiben können als $\delta(\vartheta\lambda) = 0$, d. h.

$$\vartheta\lambda = const. \tag{64}$$

Wenn man daher zunächst absieht von der beim Einschieben des Stempels bewirkten Energieverdichtung, d. h. wenn man absieht von der mit Steigerung der Temperatur bewirkten Energieverdichtung, so besteht für höhere Temperatur ϑ bei der Wellenlänge λ dieselbe Energiedichte als für die tiefere Temperatur ϑ' bei der Wellenlänge λ', falls $\lambda\vartheta = \lambda'\vartheta'$ ist.

Berücksichtigt man nun aber auch die Steigerung der ganzen Energiedichte, welche mit ϑ^4 proportional ist, so können wir den soeben ausgesprochenen Satz aufrecht erhalten, wenn wir die Energieverteilung anstatt von ψ in dem Ausdruck $\psi : \vartheta^4$ untersuchen.

Unser Satz besagt dann, daß für einen schwarzen Körper bei einer beliebigen Temperatur ϑ der Verlauf von $\psi : \vartheta^4$ ein und dieselbe Funktion des Argumentes $\lambda\vartheta$ sein muß. Nach (56) ist nun:

$$\frac{\psi(\vartheta)}{\vartheta^4} = \int_0^\infty \frac{\varphi(\lambda, \vartheta)}{\vartheta^5} d(\lambda\vartheta). \tag{65}$$

Es muß daher $\varphi(\lambda, \vartheta) : \vartheta^5$ eine Funktion des Argumentes $\lambda\vartheta$ sein:

$$\frac{\varphi(\lambda, \vartheta)}{\vartheta^5} = f(\lambda\vartheta). \tag{66}$$

Wenn wir daher für irgend eine Temperatur ϑ die Energieverteilung in der Weise auftragen, daß die Abszissen die Größen $\lambda\vartheta$ sind, die Ordinaten die Größen $\varphi(\lambda, \vartheta) : \vartheta^5$, so gilt diese Zeichnung für jede Temperatur ϑ, d. h. man kann dann aus dieser Zeichnung auch leicht für andere Temperaturen die eigentliche Energieverteilung konstruieren, bei der λ und φ die Abszissen und Ordinaten sind. — Hieraus folgt sofort der als Wiensches Verschiebungsgesetz bezeichnete Satz:

Wenn bei der Temperatur ϑ das Strahlungsmaximum des schwarzen Körpers bei der Wellenlänge λ_m liegt, so liegt es bei der Temperatur ϑ' bei derjenigen Wellenlänge λ_m', welche bei der Gleichung genügt:

$$\lambda_m \cdot \vartheta = \lambda_m' \cdot \vartheta'. \tag{67}$$

Aus (66) und (67) folgt ferner, falls man die Funktion φ, welche der Wellenlänge λ_m zugehört, mit φ_m bezeichnet:

$$(68) \qquad \varphi_m : \varphi_m' = \vartheta^5 : \vartheta'^5,$$

d. h. die Strahlungsintensitäten zweier verschieden temperierter schwarzer Körper, welche sie bei denjenigen Wellenlängen besitzen, bei welchen ihre Strahlungsintensität ein Maximum ist, verhalten sich wie die fünften Potenzen ihrer absoluten Temperaturen.

14. Die Sonnentemperatur, erschlossen aus der Energieverteilung des Sonnenspektrums. Das Gesetz (67) ist mehrfach experimentell bestätigt worden [1]. Nach Lummer und Pringsheim [2] ergibt sich die Zahl $\lambda_m \cdot \vartheta = 2940$, falls Einheit der Wellenlänge 0,001 mm ist. Paschen [3] hat nahezu denselben Wert für $\lambda_m\vartheta$ gefunden, etwa 2920. Da nun nach Langley die maximale Energie der Sonnenstrahlung bei $\lambda_m' = 0{,}0005$ mm liegt, so würde für die Sonnentemperatur folgen:

$$\vartheta' = 5860^0 \text{ abs.} = 5587^0 \text{ Cels.}$$

Dieses Resultat stimmt der Größenordnung nach mit dem oben auf S. 508 berechneten. Es ist aber immer die Frage, ob die Sonne ein vollständig absorbierender (schwarzer) Körper ist, der eine reine Temperaturstrahlung besitzt. Falls die Sonne ein chemiluminiszierender Körper ist, so könnte ihre Temperatur eine ganz andere sein [4].

15. Die Verteilung der Energie im Spektrum eines

1) Vgl. darüber F. Paschen und H. Wanner, Berl. Ber. 1899, 12. Jan. — F. Paschen, icid. April. — O. Lummer und E. Pringsheim, Verhdl. der deutsch. phys. Ges. 1899, S. 23, 215. — Ann. d. Phys. **6**, S. 192, 1901. — Für sehr tiefe Temperaturen ist die Strahlung von Langley (Ann. de chim. et de phys. (6) 9, p. 433, 1886) untersucht worden. Er fand mit Hilfe eines Bolometers, das auf -20^0 Cels. abgekühlt war, das Strahlungsmaximum einer geschwärzten Kupferplatte der Temperatur -2^0 Cels. bei der Wellenlänge $\lambda_m = 0{,}0122$ mm. Aus der Zahl $\lambda_m \cdot \vartheta = 2887$ würde bei -2^0 Cels. folgen $\lambda_m = 0{,}0107$ mm. — Bei den Langleyschen Versuchen handelt es sich allerdings nicht um die Strahlung einer ideal-schwarzen Fläche. Außerdem wird nur das relative Strahlungsmaximum der Kupferplatte von -2^0 Cels. gegen das Bolometer von -20^0 Cels. gemessen. Dieses relative Maximum liegt, wie man sich aus der Zeichnung der Strahlungskurven sofort überzeugen kann, bei einem etwas kleineren λ als das absolute Strahlungsmaximum.

2) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. phys. Ges. 1899, S. 215.

3) F. Paschen, Ann. d. Phys. **6**, S. 657, 1901.

4) Betreffs der neueren Messungen der Sonnentemperatur vgl. Kurlbaum, Berl. Ber. 1911, S. 541.

schwarzen Körpers. Die bisherigen Betrachtungen ergeben wohl die Änderung der Verteilung der Energie im Spektrum eines schwarzen Körpers mit der Temperatur, sie sagen aber nichts aus über die Verteilung der Energie bei einer bestimmten Temperatur. Um dieses Gesetz zu erschließen, macht W. Wien[1]) folgende Hypothesen:

Nimmt man als strahlenden schwarzen Körper ein Gas an, so gilt, falls man sich auf den Boden der kinetischen Gastheorie stellt, das Maxwellsche Gesetz der Verteilung der Geschwindigkeiten der Gasmoleküle, demzufolge die Anzahl der Moleküle, deren Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ liegt, proportional ist der Größe

$$v^2 \cdot e^{-v^2/\beta^2} dv, \tag{69}$$

worin β eine Konstante ist, die sich durch die mittlere Geschwindigkeit v vermittelst der Gleichung

$$\overline{v}^2 = {}^3/_2 \, \beta^2 \tag{70}$$

ausdrücken läßt. Die absolute Temperatur ϑ ist nach der kinetischen Gastheorie proportional der mittleren lebendigen Kraft der Gasmoleküle, d. h. es ist

$$\vartheta \sim \overline{v}^2 \sim \beta^2 . \tag{71}$$

Die experimentell gefundene Energieverteilung im Spektrum eines schwarzen Körpers erinnert nun an Funktionen von ähnlicher Art wie das obige Maxwellsche Verteilungsgesetz. Um zu einer Spektralgleichung zu kommen, machte darum Wien die folgenden Hypothesen:

1. Daß jedes Molekül Schwingungen einer Wellenlänge λ aussendet, die nur von der Geschwindigkeit v des Moleküls abhängt. Es ist also auch v eine Funktion von λ.

2. Die Intensität der Strahlung, deren Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt, ist proportional der Anzahl der Moleküle, die Schwingungen dieser Periode aussenden, d. h. proportional zu dem Ausdruck (69). Schreibt man daher diese Strahlungsintensität in der Form

$$\varphi(\lambda, \vartheta)\, d\lambda ,$$

so muß nach (69), (70) und (71), da v eine Funktion von λ ist, sein

1) W. Wien. Wied. Ann. 58, S. 662, 1896.

(72) $$\varphi(\lambda, \vartheta) = F(\lambda) \cdot e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}}.$$

Da nun nach (66) $\varphi : \vartheta^5$ eine Funktion des Argumentes $\lambda\vartheta$ sein muß, so folgt $F(\lambda) = c_1 : \lambda^5$ und $f(\lambda) = c_2 : \lambda$, so daß das Strahlungsgesetz entsteht:

(73) $$\varphi(\lambda, \vartheta) = \frac{c_1 \cdot e^{-c_2 : \lambda\vartheta}}{\lambda^5},$$

welches nun auch als allgemein gültiges Gesetz für jeden schwarzen Körper hingestellt wird, auch wenn derselbe nicht ein Gas ist, da (vgl. oben S. 490) das Strahlungsgesetz eines schwarzen Körpers nicht von seiner speziellen Natur abhängt. — Dieses Gesetz wurde dann auch von Planck[1]) auf speziellerer elektro-magnetischer Grundlage abgeleitet, indes hat er es später[2]) auf Grund allgemeiner Verknüpfung der Thermodynamik mit Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen modifiziert.

Planck geht aus von der Annahme, daß Resonatoren vorhanden sind in einem allseitig durch vollständig reflektierende Wände begrenzten, von beliebiger Wärmestrahlung erfüllten Vakuum. Die Schwingungszahl der Resonatoren (d. h. das Reziproke ihrer Eigenschwingungsdauer) sei mit ν bezeichnet. Im stationären Gleichgewicht hat dann ein Resonator eine bestimmte Energie U und Entropie S, die sich nur durch den Zustand des Systems bestimmen, es muß daher auch S eine Funktion von U sein. Durch thermodynamische Betrachtungen leitet nun Planck zunächst die Formel ab:

(74) $$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{\vartheta},$$

wobei ϑ die absolute Temperatur bedeutet. Durch Anwendung des Wienschen Verschiebungsgesetzes (§ 13) ergibt sich, daß S eine universelle Funktion von $U : \nu$ ist, d. h.

(75) $$S = F\left(\frac{U}{\nu}\right).$$

Um nun die Entropie eines Systems von N Resonatoren zu bilden, wird die Wahrscheinlichkeit seines Zustandes, d. h. der Verteilung

---

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1, S. 116, 1900.

2) Diese Arbeiten hat Planck in seinen „Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung“, Leipzig 1906, zusammengefaßt. Speziell vgl. dort S. 157.

der Gesamt-Energie U_N auf die vorhandenen Resonatoren, bestimmt. Da nämlich im Gleichgewichtsfalle sowohl die Wahrscheinlichkeit als die Entropie ein Maximum sein muß, so ist die Entropie S_N eines physikalischen Systems eine universelle Funktion der Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{W}$ dieses Zustandes. Da die Entropie eines Systems, das aus mehreren Teilen besteht, sich additiv zusammensetzt[1]), dagegen die Wahrscheinlichkeit multiplikativ, so folgt

$$S_N = k \lg \mathfrak{W} + \text{konst.}, \tag{76}$$

wobei k eine universelle Konstante ist. Um nun ein quantitatives Maß für die Wahrscheinlichkeit des Zustandes, d. h. der Verteilung der Gesamtenergie U_N auf die vorhandenen Resonatoren, zu gewinnen, wird angenommen, daß die Energie aus einer großen Zahl von Energieelementen ε bestehe. Diese fundamentale neue Annahme hat für die Grundlage unserer Theorie die größte Bedeutung, zumal sie mit dieser logisch nicht vereinbar erscheint. Aber ohne eine neue Hypothese scheint man hier nicht weiter kommen zu können. Die Wahrscheinlichkeit des Zustandes wird gemäß unserer Annahme dann gleich der Anzahl der verschiedenen individuellen Zuordnungen, die möglich sind, um die vorhandenen Energieelemente ε auf die vorhandenen Resonatoren zu verteilen[2]). Bei der so gewonnenen Entropieformel (76) ergibt die Benutzung der aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz folgenden Beziehung (75) die Bedingung:

$$\varepsilon = h\nu, \tag{77}$$

d. h. die Energieelemente müssen der Schwingungszahl ν proportional sein; h ist eine universelle Konstante, die Planck elementares Wirkungsquantum nennt. Vermöge der Beziehung (74) ergibt sich nun aus (76) eine Gleichung für die Strahlungsenergie im Hohlraum, die also zugleich (vgl. oben S. 492 Anm. 1) das Strahlungsgesetz einer absolut schwarzen Fläche (als kleines Loch des Hohlraumes gedacht) ist. Führt man anstatt der Schwin-

1) Diese auf den ersten Blick selbstverständlich erscheinende Annahme gilt, wie Laue gefunden hat, nicht allgemein; insbesondere gilt, wenn man den Entropiebegriff auf Strahlungsvorgänge überträgt, das Additionstheorem der Entropie nicht, sobald die Strahlen kohärent sind, Ann. d. Phys. **20**, S. 365, 1906; **23**, S. 1 u. 795, 1907.

2) Z. B. würde für $\varepsilon = U_N$ die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{W}$ proportional mit N sein, da dann nur je ein Resonator die ganze Energie enthalten könnte. Mit kleinerem ε wächst $\mathfrak{W}$ erheblich.

gungszahl ν des Resonators seine Eigenwellenlänge nach der Relation ein

(78) $$\lambda = c : \nu ,$$

wobei $c = 3 \cdot 10^{10}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist, so ergibt sich die Strahlungsintensität i_λ, welche zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ liegt, für eine im Vakuum [1]) liegende schwarze Fläche:

(79) $$i_\lambda = 2 \frac{c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda\vartheta}} - 1} \text{ [2]}) .$$

Für genügend kleine Werte $\lambda\vartheta$ geht dieses Gesetz in das Wiensche Gesetz (73) über. Die ersten Messungen von Paschen [3]) schienen dies Gesetz zu bestätigen, jedoch hat sich durch weitere Versuche [4]) bei größeren Werten $\lambda\vartheta$ die Unzulänglichkeit des Wienschen und eine gute Bestätigung des Planckschen Gesetzes ergeben. [5])

Um von der Formel (79) aus die gesamte Strahlungsintensität zu berechnen, führe man nach (78) ν ein. Dann wird (79):

(80) $$i = \int_0^\infty i_\lambda \, d\lambda = \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k\vartheta}} - 1} .$$

oder

$$i = \frac{2h}{c^2} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{h\nu}{k\vartheta}} + e^{-2\frac{h\nu}{k\vartheta}} + e^{-3\frac{h\nu}{k\vartheta}} + \cdots \right) \nu^3 d\, l\nu .$$

---

1) Liegt die Fläche in Luft, so wird die Strahlung nur unbedeutend (im Verhältnis des Quadrates zum Brechungsindex der Luft) erhöht (vgl. oben S. 496).

2) Bei Planck fehlt der Faktor 2, weil i_λ (dort als E_λ beseichnet, l. c, S. 157) sich auf gradlinige Polarisation bezieht, während es hier für natürliches Licht gelten soll.

3) F. Paschen, Wied. Ann. **60**, S. 662, 1897.

4) O) Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. phys. Ges. **2**, S. 163, 1900. — H. Beckmann, Dissertat., Tübingen 1898. — H. Rubens, Wied. Ann. **69**, S. 582, 1899. — H. Rubens u. F. Kurlbaum, Berl. Ber. 1900, S. 929. — Ann. d Phys. **4**, S. 649, 1901. — F. Paschen, Ann. d. Phys. **4**, S. 277, 1901.

5) Nach O. Lummer u. E. Pringsheim, Ann. d. Phys. **6**, S. 210, 1901, bestehen noch geringe Differenzen mit der Planckschen Formel, während Paschen (l. c.) gute Bestätigung fand.

Durch partielle Integration leitet man hieraus ab:

$$i = \frac{12\alpha h}{c^2}\left(\frac{k\vartheta}{h}\right)^4, \tag{81}$$

wobei α eine Abkürzung ist für

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = 1{,}0823\,. \tag{82}$$

Durch (81) ist das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz (48) (oben § 11, S. 506) ausgedrückt, und zwar hat die Strahlungskonstante a den Wert:[1])

$$a = \frac{12\alpha}{c^2}\cdot\frac{k^4}{h^3}\,. \tag{83}$$

Für diejenige Wellenlänge λ_m, welcher im Spektrum der schwarzen Strahlung das Maximum der Strahlungsintensität i_λ entspricht, ergibt sich aus Gleichung (79):

$$\left(\frac{di_\lambda}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_m} = 0\,.$$

Die Ausführung der Differentiation liefert, wenn man zur Abkürzung setzt

$$\frac{ch}{k\lambda_m\vartheta} = \beta \tag{84}$$

$$e^{-\beta} + \tfrac{1}{5}\beta = 1\,.$$

Die Wurzel dieser transzendenten Gleichung ist

$$\beta = 4{,}9651\,; \tag{85}$$

mithin ist $\lambda_m\vartheta = ch:\beta k$, also konstant, wie es das Wiensche Verschiebungsgesetz verlangt. Da nach § 14 die Konstante $\lambda_m\cdot\vartheta$ den Wert 0,294 hat, falls λ_m in cm gemessen wird, so folgt also:

$$\lambda_m\cdot\vartheta = 0{,}294 = \frac{ch}{\beta k} \tag{86}$$

Aus dieser Gleichung, sowie aus (83) mit Benutzung des

1) Bei Planck (Vorlesungen l. c.) bezeichnet a die Konstante der Energiedichte, dagegen hier die der Strahlungsintensität. Wenn man daher die rechte Seite von (83) mit $4\pi/c$ multipliziert (nach Anm. 1, S. 506), so erhält man die Bedeutung der Planckschen Bezeichnung a.

Wertes $a = 1{,}69 \cdot 10^{-5}$ nach (51) S. 508 folgen für die beiden Konstanten h und k die Werte:

$$(87) \qquad h = 6{,}548 \cdot 10^{-27} \, erg \cdot sec, \quad k = 1{,}346 \cdot 10^{-16} \, erg / Cels. grade$$

Der Fortschritt, der durch die Plancksche Theorie gegenüber dem Wienschen Gesetz (73) erzielt ist, liegt nun nicht nur darin, daß eine Formel für die Strahlung eines schwarzen Körpers gewonnen ist, welche sich den Beobachtungen gut anschließt, sondern die Plancksche Theorie enthält auch einen großen Fortschritt allgemeinen physikalischen Inhaltes, indem nämlich nach ihr aus der numerischen Ermittelung der Strahlungskonstanten a und $\lambda_m \cdot \vartheta$ der numerische Wert des elektrischen Elementarquantums und die absolute Zahl und Masse der Gasmoleküle exakt berechnet werden kann. Die physikalische Bedeutung der bei Planck auftretenden Konstanten h und k ist nämlich für seine Theorie besonders charakteristisch und von allgemeinem großem Interesse. Durch Anwendung der Entropieformel (76) auf die Gastheorie, für welche Planck nach dem Vorgange von Boltzmann die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{W}$ eines Zustandes dadurch erhält, daß er die Anzahl der möglichen Geschwindigkeits- und Raumverteilungen dar Gasmoleküle bei gegebenem Gesamtvolumen und Gesamtenergie berechnet, kann man die universelle Konstante k in Beziehung zu der Gaskonstanten setzen, da man bei idealen Gasen die Entropie aus ihrer Zusandsgleichung leicht berechnen kann. Schreibt man die letztere in der Form:

$$pv = Rn\vartheta,$$

wobei p Druck, v Volumen des Gases bei der absoluten Temperatur ϑ, n die Anzahl der Grammmoleküle oder Mole des Gases, bezogen auf $O_2 = 32$ bedeutet (d. h. für $n = 1$ ist die vorhandene Masse des Gases in Grammen gleich seinem Molekulargewicht), so erhält Planck auf diesem Wege die Beziehung:

$$(88) \qquad k = R\frac{n}{N},$$

wobei N die Anzahl der wirklich vorhandenen absoluten Gasmoleküle ist. $n : N = \omega$ ist also das Verhältnis der Molzahl zur Molekülzahl, oder, was dasselbe ist, das Verhältnis der Molekül-

masse zur Molmasse. Da nun die absolute Gaskonstante R den Zahlwert

$$R = 831 \cdot 10^5 \; erg/Cels\;grad \tag{89}$$

hat, so wird nach dem Werte k von (87)

$$n : N = \omega = 1{,}62 \cdot 10^{-24}, \tag{90}$$

d. h. auf ein Mol gehen

$$\frac{1}{\omega} = 6{,}175 \,.\, 10^{23}$$

Moleküle, wobei immer das Sauerstoffmol $0_2 = 32$ gr vorausgesetzt ist. Daher ist z. B. die absolute Masse eines Wasserstoffatoms ($\frac{1}{2} H_2 = 1{,}008$ gr) gleich $1{,}63 \cdot 10^{-24}$ g. Damit wird die Anzahl der bei 0^0 Cels. und Atmosphärendruck in 1 cm^3 enthaltenen Moleküle eines idealen Gases (Loschmidtsche Zahl):

$$N = \frac{76 \cdot 13{,}6 \cdot 981}{831 \cdot 10^5 \cdot 273 \cdot \omega} = 2{,}76 \cdot 10^{19}. \tag{91}$$

Hiermit stimmen die aus der kinetischen Gastheorie gewonnenen Zahlen ($N = 2 \cdot 10^{19}$ bis $10 \cdot 10^{19}$) gut überein.

Da nach der Elektrolyse mit jedem einwertigen Mol (Grammmolekül) die Elektrizitätsmenge 9654 nach absolutem elektromagnetischem Maße (d. h. 96540 Coulomb) verbunden ist, so ist die elektrische Ladung eines einwertigen Ions oder Elektrons (das elektrische Elementarquantum) nach absolutem elektromagnetischem Maß:

$$e' = \omega \cdot 9654 = 1{,}56 \cdot 10^{-20}, \tag{92}$$

nach absolutem elektrostatischem Maße:

$$e = c \cdot e' = 4{,}69 \cdot 10^{-10}. \tag{93}$$

Hiermit stimmen die aus direkteren elektrischen Versuchen von Thomson und Wilson erhaltenen Zahlen[1]) $e = 3.4 \cdot 10^{-10}$ bis $e = 6{,}7 \cdot 10^{-10}$ gut überein. Noch besser schließt sich der von Rutherford und Geiger[2]) an α-Strahlen gemessene Wert $e = 4{,}65 \cdot 10^{-10}$ dem obigen von Planck berechneten Wert von e an.

1) Vgl. dazu J. J. Thomson, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen, deutsch von Marx, Leipzig 1905. S. 129.

2) Rutherford u. Geiger, Phys. Ztschr. **10**, 1, 42, 1909.

Die Konstante h der Planckschen Theorie (das elementare Wirkungsquantum) ist eine von Null verschiedene Größe; daraus folgt, daß auch die Strahlungsenergie für eine bestimmte Schwingungszahl aus einer Art von atomistischen Energieelementen ε[1]) zusammengesetzt ist. Für $h = 0$ würde nämlich nach (79) die Strahlungsformel übergehen in:[2])

$$i_\lambda = \frac{2ck\vartheta}{\lambda^4}, \tag{94}$$

eine Formel, die zuerst von Lord Rayleigh[3]) aufgestellt ist. Diese Formel wird für genügend lange Wellen experimentell bestätigt, dagegen für kürzere Wellen nicht. Dieses Rayleighsche Strahlungsgesetz ist von Lorentz[4]) aus der Elektronentheorie auf Grund der für Metalle von Riecke[5]) und Drude[6]) entwickelten Anschauungen abgeleitet, nach denen die Elektronen in einem Metall in unregelmäßiger Wärmebewegung begriffen sind und sowohl die elektrische, als die Wärme-Leitfähigkeit bedingen. Wenn ein Elektron seine Geschwindigkeit ändert, so muß es nach der elektromagnetischen Theorie Energie ausstrahlen. Indem Lorentz hiernach das Emmissionsvermögen eines Metalles berechnet und es dividiert durch das mittels der galvanischen Leitfähigkeit bestimmte Absorptionsvermögen, so erhält er nach dem Kirchhoffschen Gesetz (vgl. Formel (9') S. 490 oben) das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers. Lorentz gelangt dadurch zur Formel (94), wobei auch die Konstante K in derselben Weise, wie nach der Planckschen Theorie mit der Gaskonstante R durch die Beziehung (88) verknüpft ist. Diese Art der Begründung der Strahlungsgesetze ist zwar auf das Gebiet langer Wellen beschränkt, sowohl weil Lorentz voraussetzt, daß die Elektronenstöße sehr schnell erfolgen sollen im Vergleich zur Periode der ausgesandten Strahlung, als auch weil nach den Versuchen von

---

1) Nach (77) werden die Energieelemente ε um so kleiner, je kleiner die Schwingungszahl ν ist.

2) In diese Formel geht die Plancksche Formel (79) für genügend großes $\lambda\vartheta$ auch unabhängig vom Werte von h über.

3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **49**, S. 539, 1900.

4) H. A. Lorentz, Versl. Kon. Akad. v. Wet. 1902/3, S. 787. Proc. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam 1903, S. 666.

5) E. Riecke, Wied. Ann. **66**, S. 353, 1898.

6) P. Drude, Ann. d. Phys. **1**, S. 566, 1900.

Hagen und Rubens[1]) nur für lange Wellen das Absorptionsvermögen der Metalle lediglich aus ihrer elektrischen Leitfähigkeit berechnet werden kann[2]) und daher auch ihre Strahlung[3]) unter Benutzung des Strahlungsgesetzes des schwarzen Körpers. Aber dafür gewährt das Lorentzsche Verfahren einen höchst bedeutungsvollen Einblick in den Mechanismus der Elektronenbewegungen und bestätigt zugleich die Planckschen Anschauungen von einer anderen Grundlage aus.

Lediglich von Betrachtungen der statistischen Mechanik aus mit Benutzung der Maxwellschen elektromagnetischen Grundgleichungen, aber ohne Heranziehung von speziellen Wechselwirkungen zwischen Materie (Resonatoren, Elektronen) und Äther hat kürzlich auch Jeans[4]) die Formel (94) gewonnen. Daß sich auf diesem Wege nur eine für genügend lange Wellen experimentell bewährte Strahlungsformel ergibt, deutet wiederum darauf hin, daß die rein statistischen Betrachtungen die Natur der Strahlung eines schwarzen Körpers nicht vollständig wiedergeben und daß vielleicht gemäß der Planckschen Theorie die Strahlungsenergie (bei einer von Null verschiedenen Schwingungszahl ν) in endliche kleine Teile zerlegt werden muß, die die Größe $\varepsilon = h\nu$ haben. Die elektrodynamische Bedeutung des elementaren Wirkungsquantums h ist bisher nicht gefunden, aber eine Aufgabe von großem Interesse.[5]) Am besten wird es wohl beim heutigen Stande des Wissens sein, einen umgekehrten Weg einzuschlagen, das Plancksche Strahlungsgesetz als experimentelle Tatsache hinzunehmen und zuzusehen, zu welchen Konsequenzen man bei seiner Annahme genötigt wird. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich auch auf ganz anderer Grundlage, ohne Energieelemente, die Plancksche Formel begründen läßt.

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. **11**. S. 873, 1903.

2) Nach einer Formel, die entwickelt ist von Drude im Lehrb. d. Phys. d. Äthers, 1894, S. 574. — Verhandl. d. Deutsch. phys. Gesellsch. **5**, S. 142, 1903. — M. Planck, Berl. Ber. 1903. S. 278.

3) E. Aschkinaß, Ann. d. Phys. **17**, S. 960, 1905.

4) J. H. Jeans, Phil. Mag. **10**, S. 91, 1905. Diesen Weg hatte auch schon Lord Rayleigh beschritten in Nature **72**, S. 54, 243, 1905. — Vgl. auch die Darstellung dieser und der Lorentzschen Betrachtungen bei M. Planck, Vorlesungen über Theorie d. Wärmestrahlung, S. 170—179.

5) Vgl. dazu auch A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, S. 132, 1905. — **20**, S. 199, 1906. — Neuerdings hat Planck seine Theorie modifiziert, indem er annimmt, daß nur die Emission, aber nicht die Absorption von Strahlung quantenhaft erfogt. (Verh. D. Phys. Ges. **13**, 138, 1911; Ann. d. Phys. **37**, S. 642, 1912.).

Das Strahlungsgesetz (79), welches ein ganz universelles ist, gibt uns die Mittel in die Hand,[1] ein neues absolutes Maßsystem für die Länge, Masse, Zeit und Temperatur aufzustellen, welches nur auf den Eigenschaften des Vakuums (Äthers) begründet ist und von keinen besonderen Eigenschaften einer bestimmt ausgewählten Art wägbarer Materie abhängt. Wir finden nämlich auch in der allgemeinen Gravitation und in der Lichtgeschwindigkeit im Äther zwei universelle Gesetze. Ein solches absolutes Maßsystem wird durch die Festsetzung gewonnen, daß die Gravitationskonstante, die Lichtgeschwindigkeit im Äther, und die beiden Konstanten h und k des Strahlungsgesetzes den Wert 1 erhalten sollen.[2]

Kapitel III.

Das Leuchten der Gase und Dämpfe.

1. Unterscheidung der Luminiszenz und Temperaturstrahlung. Der prinzipielle Unterschied zwischen Luminiszenz und Temperaturstrahlung ist schon oben S. 486 genannt. Welche Kriterien haben wir nun, um bei irgend einem leuchtenden Körper zu entscheiden, ob er luminisziert oder eine reine Temperaturstrahlung besitzt (ob er allaktin oder thermaktin ist)?

Auf Luminiszenzerscheinungen ist der Kirchhoffsche Satz der Proportionalität zwischen Emissions- und Absorptionsvermögen nicht anwendbar; trotzdem wird auch bei Luminiszenzerscheinungen die Emission scharfer Spektrallinien von auswählender Absorption derselben Spektrallinien begleitet sein, da beide geknüpft sind an das Bestehen von wenig gedämpften Eigenschwingungen der Ionen.

Durch Messung der absoluten Größe des Emissionsvermögens oder der Strahlungsintensität kann man aber ein Kriterium dafür

1) M. Planck, Vorlesungen über Wärmestrahlung, S. 163.

2) Die numerischen Werte dieser absoluten Einheiten sind bei Planck, l. c. zu finden.

gewinnen, wann sicher Luminiszenz vorliegt: Sowie die Strahlungsintensität eines Körpers größer ist als die eines schwarzen Körpers gleicher Temperatur im gleichen Wellenlängenintervall, so muß Luminiszenz mindestens neben der Temperaturstrahlung bestehen. Durch dieses Kriterium haben E. Wiedemann,[1]) F. Paschen[2]) und E. Pringsheim[3]) gezeigt, daß z. B. das gelbe Licht, welches eine in einen Bunsenbrenner eingeführte Kochsalzperle ausstrahlt, mindestens teilweise der Chemi-Luminiszenz (Reduktion des Natriums aus dem Salz nach Pringsheim) seine Entstehung verdankt. Letzterer schließt (nach Anstellung weiterer Versuche) allgemein, daß bei allen Methoden, welche man zur Erzeugung der Gasspektren verwendet, das Leuchten eine Folge elektrischer[4]) oder chemischer[5]) Vorgänge ist. Trotzdem müssen alle Gase und Dämpfe bei genügender Erhitzung auch eine dem Kirchhoffschen Satze entsprechende Temperaturstrahlung entsenden,[6]) weil sonst ein Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik bestehen würde. Es ist allerdings möglich, daß die Absorption und daher auch die Temperaturstrahlung bei Ausschließung aller chemischen Prozesse gering ist und vielleicht keine scharfen Spektrallinien ergibt, weil das Absorptionsvermögen eventuell erst durch chemische Prozesse zu bedeutender Größe gebracht wird. Es wäre z. B. denkbar, daß erst durch Änderungen im Molekülbau die Ionen-

---

1) Wied. Ann. 37, S. 215, 1889.

2) Wied. Ann. 51, S. 42, 1894.

3) Wied. Ann. 45, S. 428, 1892. — 49, S. 347, 1893.

4) Die niedrige Temperatur in Geißlerschen Röhren hat E. Wiedemann (Wied. Ann. 6, S. 298, 1879) konstatiert.

5) Pringsheim (Wied. Ann. 45, S. 440) hat von einer 150° C. kalten CS_2-Flamme eine photographische Wirkung erhalten. Reine Temperaturstrahlung hätte in diesem Falle gar kein photographisch wirksames Licht entsenden können. — Nebenbei mag hier bemerkt werden, daß die Wirksamkeit des Auer-Brenners nach E. St. John (Wied. Ann. 56, S. 433, 1895) nicht auf Luminiszenz beruht, sondern in der Anwendung eines feuerbeständigen thermaktinen Glühkörpers von kleiner Masse, kleiner Wärmeleitung, großer Oberfläche und großem Emissionsvermögen liegt. — Nach H. Rubens (Wied. Ann. 69, S. 588, 1899) ist aber der Auersche Glühkörper wahrscheinlich allaktin für große Wellenlängen. — Vgl. hierzu jedoch die weiteren Arbeiten von Rubens in Ann. d. Phys. 18, S. 725, 1905. — Verhandl. d. Deutsch. phys. Ges. 1906, S. 41.

6) Nach Paschen (Wied. Ann. 50, S. 409, 1893) zeigt Kohlensäure und Wasserdampf eine reine Temperaturstrahlung. In der Tat sind ja auch ihre Absorptionsvermögen für gewisse Wellenlängenbereiche bedeutend.

eigenschwingungen möglich werden, welche starke auswählende Absorption veranlassen.

2. Die Elektronenhypothese. Nach elektromagnetischer Auffassung werden durch die Schwingungen der Elektronen elektromagnetische Wellen gleicher Periode, d. h. Licht bestimmter Farbe entsendet. Wir wollen prüfen, ob diese Hypothese ohne Widerspruch mit beobachteten Strahlungserscheinungen durchführbar ist,[2]) und wollen die Konstanten, welche für die Elektronenbewegungen maßgebend sind, numerisch zu taxieren suchen.

Wir fassen einen stationären Zustand ins Auge, in welchem die Elektronen Schwingungen konstanter Amplitude besitzen, wobei sie beständig eine gewisse Energiezufuhr erfahren, die notwendig ist, um ihre Amplituden, die sich sonst wegen Strahlungs- und eventuell Reibungsverlusten vermindern würden, konstant zu erhalten. Bei reiner Temperaturstrahlung besteht diese Energiezufuhr in den gegenseitigen Stößen der Moleküle, bei Luminiszenzerscheinungen ist sie in Form von chemischer, elektrischer usw. Energie enthalten.

Wenn eine elektrische Ladung e (nach elektrostatischem Maß) gegen eine gleiche, entgegengesetzte Ladung (die man in Ruhe oder in Bewegung annehmen kann) eine Schwingung der Amplitude l und der Periode T ausführt, so ist nach Hertz[1]) die in einer halben Periode entsandte elektromagnetische Energie:

$$L' = \frac{8\pi^4}{3\lambda^3} e^2 l^2, \tag{1}$$

wobei λ die Wellenfänge im Vakuum ($\lambda = cT$) bedeutet.

In der Zeiteinheit wird daher von zwei entgegengesetzt geladenen Ionen die Energiemenge ausgestrahlt:

$$L = \frac{16}{3}\pi^4 \frac{e^2 l^2}{\lambda^3 T} = \frac{16}{3}\pi^4 c \frac{e^2 l^2}{\lambda^4}. \tag{2}$$

Nun hat E. Wiedemann[2]) gemessen, daß die von einem g Natrium in den beiden D-Linien pro Sekunde entsendete Energie beträgt

1) Vgl. hierzu auch H. Ebert, Wied. Ann. **49**, S. 651, 1893. — F. Richarz, Wied. Ann. **52**, S. 407, 1894.

2) Wied. Ann. 36, S. 12, 1889. — Dort tritt ein anderer Zahlenfaktor auf, weil T anders als hier definiert ist.

2) Wied. Ann. 37, S. 213, 1889.

$$L_1 = 3210 \text{ gr. cal} = 13.45 \cdot 10^{10} \text{ erg}. \qquad (3)$$

Das Atomgewicht des Natriums ist 23. Da nach der Planckschen Theorie ein Wasserstoffatom $1{,}63 \cdot 10^{-24}$ g wiegt (vgl. oben S. 523), so ist also das Gewicht eines Natriumatoms $3{,}75 \cdot 10^{-23}$ g.

Natrium ist ein einwertiges Atom. An jede Valenzstelle knüpft sich eine Ladung e. Wenn sich daher an jedem Atom 1 oszillierende Ladung befindet, so sind in 1 g Natrium

$$1 : 3{,}75 \cdot 10^{-23} = 2{,}66 \cdot 10^{22}$$

solcher Erregungsquellen vorhanden. Es muß daher sein nach (2) und (3)

$$\frac{16}{3} \pi^2 c \frac{e^2 l^2}{\lambda^4} \cdot 2{,}66 \cdot 10^{22} = 13{,}45 \cdot 10^{10}. \qquad (4)$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte ein: $e = 4{,}69 \cdot 10^{-10}$ (nach Formel (93)), $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-5}$ cm, $c = 3 \cdot 10^{10}$, so folgt

$$l = 4{,}2 \cdot 10^{-12} \text{ cm}. \qquad (5)$$

Der Durchmesser eines Moleküls berechnet sich aus der kinetischen Gastheorie zu etwa $d = 2 \cdot 10^{-8}$ cm.[1]) Da nach (5) l wesentlich kleiner als d ist, so kann also die verhältnismäßig starke Emission des Natriumdampfes tatsächlich quantitativ erklärt werden aus einer Oszillation der Elektronen (Valenzladungen) innerhalb des Moleküls (der molekularen Wirkungssphäre).

Oben S. 437 ist aus dem Zeemanschen Phänomen das Verhältnis der Ladung e zur Masse m des negativen Elektrons im Natriumdampf berechnet zu:

$$e : m = c \cdot 1{,}6 \cdot 10^7. \qquad (6)$$

Wir haben früher (S. 365) die Bewegungsgleichung für ein unter dem Einfluß einer elektrischen Kraft X schwingendes Ion (Elektron) in der Form geschrieben[2]):

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{4\pi e^2}{\vartheta} \xi = eX. \qquad (7)$$

1) Vgl. F. Richarz, Wied. Ann. 52. S. 395, 1894.

2) Hier bedeutet ϑ nicht mehr die absolute Temperatur.

ξ bedeutet die Entfernung des Ions aus der Ruhelage. Bei kleinem r ist die Periode T' der Eigenschwingung des Ions gegeben durch

(8) $$T'^2 = \frac{\pi m \vartheta}{e^2}.$$

Da für Natriumdampf $T' = 2 \cdot 10^{-15}$ etwa beträgt, so folgt aus (6) und aus $e = 4{,}69 \cdot 10^{-10}$:

(9) $$\vartheta = 2{,}9 \cdot 10^{-22}.$$

Um schließlich auch die Konstante r in (7) zu ermitteln, kann man das Resultat der S. 369 benutzen, daß in der Nähe einer Eigenschwingung der Brechungsindex n und Absorptionsindex $\varkappa$ sich bestimmt aus der Gleichung:

(10) $$n^2(1 - i\varkappa)^2 = 1 + \frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}},$$

wobei $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Ionen in 1 cm³ bedeutet, und ferner gesetzt ist

(11) $$\tau = T : 2\pi, \quad a = \frac{r\vartheta}{4\pi}, \quad b = \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}.$$

Aus beobachtetem $\varkappa$ könnte man daher r gewinnen. Solche Messungen von $\varkappa$ liegen beim Natriumdampf nicht vor und würden auch sehr schwierig sein, weil bei ihm die Absorption in der Nähe der Eigenschwingung ungemein schnell mit der Periode T variiert.

Wir können aber in anderer Weise zur Schätzung von r gelangen: Zunächst muß bei den scharfen Absorptionslinien des Natriumdampfes die Größe a/τ sehr klein sein. Für $\tau = T' : 2\pi$ folgt aber

(12) $$\frac{a}{\tau} = r \cdot e \sqrt{\frac{\vartheta}{4\pi m}} = r \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-8}.$$

r muß also jedenfalls unter der Größenordnung 10^4 bleiben.

Auch auf anderem Wege können wir eine obere Grenze für r gewinnen. Wenn die Ionen, nachdem sie einmal in Schwingung versetzt sind, einem äußeren Einfluß entzogen werden, so führen sie gedämpfte Eigenschwingungen aus von der Form

(13) $$\xi = l \cdot e^{-\gamma \frac{t}{T}} \cdot e^{i 2\pi \frac{t}{T}}.$$

Nach (7) muß dann bei kleinem r sein:

$$\gamma = \frac{re^2}{2m} T' = r \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-7}, \tag{14}$$

wobei T' aus (8) bestimmt ist. Die Dämpfungskonstante γ der Eigenschwingungen muß nun sehr klein sein, weil mit Natriumlicht noch Interferenzen bei 200000 λ Gangunterschied beobachtet wurden.[1] Also darf für $t = 200000\ T' \xi$ noch nicht sehr klein sein. Daher muß $200000 \cdot \gamma$ immer noch kleiner als 1 sein, d. h.

$$\gamma \leqq 5 \cdot 10^{-6} \text{ oder } r \leqq 23. \tag{15}$$

Im folgenden werden wir eine untere Grenze für r bestimmen.

Aus der Dispersion der Gase und Dämpfe kann man gerade wie bei Flüssigkeiten und festen Körpern die Elektronenzahl N berechnen, wenn man e/m als bekannt annimmt (vgl. dazu oben S. 380). Nimmt man für e/m den bei Elektronen gültigen Wert an nach Formel (6), so ergibt sich die Zahl p der pro Molekül schwingenden Elektronen bei allen beobachteten Substanzen der Größenordnung nach gleich der im Molekül vorhandenen Summe der chemischen Valenzen und jedenfalls mit ihr in Beziehung stehend.[2] Die Messungen von Wood[3] am Natriumdampf können leider zu diesem Zwecke nicht numerisch verwertet werden, weil die sehr schwierig festzustellende Dichte des Natriumdampfes (oder Temperatur und Druck) nicht bekannt ist, sondern nur die Temperatur.

3. Die Dämpfung der Elektronenschwingungen durch ihre eigene Strahlung. Wenn zur Zeit $t = 0$ ein negativ geladenes Elektron $-e$ von einem positiv geladenen Ion $+e$ um die Strecke l entfernt ist, während diese Entfernung nach Ablauf der Zeit T' sich um dl geändert hat, so ist die Änderung $d\mathfrak{E}$ der elektrostatischen Energie:

$$d\mathfrak{E} = \frac{e^2}{l^2} \cdot dl. \tag{16}$$

1) Bei Quecksilberlicht haben Lummmer und Gehrcke noch bei 1200000 Wellenlängen Gangunterschied auf die Interferenzfähigkeit des Lichtes der Linie 546 $\mu\mu$ geschlossen (s. S. 142).

2) Vgl. dazu P. Drude, Ann. d. Phys. **14**, S. 714, 1904.

3) R. W. Wood, Physikal. Ztschr. **5**, S. 751, 1904. Diese Versuche sind besonders interessant, weil der Brechungsindex ganz in der Nähe der Absorptionslinie D bestimmt ist.

Nun hat sich nach (13) die Amplitude der Elektronenbewegung nach Ablauf einer Periode T' geändert um $dl = -\gamma \cdot l$, falls γ klein ist. Nach (1) S. 528) ist ferner die Energieabnahme durch Strahlung in der Zeit T':

(17) $$d\mathfrak{E}' = -\frac{16}{3}\frac{\pi^4}{\lambda^3}e^2 l^2.$$

Die Energieabnahme $d\mathfrak{E}$ muß nun mindestens gleich sein der Energieabnahme $d\mathfrak{E}'$ durch Strahlung. Aus (16) und (17) gewinnen wir daher, falls $dl = -\gamma l$ gesetzt wird:

(18) $$\frac{e^2}{l}\gamma \geqq \frac{16}{3}\cdot\frac{\pi^4}{\lambda^3}e^2 l^2, \text{ d. h. } \gamma \geqq \frac{16\pi^4}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^3.$$

Benutzt man den Wert (5) für l, so wird für Natriumdampf:

(19) $$\gamma \geqq 1.9 \cdot 10^{-19}, \text{ d. h. nach (14)}$$
$$r \geqq 0{,}85 \cdot 10^{-12}.$$

Wir werden nun weiter sehen, daß r sogar erheblich über der so bestimmten unteren Grenze liegen muß, und daß für den benutzten Wert von l die Dämpfung der Elektronenschwingungen durch ihre eigene Strahlung ganz zu vernachlässigen wäre.[1]

Selbst wenn man l von der Ordnung des Moleküldurchmessers annehmen würde, d. h. $l = 2 \cdot 10^{-8}$ setzt, so würde $\gamma = 2 \cdot 10^{-8}$ folgen, während wahrscheinlich γ ziemlich viel größer ist.

4. Die Strahlung der Elektronen bei äußerer Einstrahlung. Wenn eine äußere Kraft X von der Periode $T = 2\pi\tau$ und der Amplitude A wirkt, so nehmen die Ionen eine Bewegung gleicher Periode an, deren Amplitude sich nach (7) mit Benutzung der Abkürzungen (11) schreibt:

(20) $$l = A \cdot \frac{\vartheta}{4\pi e\sqrt{\left[1-\left(\frac{b}{\tau}\right)^2\right]^2 + \frac{a^2}{\tau^2}}}.$$

Die in der Zeiteinheit von einer Schicht der Dicke dz und der

1) Auf strengerer Grundlage leitet Planck (Vorlesungen über Wärmestrahlung, S. 100) die Dämpfung eines elektrischen Oszillators unter Wirkung seiner Eigenstrahlung ab. Auch danach folgt, daß diese nur eine sehr geringe Dämpfung ergibt.

Grundfläche 1 ausgestrahlte Energie ist also nach Formel (2) auf (S. 528):

$$dL = \frac{1}{3}\pi^2 c \mathfrak{N} dz \cdot \frac{A^2 \vartheta^2}{\lambda^4 \left\{\left[1-\left(\frac{b}{\tau}\right)^2\right]^2 + \frac{a^2}{\tau^2}\right\}}, \tag{21}$$

wobei $\mathfrak{N}$ die Anzahl der Elektronen im cm^3 bedeutet.

Andererseits strömt in die betrachtete Schicht pro Zeiteinheit die Energie $\frac{c}{4\pi}A^2$ ein (vgl. S. 444; es ist die elektrische Energie gleich der magnetischen Energie), dagegen strömt die Energie $\frac{c}{4\pi}A'^2$ aus, falls A' die Amplitude der einfallenden elektrischen Kraft nach Durchlaufen der Schicht dz bezeichnet. Es ist daher

$$A' = A \cdot e^{-2\pi n \varkappa \frac{dz}{\lambda}}.$$

Die in der Schicht pro Zeiteinheit absorbierte Energie beträgt daher:

$$d\mathfrak{E} = \frac{c}{4\pi}(A^2 - A'^2) = \frac{c}{4\pi} A^2 \cdot 4\pi n \varkappa \frac{dz}{\lambda}. \tag{22}$$

Nun ist aber nach (10) auf S. 530 in der Nähe der Eigenschwingung:

$$2n^2\varkappa = \frac{\mathfrak{N}\vartheta a/\tau}{\left(1-\frac{b}{\tau^2}\right)^2 + \frac{a^2}{\tau^2}} \tag{23}$$

Unter Berücksichtigung hiervon schreibt sich das Verhältnis der ausgestrahlten zur absorbierten Energie:

$$\frac{dL}{d\mathfrak{E}} = \frac{2\pi^2}{3}\frac{\vartheta\tau}{\lambda^3 a} n = \frac{4\pi^2}{3} \cdot \frac{n}{c\lambda^2 r}. \tag{24}$$

Dieses Verhältnis wird also um so größer, je kleiner r ist. Für $n = 1$ ergibt sich bei $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-5}$ aus (24):

$$\frac{dL}{d\mathfrak{E}} = \frac{0{,}126}{r}. \tag{25}$$

Da dies Verhältnis jedenfalls kleiner als 1 sein muß, da sonst eine Umkehrung der Natriumlinie (vgl. oben S. 494) unmöglich wäre, so muß in Anbetracht der Ungleichung (15) r etwa den Wert 10 bis 20 besitzen, also nach (14) γ den Wert $2 \cdot 10^{-6}$ bis $4 \cdot 10^{-6}$ haben.

G. v. Ubisch hat versucht, γ experimentell zu bestimmen und findet dafür die Größenordnung 10^{-5} (Ann. d. Phys. **35**, S. 790, 1911).

5. Über Fluoreszenz. Wenn beim Natriumdampf r den Wert 20 nicht überschreitet, so müßte eine merkbare Lichtstrahlung durch äußere Einstrahlung hervorgerufen werden. Bei den sogenannten fluoreszierenden Körpern wird nun in der Tat durch Belichtung eine merkliche Eigenstrahlung hervorgerufen und nach neueren Versuchen von Wood[1]) ist bei Natriumdampf Fluoreszenz beobachtbar. Man könnte versucht sein, diese Erscheinung durch kleine Werte von r zu erklären. Der Charakter der Absorption des Körpers kann dabei noch sehr wechselnd sein, da derselbe durch die Größe a, d. h. das Produkt $r\vartheta$ bestimmt wird. Indes ist der Versuch, auf Grund der Bewegungsgleichung (7) der Ionen eine Theorie der Fluoreszenz geben zu wollen, von vornherein als aussichtslos zu bezeichnen. Jene Differentialgleichung ergibt nämlich allemal, daß im stationären Zustande die Ionen Schwingungen von gleicher Periode ausführen wie die einfallende elektrische Kraft X. Dadurch wird aber gerade eine charakteristische Erscheinung, daß nämlich das Fluoreszenzlicht fast stets eine andere Farbe als das am stärksten absorbierte Licht besitzt, nicht erklärt.

Man muß notwendig die Fluoreszenz auffassen als eine Luminiszenz, die durch besondere (eventuell chemische) Vorgänge erregt wird, deren Ursache in der Belichtung zu suchen ist. So hat Voigt[2]) die Theorie aufgestellt, daß die Moleküle des fluoreszierenden Körpers zwei verschiedene Zustände annehmen können, in denen ihre Elektronen verschiedene Eigenperioden besitzen. Unter dem Einfluß der Belichtung kann der eine in den anderen Zustand übergehen. Wenn in demjenigen der beiden Zustände, in denen die Elektronen die größere Eigenperiode haben, die Dämpfung eine viel kleinere ist als im anderen Zustande, so wird dem ersten Zustande allein merkliche Fluoreszenz, dem letzteren merkliche Absorption entsprechen, und die Farbe des Fluoreszenzlichtes wird nach Rot hin von der des maximal absorbierten abweichen.

---

1) R. W. Wood, Physik. Ztschr. **6**, S. 903, 1905. — **7**, S. 105, 1906.

2) W. Voigt, Arch. Néerl. (2) **6**, Jubelbd. f. Bosscha, S. 352. — Die Theorie von Lommel (Wied. Ann. **3**, S. 113, 1878) hat G. B. Schmidt (Wied. Ann. **58**, S. 117, 1896) näher mit dem Experiment verglichen und nicht bestätigt gefunden.

6. Die Verbreiterung der Spektrallinien nach dem Dopplerschen Prinzip.[1]) Wenn die Elektronen völlig ungedämpfte Eigenschwingungen besäßen, so würden sie trotzdem nur dann völlig scharfe Spektrallinien ergeben, wenn ihr Schwingungszentrum in Ruhe bliebe. Da dieses aber an das Molekül geknüpft ist und die Moleküle nach der kinetischen Gastheorie mit beträchtlichen Geschwindigkeiten im Raume hin- und herfliegen, so müssen nach dem Dopplerschen Prinzip die von den Ionen erregten Schwingungen etwas wechselnde Perioden haben, d. h. die Spektrallinien können nicht völlig scharf sein.

Wenn ein Ion, welches die Periode T besitzt, sich mit der Geschwindigkeit v gegen den Beobachter bewegt, so erhält derselbe nach dem Dopplerschen Prinzip (vgl. S. 462) Licht der Periode:

$$T' = T\left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \tag{26}$$

falls c die Lichtgeschwindigkeit in dem Raume zwischem dem Ion und dem Beobachter ist. Da der Brechungsindex der Gase und der Luft nicht merklich von 1 abweicht, so kann man $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. setzen. Wenn wir daher zunächst annehmen, daß alle Moleküle die gleiche Geschwindigkeit v besitzen, so würden die entsendeten Wellenlängen in den Grenzen $\lambda\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$ liegen. Die Breite $d\lambda$ der Spektrallinie würde daher betragen

$$d\lambda = \lambda \frac{2v}{c}. \tag{27}$$

Nach der kinetischen Gastheorie[2]) ist nun der Mittelwert des Quadrats der Geschwindigkeit der Moleküle gegeben durch

$$\text{Mittel}\ (v^2) = \frac{248 \cdot 10^6 \cdot \vartheta}{M}, \tag{28}$$

wobei M das Molekulargewicht des Gases, ϑ seine absolute Temperatur bedeutet. Setzen wir daher:

1) Diese Frage wurde zuerst von Ebert in Wied. Ann. 36, S. 466, 1889, behandelt. Nach seinen Rechnungen sollte sich die Interferenzfähigkeit der Spektrallinien zu niedrig ergeben, wenn man das Dopplersche Prinzip auf die leuchtenden Gasmoleküle anwendet. — Durch vollständigere Diskussion hat indes Lord Rayleigh (Phil. Mag. (5) 27, S. 298, 1889) diesen Widerspruch im wesentlichen gehoben.

2) Vgl. z. B. L. Boltzmann, Gastheorie I, S. 14.

$$v = \sqrt{\text{Mittel } (v^2)} = 15{,}8 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{\vartheta}{M}}, \tag{29}$$

so würde z. B. für Wasserstoff ($M = 2$) bei 50^0 Cels. ($\vartheta = 323$) folgen $v = 2010 \cdot 10^2$ cm/sec $= 2010$ m/sec. Die Breite einer Spektrallinie müßte also nach (27) sein: $d\lambda = \lambda \,.\, 1{,}34 \cdot 10^{-5}$. — Nach (27) müssen die Spektrallinien im roten Teile des Spektrums mehr verbreitert sein als im blauen Teile. Dies entspricht tatsächlich der Erfahrung:[1])

Die Breite einer Spektrallinie hängt, wie wir früher auf S. 145 sahen, zusammen mit dem größten Gangunterschied, bei welchem das Licht der Spektrallinie noch interferenzfähig ist. Wenn man aus der Spektrallinie zwei Strahlen bildet, welche einen Wegunterschied von d cm besitzen, so können sie nach Formel (28) auf S. 145 Interferenzenfransen bilden, deren Sichtbarkeit V für den Fall, daß die Lichtstärke in der ganzen Breite der Spektrallinie dieselbe ist, gegeben wird durch

$$V = \frac{\sin 4\pi d a}{4\pi d a}. \tag{30}$$

Dabei hängt nach den dortigen Formeln (22) und (20) die Größe a mit der Breite $d\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ der Spektrallinie in folgender Weise zusammen:

$$2a = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{d\lambda}{\lambda^2}. \tag{31}$$

Die Sichtbarkeit V der Interferenzfransen ist nach der dortigen Gleichung (26) definiert. Nach **Rayleigh** kann man nun noch Interferenzen wahrnehmen, wenn das Verhältnis $J_{Min} : J_{Max}$ der Lichtstärken an den Stellen größter Dunkelheit und Helligkeit den Wert 0,95 besitzt. Daraus würde V folgen zu 0,025. Setzt man diesen Wert in (30) ein und berücksichtigt (27) und (31), so würde die maximale Wegedifferenz d, bei welcher noch Interferenzen zu erhalten sind, folgen aus

$$0{,}025 = \frac{\sin(4\pi \, d/\lambda \cdot v/c)}{4\pi \, d/\lambda \cdot v/c} = \frac{\sin \pi x}{\pi x}, \tag{32}$$

wobei zur Abkürzung $4 \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{v}{c} = x$ gesetzt ist. Da die rechte Seite

1) Vgl. Winkelmann, Handb. d. Physik. 1. Aufl. Optik, S. 424 (Autor Kayser).

von (32) klein ist, so ist die kleinste Wurzel von x in der Nähe von 1 zu suchen. Setzt man $x = 1 - \varepsilon$, so folgt aus (32):

$$0{,}025 = \frac{\pi \varepsilon}{\pi (1 - \varepsilon)} = \varepsilon.$$

Es ergibt sich also

$$\frac{d}{\lambda} = x \cdot \frac{c}{4v} = 0{,}975 \cdot \frac{c}{4v}. \tag{33}$$

Wenn man darauf Rücksicht nimmt, daß nicht alle Moleküle die gleiche Geschwindigkeit v besitzen, so wird der Wert von d/λ noch größer, nämlich annähernd[1])

$$\frac{d}{\lambda} = 0{,}345 \frac{c}{v}. \tag{34}$$

Wenn z. B. die Temperatur des in Geißlerschen Röhren leuchtenden Wasserstoffs 50° Cels. beträgt, so müßte die Interferenzfähigkeit seiner Spektrallinien zum ersten Male verschwinden bei dem Gangunterschied:

$$\frac{d}{\lambda} = 51600.$$

Bei Natriumdampf im Bunsenbrenner ist $M = 2 \cdot 23 = 46$ zu setzen. Nehmen wir die Temperatur zu 1500° Cels. an, d. h. setzen wir $\vartheta = 1773$, so würde nach (29) folgen $v = 98{,}2 \cdot 10^3$ und nach (34) $d/\lambda = 105000$.

Hier würde die Interferenzfähigkeit eine noch höhere sein, wenn die Temperatur niedriger wäre. In der Tat kann man durch elektrische Entladungen in einer mit Natrium beschickten Vakuumröhre Licht von höherer Interferenzfähigkeit erhalten. Bei dieser Elektro-Luminiszenz ist die Temperatur viel niedriger. Michelson schätzt sie in einem Falle auf 250° Cels. Dann würde d/λ zu 205000 folgen. Bei 50° Cels. wäre $d/\lambda = 245000$. Die große Interferenzfähigkeit der Quecksilberlinien erklärt sich durch das große Atomgewicht (welches beim Quecksilber als einatomigem Gase gleich seinem Molekulargewicht ist). Denn nach (29) wird durch ein großes M die Geschwindigkeit v der Moleküle gering. Für Quecksilber folgt bei $M = 200$, $\vartheta = 273 + 50 = 323$, $v = 2 \cdot 10^4$, und $d/\lambda = 517000$.

Die in dieser Weise für die Interferenzfähigkeit berechneten Zahlen stimmen annähernd überein mit den Beobachtungsresultaten

1) Vgl. darüber Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 27, S. 298, 1889.

von Michelson.[1]) Derselbe konnte auch direkt den Temperatureinfluß auf die Interferenzfähigkeit mit Hilfe einer mit Wasserstoff gefüllten Geißlerschen Röhre nachweisen, welche durch ein umschließendes Kupferblech auf 300° C erhitzt werden konnte.[2]) Ohne diese Erhitzung waren die Interferenzfransen deutlicher, als mit der Erhitzung. Die Erscheinung spricht zugleich dafür, daß die Temperatur in der Geißlerschen Röhre eine niedrige ist, d. h. daß das eingeschlossene Gas luminisziert, und nicht infolge hoher Temperatur leuchtet. Denn eine Erhitzung der Röhre um 300° Cels. kann nach (29) nur dann auf die Molekulargeschwindigkeit v merklichen Einfluß haben, falls die Temperatur ϑ niedrig z. B. 50° Cels. ist. Nach neueren Untersuchungen von Fabry und Buisson ist die Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung eine vorzügliche; vgl. Comp. rend. **154**, 1224, 1349; 1912.

Wenngleich die so erhaltenen Zahlen über die Interferenzfähigkeit sich manchen Tatsachen gut anschließen, so erschöpfen dennoch die hier angestellten Betrachtungen den Gegenstand noch nicht. Denn einerseits ist nach Ebert[3]) der Abstand zweier Linien des Sonnenspektrums, die noch zu trennen sind, kleiner, als sich aus dem Dopplerschen Prinzipe ergeben würde, andererseits würde nach Lord Rayleigh[4]) die Berücksichtigung der Rotation der Moleküle die Interferenzfähigkeit des von ihnen ausgesandten Lichtes viel mehr herabsetzen als die Berücksichtigung ihrer translatorischen Bewegung. Die Rotation der Moleküle würde allerdings nur bei mehratomigen Molekülen zu berücksichtigen sein. Die Erklärung der großen Interferenzfähigkeit der Quecksilberlinien würde hiernach nicht hinfällig werden. Endlich ist zu bemerken, daß zuweilen enorme Verbreiterungen an Spektrallinien beobachtet werden, die zu der Annahme sehr hoher Temperaturwerte führen[5]). Über den Einfluß elektrischer Schwingungen, insbesondere von sogenannten Löschfunken, auf die Spektrallinien vgl. Glatzel, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **12**, S. 842, 1910.

Falls man den leuchtenden Gasmolekülen einseitig gerichtete

1) Phil. Mag. (5) 34, S. 280, 1892. Siehe auch Kayser, Handb. d. Spektroskopie, Band II, S. 317 ff. Leipzig 1902. Schönrock, Ann. d. Phys. **20**, 995, 1906; **22**, 209, 1907.

2) Astrophys. Journ. 2, S. 251, 1896.

3) Sitz.-Ber. d. phys.-med. Soz. Erlangen, 1889. Wied. Beibl. 1889, S. 944.

4) Phil. Mag. (5) 34, S. 410, 1892.

5) E. Gehrcke, Verh. D. Phys. Ges. **6**, S. 344. 1904.

große Geschwindigkeiten erteilt, so müssen sich nach dem Dopplerschen Prinzip ihre Spektrallinien verschieben. Dies ist von Stark[1]) bei elektrischer Entladung an den Kanalstrahlen entdeckt und dadurch ein wichtiger Fortschritt erzielt worden zur Erforschung der Träger der bei Geißlerschen Röhren auftretenden verschiedenen Arten der Spektren. Stark hat dadurch auch interessante Beziehungen zu den Resultaten von Runge und Paschen[2]) über die Zeeman-Effekte der Linienserien erhalten (vgl. oben S. 437).

7. Andere Ursachen zur Verbreiterung der Spektrallinien. Die Bewegung der Moleküle ist nicht die einzige Ursache zur Verbreiterung der Spektrallinien. Die zeitliche Dämpfung der Elektronenschwingungen muß der Interferenzfähigkeit eine Grenze setzen und daher die Spektrallinie verbreitern[3]), da Interferenzfähigkeit und Homogenität der Spektrallinie stets einander bedingen. Die Elektronen werden im Zustande stationären Leuchtens immer wieder zu Schwingungen angeregt durch Zusammenstöße der Moleküle. Je häufiger dieselben sind, um so kleiner muß wiederum die Interferenzfähigkeit sein. Da nun die Zahl der Zusammenstöße mit der Dichte des Gases größer wird, so muß auch durch Vergrößerung der Dichte eine Verbreiterung der Spektrallinien entstehen, wie die Versuche tatsächlich bestätigen.[4]) Durch alleinige Vergrößerung der Dicke der strahlenden Schicht (innerhalb gewisser Grenzen) werden die Emissionslinien dagegen nicht verbreitert, sondern nur heller.[5]) Wenn allerdings die Dicke der strahlenden Schicht so beträchtlich wird, daß sie für alle Wellenlängen merkliche Absorption besitzt, so muß sie, falls reine

1) J. Stark, Phys. Ztschr. **6**, S. 892, 1905. — **7**, S. 92, 249, 251, 1906. — Ber. d. Deutsch. phys. Ges. **8**, S. 111, 1906.

2) C. Runge u. F. Paschen, Berl. Ber. 1902, S. 380, 720.

3) Diese Ansicht ist von Lommel (Wied. Ann. 3, S. 251, 1877) und Jaumann (Wied. Ann. 53, S. 832, 1894; 54, S. 178, 1895) ausgesprochen und mathematisch verfolgt worden. — Vgl. auch Garbasso (Atti d. R. Acad. d. Scienc. di Torino, XXX, 1894).

4) Vgl. hierüber Winkelmanns Handbuch d. Physik, Optik, 1. Aufl., S. 419 u. ff., 2. Aufl. S. 706 u. ff. (Autor Kayser). — Vgl. ferner Kayser, Handb. der Spektroskopie. Leipzig 1902, Bd. II, Kap. V. Die Verbreiterung der Spektrallinien durch gegenseitige elektrodynamische Beeinflussung der Ionenschwingungen ist von Galitzine (Wied. Ann. 56, S. 78, 1895) theoretisch untersucht worden. (Vgl. auch hierüber C. A. Mebius, Wied. Beibl. 1899, S. 419.) — Richardson, Phil. Mag. **14**, 557, 1907.

5) Vgl. hierüber Paschen, Wied. Ann. 51, S. 33, 1894.

Temperaturstrahlung vorliegt, nach dem Kirchhoffschen Gesetz sehr verbreiterte Emissionslinien, d. h. schließlich ein kontinuierliches Spektrum entsenden.[1])

8. Photochemische Vorgänge in Gasen. Wenn man ein Gas mit chemisch wirksamer, ultravioletter Strahlung durchstrahlt, so wird ein Teil der Strahlungsenergie zur Vollbringung eines chemischen Prozesses verbraucht. Es ist anzunehmen, daß die absorbierte Strahlungsenergie der Anzahl N der durch die Strahlung eingeleiteten, gleichartigen chemischen Elementarprozesse proportional ist. Wenn ein einzelner Elementarprozeß eine gewisse Menge an Strahlungsenergie verbraucht, so entsteht die Frage, wie groß diese ist und von welchen Umständen sie abhängt. Stark und Einstein haben den Satz aufgestellt, daß diese Strahlungsenergie gleich dem Planckschen Wirkungsquantum $h\nu$ (vgl. S. 519) der auffallenden Strahlung ist. Wenn dieser Satz zutrifft, so gestattet er bei einem photochemischen Vorgang die Zahl der gebildeten Moleküle zu berechnen, falls diese absorbierte Strahlungsenergie und der Elementarprozeß selbst bekannt sind.

Bezeichnet E die absorbierte Strahlungsenergie, so ist nach dem Obigen:

$$E = N \cdot h\nu \quad \text{oder} \quad N = E/h\nu. \tag{35}$$

Wenn bei jedem Elementarprozeß μ Moleküle eines Stoffes M gebildet werden, so entstehen durch N Elementarprozesse $N\mu = z$ Moleküle von M. Aus (35) folgt:

$$z = \frac{E\mu}{h\nu}. \tag{36}$$

Die berechnete Zahl z der durch den Elementarprozeß gebildeten Moleküle M kann nach Warburg unter gewissen Umständen auch dann aus experimentellen Daten berechnet werden, wenn der Elementarprozeß von sekundären chemischen Reaktionen begleitet wird. Diese sekundären Vorgänge können mit beliebiger Wärmetönung verlaufen, dürfen aber aus jedem im Elementar-

3) Vgl. dazu H. Wanner, Wied. Ann. 68, S. 143, 1899. Derselbe beobachtete eine merkwürdige Umkehrung der Natriumlinie bei einer durch wiederholte Spiegelung erreichten Dickenvergrößerung der Natriumflamme.

prozeß entstandenen Molekül M nur eine bekannte Anzahl neuer Moleküle M' bilden, ohne daß bei diesem Vorgange neue Strahlung absorbiert würde.

Offenbar genügt die Ozonisierung des Sauerstoffes infolge ultravioletter Bestrahlung diesen Bedingungen. Denn mag der Elementarprozeß sein: $O_2 = O + O$ oder $3\,O_2 = 2\,O_3$ [1]), immer entstehen $\mu = 2$ Moleküle O_3, da im ersten Falle eine sekundäre Reaktion $O + O_2 = O_3$ anzunehmen ist, deren Verlauf vermutlich nicht von der Bestrahlung abhängt. Bezeichnet mithin H die pro Molekül O_3 gewonnene chemische Energie, so wird bei der Bildung von z-Molekülen O_3 die Energie $zH = W$ gewonnen. Demnach ist wegen Gleichung (36) das Verhältnis s der gewonnenen Energie W zur aufgewandten Energie E:

$$s = \frac{W}{E} = \frac{H\mu}{h\nu}. \qquad (37)$$

Die Größe s heißt nach Warburg die photochemische Ausbeute. Für die von Warburg verwandte Strahlung (Zinklinien) der mittleren Wellenlänge 2090 Angström-Einheiten berechnet sich $h\nu = 94{,}3 \cdot 10^{-13}$ Erg[2]) (vgl. S. 522). Die Größe H ist gleich $\frac{34100 \cdot 41{,}9 \cdot 10^6}{6{,}175 \cdot 10^{23}} = 23 \cdot 10^{-13}$ Erg, da 34100 die bekannte[3]) Bildungswärme von 1 g-Mol Ozon (in g-Calorien) aus Sauerstoff, $41{,}9 \cdot 10^6$ das mechanische Wärmeäquivalent, $6{,}175 \cdot 10^{23}$ die Zahl der Moleküle pro g-Mol ist (s. S. 523). μ ist $= 2$, wie bereits oben erörtert. Bei Einsetzung dieser Daten in (37) folgt:

$$s = 0{,}5.$$

Auf direktem Wege fand Warburg[4]) experimentell $s = 0{,}46$. Dies ist eine bemerkenswerte Bestätigung des obigen Satzes, den Gleichung (35) ausdrückt[5]), für deren Bewertung allerdings die

1) Dieser letztere Elementarprozeß dürfte allerdings kaum annehmbar sein, da das gleichzeitige Zusammentreffen von 3 Sauerstoffmolekülen nur selten erfolgen kann.

2) Dieser Betrag ist also ungefähr gleich der Bildungswärme von 4 Ozonmolekülen.

3) Nach Jahn, Ztschr. f. anorgan. Chemie **60**, S. 337, 1908.

4) Berl. Ber. 1911, S. 746; 1912, S. 216.

5) Ob die obige, bisher nur beim Ozon geprüfte Theorie auch auf die

mit anderen Wellenlängen und an anderen Gasen anzustellenden Versuche abzuwarten sind. — Einstein[1]) hat versucht, die Gleichung (35) thermodynamisch zu begründen, indessen ist diese Begründung wohl nur ein erster Versuch, da die Voraussetzungen der Theorie zweifelhafte sind.

---

photochemische Zersetzung des Ammoniaks, die Warburg untersucht hat, ausgedehnt werden kann, muß dahingestellt bleiben; hier liegen die chemischen Reaktionen in ihren Einzelheiten weniger einfach als beim Ozon.

1) Ann. d. Phys. **37**, S. 832, 1912.



Sachregister.

Druck von August Pries in Leipzig.

Date Due

Reserved for 196

JUN 23 1953

FEB 24 1955

AUG 14 1956

AUG 15 1956

MAY 23 1957

MAR 24 1960

JUN 1 1960

Sept. 6 1963

NOV 21 1963

Sept 4, 1964

Sept 21, 1964

Feb 7, 1967

June 6, '67